1. kapitola

PŘÍPRAVNÉ ÚVAHY

1.1. Lineární nerovnice

Nejprve si připomeneme několik známých pojmů a postupů. Řešme například tuto soustavu čtyř nerovnic o dvou neznámých x, y:

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4, \\ x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

tj. hledejme takovou uspořádanou dvojici čísel x, y, po jejichž dosazení do (1) za neznámé x, y dostaneme platnou soustavu nerovností. Poslední dvě nerovnice soustavy (1) nám říkají, že čísla x, y mají být nezáporná; proto zpravidla místo o řešení soustavy (1) hovoříme o nezáporném řešení soustavy:

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4. \end{aligned} \tag{2}$$

Množinu všech nezáporných řešení soustavy (2) můžeme geometricky znázornit v rovině způsobem, který je běžně znám ze střední školy.

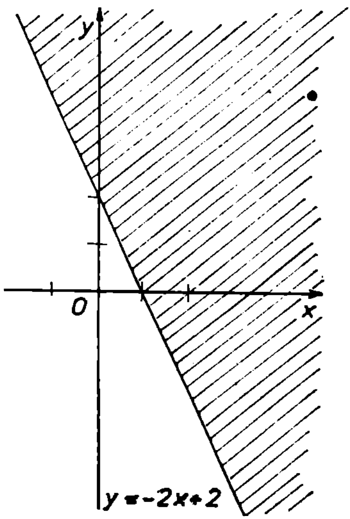
Jsou-li x, y souřadnice bodu v rovině (v pevně zvolené pravoúhlé soustavě souřadnic), pak všechny body (x, y), jejichž souřadnice vyhovují nerovnici

$$-2x - y \leqq -2, \tag{3}$$

leží na jedné straně od přímky, jejíž rovnice je

$$y = -2x + 2. \tag{4}$$

Snadno také zjistíme, na které straně; stačí dosadit do (3) souřadnice libovolného bodu roviny, neležícího na

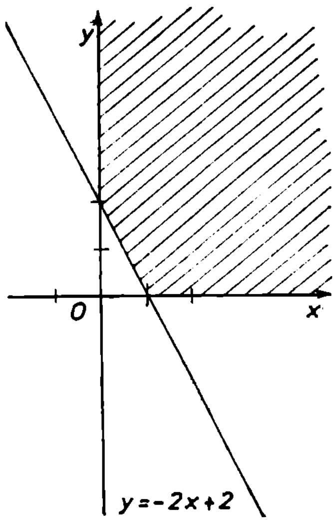


Obr. 1.

přímce (4), např. souřadnice počátku soustavy souřadnic, tj. $x = 0$, $y = 0$. Odtud vidíme, že první nerovnici soustavy (2) vyhovují všechny body ležící na přímce (4) a všechny body ležící na opačné straně od přímky (4), než leží počátek soustavy souřadnic.

Množinu všech řešení první nerovnice soustavy (2) lze tedy znázornit šrafovanou polorovinou (obr. 1). Nezáporná řešení pak budou znázorněna tou částí této poloroviny, která leží v prvním kvadrantu (obr. 2).

Stejným způsobem zjistíme, že body, znázorňující ne-

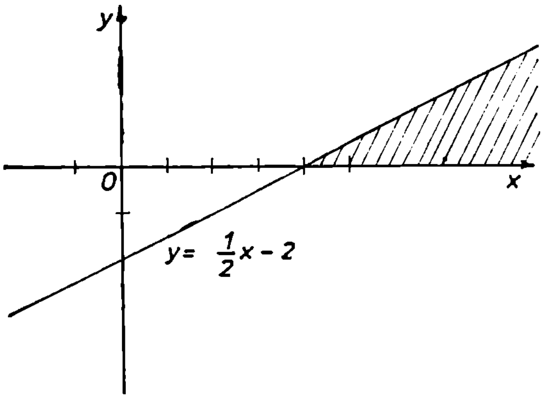


Obr. 2.

záporná řešení druhé nerovnice soustavy (2), leží na opačné straně od přímky

$$y = \frac{1}{2}x - 2,$$

než leží počátek soustavy souřadnic, nebo na ní (obr. 3). Nezáporná řešení soustavy (2) jsou pak znázorněna body, které znázorňují zároveň nezáporná řešení první nerovnice i druhé nerovnice soustavy (2) (tj. body šrafované plochy na obr. 3). Z obr. 3 je patrné, že množina bodů



Obr. 3.

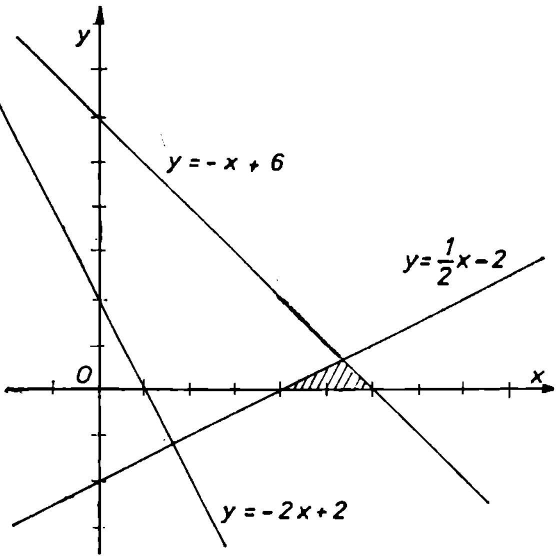
znázorňujících nezáporná řešení soustavy (2) není omezená.[1])

[1]) Množinu A bodů roviny nazýváme *omezenou*, jestliže existují taková čísla a, b, že pro každý bod množiny A o souřadnicích (x, y) platí $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$.

Přidáme-li k soustavě (2) nerovnici

$$x + y \leqq 6,$$

bude množina znázorňující množinu všech nezáporných řešení této nové soustavy omezená (viz šrafovaná plocha na obr. 4).

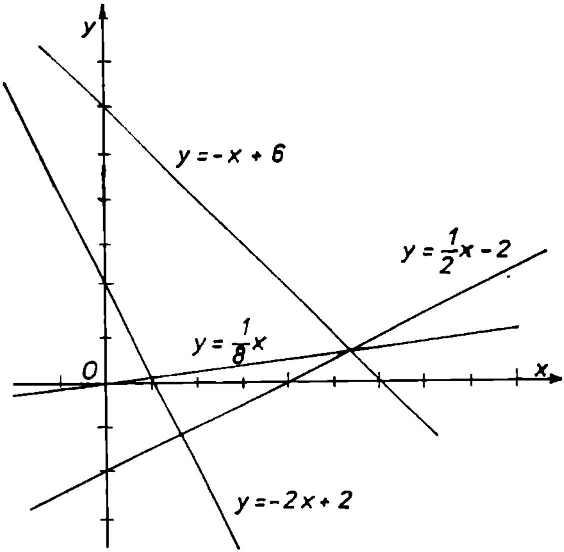


Obr. 4.

Přidáme-li ještě nerovnici

$$x - 8y \leqq 0,$$

bude mít vzniklá soustava pouze jediné řešení, znázorněné bodem o souřadnicích $\left(\frac{16}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (viz obr. 5).



Obr. 5.

Přidáme-li nakonec ještě nerovnici

$$2x + y \leqq 2,$$

dostaneme soustavu, která nemá nezáporné řešení.

Zjistili jsme tedy na příkladech, že soustava lineárních nerovnic o dvou neznámých (tj. nerovnic, které mají tvar $ax + by \leqq c$) nemusí mít žádné nezáporné řešení, nebo může mít jediné nezáporné řešení, nebo může mít nekonečně mnoho nezáporných řešení; v posledním případě může být množina bodů roviny znázorňujících tato řešení buď omezená, nebo neomezená.

O tom, že poslední z uvedených soustav, tj. soustava

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4, \\ x + y &\leqq 6, \\ x - 8y &\leqq 0, \\ 2x + y &\leqq 2, \end{aligned} \tag{5}$$

nemá nezáporné řešení, jsme se mohli velmi snadno přesvědčit takto: Vynásobíme-li druhou nerovnici třiceti a poslední nerovnici dvaceti, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -30x + 60y &\leqq -120, \\ x + y &\leqq 6, \\ x - 8y &\leqq 0, \\ 40x + 20y &\leqq 40. \end{aligned} \tag{6}$$

Soustavy (5) a (6) mají zřejmě stejnou množinu nezáporných řešení. Avšak soustava (6) nemá nezáporné řešení, neboť kdyby ho měla, bylo by toto řešení i nezáporným řešením nerovnice

$$10x + 72y \leqq -76, \tag{7}$$

která vznikne sečtením všech nerovnic soustavy (6). Nerovnost (7) však zřejmě nemá nezáporné řešení.

Podobného postupu můžeme užít i v případě soustav o jiném počtu rovnic a neznámých. Vyšetřujme např. tuto soustavu čtyř nerovnic o třech neznámých x, y, z.

$$
\begin{aligned}
5x - y - z &\leqq 1, \\
-10x + 10y - z &\leqq -3, \\
-2x - y + 10z &\leqq -4, \\
7x + y + 5z &\leqq 2.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Vynásobíme-li první a poslední nerovnici číslem 2, dostaneme soustavu

$$
\begin{aligned}
10x - 2y - 2z &\leqq 2, \\
-10x + 10y - z &\leqq -3, \\
-2x - y + 10z &\leqq -4, \\
14x + 2y + 10z &\leqq 4.
\end{aligned}
$$

Sečtením těchto nerovnic dostaneme nerovnici

$$12x + 9y + 17z \leqq -1,$$

která zřejmě nemá nezáporné řešení, a tedy ani původní soustava (8) nemá nezáporné řešení.

Pozorný čtenář si ještě všiml, že uvedený postup je speciálním případem obecnějšího postupu. Dříve než tento postup vyložíme pro případ obecné soustavy čtyř tzv. lineárních nerovnic o třech neznámých, zavedeme si nové označení, které se nám později v mnohém vyplatí.

Místo abychom označili neznámé písmeny x, y, z, označíme je po řadě symboly x_1, x_2, x_3; pro koeficient, jímž je v první nerovnici násobena první, resp. druhá, resp. třetí neznámá, užijeme symbolu se dvěma indexy, např. a_{11}, resp. a_{12}, resp. a_{13}; podobně symboly a_{21}, a_{22}, a_{23} budou po řadě označovat koeficienty u neznámých x_1, x_2, x_3 ve druhé nerovnici; je už zřejmé, jak budou označeny koeficienty v ostatních nerovnicích. Pravou stranu první nerovnice označíme b_1, druhé nerovnice b_2, třetí a čtvrté nerovnice b_3 a b_4.

Na základě této dohody můžeme obecnou soustavu čtyř lineárních nerovnic o třech neznámých x_1, x_2, x_3 zapsat takto:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\leqq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_2 &\leqq b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 &\leqq b_4. \end{aligned} \tag{9}$$

Položíme-li např. $a_{11} = 5$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = -1$, $b_1 = 1$, dostaneme první nerovnici soustavy (8).

Výše popsaný postup, kterým jsme se přesvědčili, že soustava (8) nemá nezáporné řešení, je obsažen v důkazu tohoto trvzení:

Věta A. *Existují-li čtyři nezáporná čísla y_1, y_2, y_3, y_4 tak, že platí nerovnosti*

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + y_3a_{31} + y_4a_{41} &\geqq 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + y_3a_{32} + y_4a_{42} &\geqq 0, \\ y_1a_{13} + y_2a_{23} + y_3a_{33} + y_4a_{43} &\geqq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

a že zároveň platí nerovnost

$$y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 + y_4b_4 < 0, \tag{11}$$

pak soustava (9) *nemá nezáporné řešení.*

Důkaz. Kdyby soustava (9) měla nezáporné řešení a kdyby existovala nezáporná čísla y_1, y_2, y_3, y_4 s vlastnostmi uvedenými v předpokladech věty A, bylo by (protože čísla y_1, y_2, y_3, y_4 jsou nezáporná) toto řešení také řešením soustavy

$$\begin{aligned} y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) &\leqq y_1b_1, \\ y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) &\leqq y_2b_2, \\ y_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) &\leqq y_3b_3, \\ y_4(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3) &\leqq y_4b_4, \end{aligned} \tag{12}$$

a také nezáporným řešením nerovnice, která vznikne sečtením všech nerovnic soustavy (12). Avšak po snadných úpravách (po provedení naznačeného násobení čísly y_1, y_2, y_3, y_4 a po vytknutí neznámých x_1, x_2, x_3) zjistíme, že tato nerovnice má tvar

$$\begin{aligned} &(y_1a_{11} + y_2a_{21} + y_3a_{31} + y_4a_{41})\,x_1 + \\ &+ (y_1a_{12} + y_2a_{22} + y_3a_{32} + y_4a_{42})\,x_2 + \\ &+ (y_1a_{13} + y_2a_{23} + y_3a_{33} + y_4a_{43})\,x_3 \leqq \\ &\leqq y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 + y_4b_4, \end{aligned}$$

ze kterého je patrné, že nemůže mít nezáporné řešení, neboť podle předpokladu jsou koeficienty u neznámých nezáporná čísla, kdežto pravá strana nerovnosti je záporná.

Větu A lze vyslovit v této logicky ekvivalentní formě:

Věta B. *Má-li soustava* (9) *nezáporné řešení, pak platí toto: Jsou-li y_1, y_2, y_3, y_4 taková nezáporná čísla, že platí nerovnosti* (10), *pak také platí nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 + y_4b_4 \geqq 0\,.$$

Čtenář si pravděpodobně položí otázku, zda větu A (nebo jí ekvivalentní větu B) lze obrátit. Jak vyplyne z dalšího výkladu, odpověď na tuto otázku je kladná.

1.2. Oddělitelnost množin

Už v předmluvě jsme se zmínili o důležitosti věty o oddělitelnosti konvexních mnohostěnů. Myšlenku této věty vyložíme nejdříve v rovině.

Mějme přímku p v rovině ϱ. O přímce p budeme říkat, že *odděluje* navzájem množiny M_1 a M_2 bodů roviny ϱ, jestliže množiny M_1 a M_2 leží v navzájem opačných otevřených polorovinách určených přímkou p. O dvou množinách M_1, M_2 bodů roviny ϱ budeme říkat, že jsou navzájem *oddělitelné*, jestliže existuje přímka oddělující množiny M_1 a M_2.

Je zřejmé, že jsou-li množiny M_1 a M_2 oddělitelné, pak množiny M_1 a M_2 nemají společné body, čili, jak často říkáme, jsou disjunktní. Kdyby totiž bod X patřil do množiny M_1 i do množiny M_2, pak pro bod P neležící na přímce p, která odděluje množiny M_1 a M_2, by úsečka XP zároveň měla i neměla společný bod s přímkou p.

Dá se snadno ukázat, že obrácené tvrzení neplatí. Vezmeme-li za M_1 všechny body určité kružnice k a za M_2 množinu ležící uvnitř kruhu určeného kružnicí k, dostaneme množiny M_1, M_2, nemající společný bod. Avšak množiny M_1, M_2 nejsou oddělitelné, neboť pro každou přímku p nastává právě jeden z těchto dvou případů:

1. přímka p nemá s kružnicí k žádný společný bod; v takovém případě leží množiny M_1, M_2 ve stejné polorovině určené přímkou p, a nejsou tedy přímkou p odděleny;

2. přímka p má s kružnicí k společný alespoň jeden bod; v takovém případě množina M_1 neleží (celá) ani v jedné z (otevřených) polorovin určených přímkou p, a nemůže tedy ležet ani v polorovině opačné k polorovině určené přímkou p, ve které leží (leží-li tam vůbec) množina M_2.

Hlavní myšlenka věty o oddělitelnosti konvexních mnohoúhelníků spočívá v tom, že v případě konvexních mnohoúhelníků lze výše uvedené tvrzení obrátit, tj. že každé dva konvexní mnohoúhelníky K_1, K_2 roviny ϱ, které nemají žádný bod společný, lze oddělit. Větu o oddělitelnosti konvexních mnohoúhelníků lze tedy vyslovit takto:

Věta C. *Dva konvexní mnohoúhelníky roviny ϱ jsou oddělitelné právě tehdy, jsou-li disjunktní.*

Jak jsme se už zmínili, obecnou větu o oddělitelnosti konvexních mnohostěnů nebudeme dokazovat; přesto však v tomto speciálním případě uvedeme úvahy naznačující jednu z možných cest vedoucích k důkazu.

Vzhledem k tomu, co bylo uvedeno výše, stačí dokázat, že jsou-li K_1, K_2 dva disjunktní konvexní mnohoúhelníky, jsou mnohoúhelníky K_1, K_2 oddělitelné.

Nejprve dokážeme, že existuje dvojice bodů X_0, Y_0 taková, že
1. $X_0 \in K_1$, 2. $Y_0 \in K_2$ a 3. $|X_0Y_0| \leqq |XY|$ pro všechny dvojice bodů X, Y takové, že $X \in K_1$ a $Y \in K_2$. Popíšeme konstrukci bodů Y_0 a X_0. Při této konstrukci budeme potřebovat následující jednoduché lemma.

Lemma. *Nechť AB a CD jsou dvě libovolné úsečky ležící v rovině. Potom existují dva body X' a Y' tak, že*
1. $X' \in AB$, 2. $Y' \in CD$ a 3. $|X'Y'| \leqq |XY|$ pro všechny dvojice bodů X, Y takové, že $X \in AB$ a $Y \in CD$.

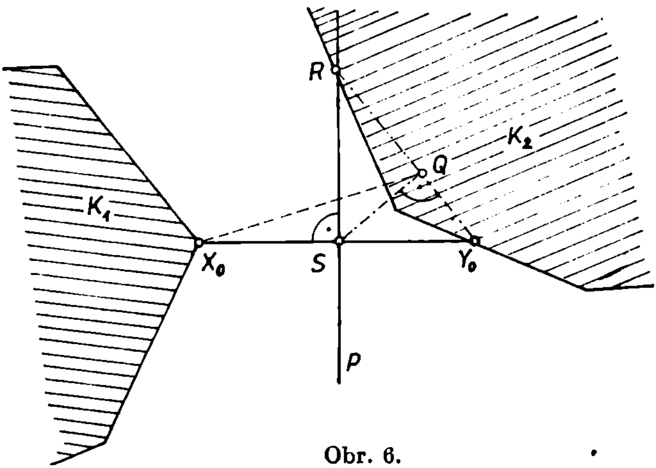
Důkaz lemmatu lze provést snadno rozebráním jednotlivých typických případů vzájemné polohy úseček a přenecháváme jej čtenáři.

Vraťme se nyní k důkazu věty. Nechť obvod mnohoúhelníka K_1 sestává z úseček $u_1, u_2, \ldots, u_r$ $(r \geqq 3)$ a obvod mnohoúhelníka K_2 z úseček $v_1, v_2, \ldots, v_s$ $(s \geqq 3)$. Uvažujme nyní všechny možné dvojice úseček u_i a v_j, kde $i = 1, 2, \ldots, r$ a $j = 1, 2, \ldots, s$. Na základě lemmatu existuje ke každé dvojici u_i, v_j dvojice bodů $X(i, j)$ a $Y(i, j)$ tak, že $X(i, j) \in u_i$, $Y(i, j) \in v_j$ a $|X(i, j)$ $Y(i, j)| \leqq |XY|$ pro všechny dvojice X a Y takové, že $X \in u_i$ a $Y \in v_j$. Budiž nyní M množina čísel $d_{ij} =$ $= |X(i; j)\ Y(i, j)|$ $(i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, s)$. Protože M je konečná, existuje dvojice indexů i^*, j^*, pro kterou je číslo $d_{i^* j^*}$ minimální, tj. platí

$$d_{i^*j^*} = |X(i^*, j^*)\ Y(i^*, j^*)| \leqq d_{ij} = |X(i, j)\ Y(i, j)|.$$

(Pokud existuje takových dvojic více než jedna, vybereme některou z nich.) Čtenář snadno sám dokáže, že body $X_0 = X(i^*, j^*)$ a $Y_0 = Y(i^*, j^*)$ jsou body s nejkratší vzdáleností.

K zakončení důkazu zbývá sestrojit přímku p oddělující K_1 od K_2. Protože mnohoúhelníky K_1 a K_2 nemají společné body, je bod X_0 různý od bodu Y_0; je tedy možné vést středem úsečky X_0Y_0 přímku p kolmou k této úsečce. Ukážeme, že kolmice p odděluje mnohoúhelníky K_1, K_2:



Obr. 6.

Kdyby přímka p mnohoúhelníky K_1, K_2 neoddělovala, existoval by bod R, ležící na přímce p a zároveň náležející jednomu z mnohoúhelníků K_1, K_2. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že bod R náleží mnohoúhelníku K_2 (viz obr. 6). Označíme-li Q patu výšky SQ v pravoúhlém trojúhelníku Y_0RS ($\sphericalangle S = 90°$), pak (protože body Y_0, R náleží konvexnímu mnohoúhelníku K_2) bod Q náleží mnohoúhelníku K_2. Avšak

$$|X_0Q| < |X_0Y_0|,$$

neboť

$$|X_0Q| < |X_0S| + |SQ| < |X_0S| + |SY_0| = |X_0Y_0|.$$

To je však ve sporu s vlastností dvojice bodů X_0, Y_0.

1.3. Pojem n-rozměrného prostoru

Víme, že polohu bodu na přímce můžeme určit jedním číslem, polohu bodu v rovině uspořádanou dvojicí a polohu bodu v prostoru uspořádanou trojicí čísel. Vyjdeme-li z této skutečnosti, můžeme dospět k této definici n-rozměrného prostoru:

Množinu všech uspořádaných n-tic $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reálných čísel x_1, x_2, ..., x_n nazveme *n-rozměrným prostorem* a označíme symbolem R^n.

Přitom dvě uspořádané n-tice $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ považujeme za stejné (sobě rovné), platí-li $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_n = y_n$. Prvky množiny R^n budeme nazývat *body* prostoru R^n; čísla x_1, x_2, ..., x_n

budeme nazývat *souřadnicemi* bodu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

V případě, že $n = 1, 2, 3$, budeme užívat známého geometrického znázornění prostoru R^n pomocí pevně zvolené pravoúhlé soustavy souřadnic. Na tomto místě chceme čtenáře upozornit na to, že v definicích pojmů, formulacích vět a při provádění důkazů budeme užívat výhradně analytických (volněji řečeno početních) metod, které budou vycházet doslovně z definice prostoru R^n jakožto množiny všech uspořádaných n-tic reálných čísel. Kdybychom však důsledně odmítli užívat geometrických představ, zbavili bychom výklad veškeré geometrické názornosti a připravili bychom se o možnost porovnávat smysl definic, tvrzení a základních myšlenek důkazů se zkušeností, kterou jsme získali při každodenním vnímání prostorových vlastností světa, v němž žijeme. Z těchto důvodů budeme užívat „geometrické" terminologie, která umožňuje dávat jednotlivým definicím, větám a myšlenkovým postupům názorný geometrický smysl. Používání geometrických představ někdy umožní i „uhodnout předem" přesné, nebo alespoň „přibližné" znění věty, popřípadě postup důkazu. Proto v poslední části tohoto odstavce zavedeme geometrické názvy pro podmnožiny prostoru R^n, se kterými se v dalším, výkladu budeme setkávat.

Jsou-li a_1, b daná čísla, přičemž $a_1 \neq 0$, pak množinu prvků prostoru R^1, jejichž souřadnice x_1 vyhovují rovnici

$$a_1 x_1 = b\,,$$

lze znázornit bodem; je to prostě jednobodová množina.

Jsou-li a_1, a_2, b daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel a_1, a_2 je různé od nuly, pak množinu bodů prostoru R^2, jejichž souřadnice x_1, x_2 vyhovují rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b,$$

lze znázornit přímkou.

Jsou-li a_1, a_2, a_3, b daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel a_1, a_2, a_3 je různé od nuly, pak množinu bodů prostoru R^3, jejichž souřadnice x_1, x_2, x_3 vyhovují rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b,$$

lze znázornit rovinou.

Bude užitečné zavést pro podobné množiny (čtenář už tuší jaké) v prostorech R^n speciální název. Dospíváme tak k této definici:

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ jsou daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je různé od nuly. Množinu bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru R^n, jejichž souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovují rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \qquad (13)$$

nazveme *nadrovinou* v prostoru R^n. Rovnici (13) nazýváme rovnicí této nadroviny.

Množinu bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqq b, \qquad (14)$$

nazveme *uzavřeným poloprostorem* v prostoru R^n určeným nerovnicí (14). Množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqq b, \qquad (15)$$

nazveme rovněž uzavřeným polopostorem, a to uzavřeným poloprostorem určeným nerovnicí (15).

Uzavřené poloprostory určené nerovnicemi (14), (15) nazýváme také (navzájem) *opačnými uzavřenými poloprostory* určenými nadrovinou o rovnici (13).

Otevřenými (navzájem *opačnými*) poloprostory určenými nadrovinou o rovnici (13) nazýváme množiny bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnicím

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < b,$$

resp.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n > b.$$

Jsou-li $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ body prostoru R^n, pak *úsečkou* spojující body Y, Z nazýváme množinu těch bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro jejichž souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1, \\ x_2 &= \lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda y_n + (1 - \lambda) z_n, \end{aligned}$$

kde λ může být libovolné číslo, pro které platí $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

O množině bodů prostoru R^n říkáme, že je *konvexní*,[1]) jestliže pro libovolné dva její body do ní patří i celá úsečka tyto body spojující.

---

[1]) Na rozdíl od knížek [2] a [3] počítáme prázdnou množinu mezi množiny konvexní.

Cvičení

1. Dokažte, že má-li soustava lineárních rovnic o třech neznámých x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

nezáporné řešení, pak pro každé řešení (y_1, y_2, y_3) (nikoli jen nezáporné!) soustavy lineárních nerovnic

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + y_3a_{31} &\geqq 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + y_3a_{32} &\geqq 0, \\ y_1a_{13} + y_2a_{23} + y_3a_{33} &\geqq 0 \end{aligned}$$

platí nerovnost

$$y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 \geqq 0.$$

2. *Uzavřeným kruhem se středem S a poloměrem r* ($r > 0$) rozumíme množinu bodů X roviny ϱ, pro které platí nerovnost $|SX| \leqq r$; *otevřeným kruhem se středem S a poloměrem r* ($r > 0$) rozumíme množinu bodů X roviny ϱ, pro které platí $|SX| < r$. Dokažte, že

a) jsou-li K_1 a K_2 uzavřené kruhy, jsou K_1 a K_2 oddělitelné právě tehdy, jestliže kruhy K_1 a K_2 nemají společné body;

b) jsou-li K_1 a K_2 otevřené kruhy, jsou K_1 a K_2 oddělitelné právě tehdy, jestliže kruhy K_1 a K_2 nemají společné body.

Obdobné tvrzení však neplatí, je-li jeden z kruhů K_1, K_2 otevřený a druhý uzavřený.

3. Nechť bod M neleží na přímce p. Které přímky oddělují bod M a přímku p?

4. Ukažte, že může existovat více dvojic s vlastností dvojice (X_0, Y_0) z naznačeného důkazu věty C. V takovém případě však existuje takových bodů nekonečně mnoho.

5. Znázorněte v rovině množiny těch bodů $X = (x_1, x_2)$ prostoru R^2, pro jejichž souřadnice platí:

(a) $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$ a zároveň $x_2 \geqq x_1^2$,
(b) $x_1 \leqq 1$ a zároveň $x_1^2 + x_2^2 > 1$,
(c) $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$ a zároveň $|x_1| + |x_2| \geqq 1$.