IV. kapitola. Nerovnosti mezi prvky a různými příčkami trojúhelníku, Erdösova-Mordellova věta, Schreiberova nerovnost, Stewartova věta

In: Stanislav Horák (author): Nerovnosti v trojúhelníku. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1986. pp. 82–105.

NEROVNOSTI MEZI PRVKY A RŮZNÝMI PŘÍČKAMI TROJÚHELNÍKU

ERDŐSOVA–MORDELLOVA VĚTA SCHREIBEROVA NEROVNOST STEWARTOVA VĚTA

40. Nechť O je libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC. Označme $R_1 = |OA|$, $R_2 = |OB|$, $R_3 = |OC|$, $BC \vdash O = r_1$, $CA \vdash O = r_2$, $AB \vdash O = r_3$. Potom platí

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný a bod O je jeho střed. Dokažte.

Důkaz (obr. 10a). Předpokládejme, že trojúhelník ABC je ostroúhlý. Označme $P(Q)$ patu kolmice spuštěné z bodu O na stranu $AC(AB)$. Potom čtyřúhelník $AQOP$ je tětivový, a lze mu tedy opsat kružnici. Střed této kružnice označíme M, poloměr má velikost $\frac{1}{2} R_1$. Proto (viz vztah **II.b)**)

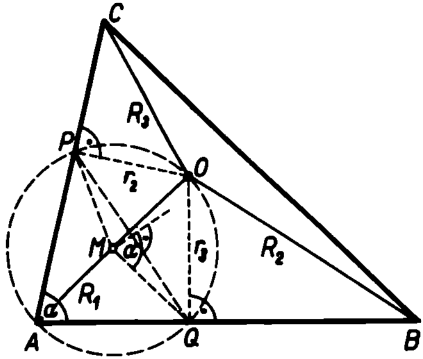
$$|PQ| = R_1 \sin \alpha .$$

Dříve než postoupíme dál, všimněme si vnitřních úhlů čtyřúhelníka $AQOP$. Dva z nich jsou pravé, $|\sphericalangle PAQ| = \alpha$, a proto $|\sphericalangle POQ| = \pi - \alpha = \beta + \gamma$. Proto $\cos |\sphericalangle POQ| = -\cos \alpha$. Kosinová věta použitá na trojúhelník OPQ je

$$|PQ|^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3\cos(\beta+\gamma),$$

takže můžeme psát

$$\begin{aligned}|PQ|^2 = r_2^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + r_3^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta)&\\ + 2r_2r_3(\sin\beta\,\sin\gamma - \cos\beta\,\cos\gamma) &=\\ = (r_2\sin\gamma + r_3\sin\beta)^2 + (r_2\cos\gamma - r_3\cos\beta)^2&\\ \geqq (r_2\sin\gamma + r_3\sin\beta)^2.&\end{aligned}$$



Obr. 10a

Rovnost platí právě tehdy, když

$$r_2\cos\gamma - r_3\cos\beta = 0, \quad \text{čili} \quad r_2 : r_3 = \cos\beta : \cos\gamma.$$

Přitom si uvědomíme, že $\beta < \frac{\pi}{2}$, $\gamma < \frac{\pi}{2}$, a tudíž $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$.

Můžeme psát

$$|PQ| = R_1 \sin\alpha \geqq r_2 \sin\gamma + r_3 \sin\beta \tag{1}$$

a k tomu připíšeme další dvě nerovnosti, které z nerovnosti (1) dostaneme cyklickou záměnou:

$$R_2 \sin\beta \geqq r_3 \sin\alpha + r_1 \sin\gamma, \tag{2}$$

$$R_3 \sin\gamma \geqq r_1 \sin\beta + r_2 \sin\alpha. \tag{3}$$

Rovnost v druhé (třetí) nerovnosti nastane právě tehdy, když

$$r_3 \cos\alpha = r_1 \cos\gamma, \quad \text{jinak psáno} \quad r_3 : r_1 = \cos\gamma : \cos\alpha,$$
$$(r_1 \cos\gamma = r_2 \cos\alpha, \quad \text{jinak psáno} \quad r_1 : r_2 = \cos\alpha : \cos\beta).$$

Vztahy (1), (2), (3) jsou ekvivalentní se vztahy

$$R_1 \geqq r_2 \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + r_3 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$R_2 \geqq r_3 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + r_1 \frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

$$R_3 \geqq r_1 \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + r_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Jejich sečtením dostaneme jedinou nerovnost

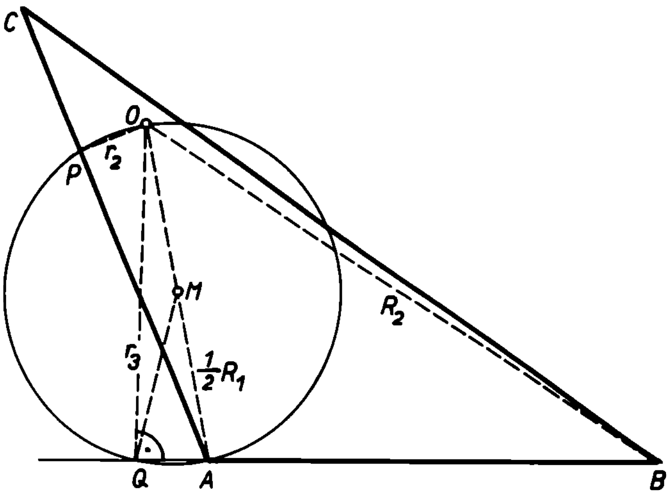
$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq r_1 \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + r_2 \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right) +$$
$$+ r_3 \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

To jsme na dvojčleny v jednotlivých závorkách použili vztah **A.3**, v němž rovnost nastane právě tehdy, když $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, tj. pro rovnostranný trojúhelník. Z úměr

$$r_2 : r_3 = \cos\beta : \cos\gamma,$$
$$r_3 : r_1 = \cos\gamma : \cos\alpha,$$

které jsme během důkazu použili, pak po dosazení za $\alpha = \beta = \gamma$ vyplývá $r_1 = r_2 = r_3$. To však znamená, že v daném vztahu platí rovnost, právě když trojúhelník ABC je rovnostranný a bod O je jeho střed.

b) Věnujme se ještě případu, kdy $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Situace je znázorněna na obr. 10b. Patu kolmice spuštěné z bodu O



Obr. 10b

na stranu AC (AB) označme P (Q). Čtyřúhelníku $OPQA$ lze opsat kružnici, neboť $|\sphericalangle OPA| = |\sphericalangle OQA| = \frac{\pi}{2}$. Jestliže M je střed kružnice opsané tomuto čtyřúhelníku, platí

$$|MO| = |MA| = |MQ| = |MP| = \frac{1}{2} R_1.$$

Dále je

$$|\sphericalangle PAQ| = \pi - \alpha = |\sphericalangle POQ|$$

a z toho vyplývá

$$|\sphericalangle PMQ| = 2(\pi - \alpha).$$

Z rovnoramenného trojúhelníku PMQ máme:

$$\frac{|PQ|}{R_1} = \sin\frac{2(\pi - \alpha)}{2}, \quad \text{tj.} \quad |PQ| = R_1 \sin\alpha.$$

Nyní na trojúhelník OPQ použijeme kosinovou větu:

$$|PQ|^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos|\sphericalangle POQ| = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3 \cos\alpha.$$

Další postup je týž jako v případě ostroúhlého trojúhelníku; dojde se ovšem k témuž výsledku.

Poznámka. Tuto úlohu formuloval v r. 1935 P. Erdös a důkaz provedli ještě v témže roce současně Angličan Mordell a Američan D. F. Barow. Důkaz zde uvedený je původní důkaz Mordellův. Větě se říká *Erdösova—Mordellova*.

41. Při stejném označení jako v předešlé 40. úloze platí

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 6r,$$

kde rovnost nastane, právě když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz (obr. 10a, b). Z obrázků je ihned patrno, že

$$R_1 + r_1 \geqq v_a, \quad R_2 + r_2 \geqq v_b, \quad R_3 + r_3 \geqq v_c.$$

Rovnost v každé nerovnosti nastane právě tehdy, když bod O leží na příslušné výšce trojúhelníku. Tedy rovnost ve všech nerovnostech zároveň platí, právě když bod O splývá s ortocentrem trojúhelníku.

Napsané tři vztahy sečteme:

$$R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2 + r_3 \geqq v_a + v_b + v_c \geqq 9r. \qquad \text{(a)}$$

V posledním kroku úprav jsme použili výsledek úlohy 26. Rovnost v nerovnosti (a) platí právě tehdy, když bod O splývá s ortocentrem trojúhelníku. Podle Erdösovy–Mordellovy věty platí

$$\frac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_3) \geqq r_1 + r_2 + r_3. \qquad \text{(b)}$$

Znaménko rovnosti platí jedině tehdy, jde-li o rovnostranný trojúhelník a bod O je jeho středem. Sečtením vztahů (a) a (b) dojdeme po kratší úpravě k výsledku

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 6r,$$

v němž rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný a bod O je jeho střed.

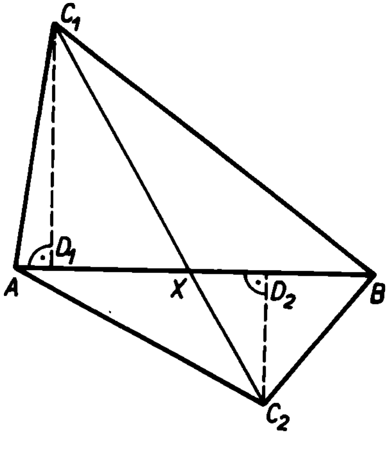
Poznámka. Právě dokázané nerovnosti se říká *Schreiberova nerovnost*.

7. pomocná věta. *Nechť dva trojúhelníky ABC_1, ABC_2 mají společnou stranu AB a nechť přímka C_1C_2 protne přímku AB v bodě X. Potom pro poměr obsahů S_1, S_2 těchto dvou trojúhelníků platí*

$$S_1 : S_2 = |XC_1| : |XC_2|.$$

Důkaz (obr. 11). Sestrojme výšku C_1D_1 v trojúhelníku ABC_1 a výšku C_2D_2 v trojúhelníku ABC_2. Pro obsahy obou trojúhelníků platí

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{2}\,|AB| \cdot |C_1D_1| : \left(\frac{1}{2}\,|AB| \cdot |C_2D_2|\right)$$
$$= |C_1D_1| : |C_2D_2|.$$



Obr. 11a

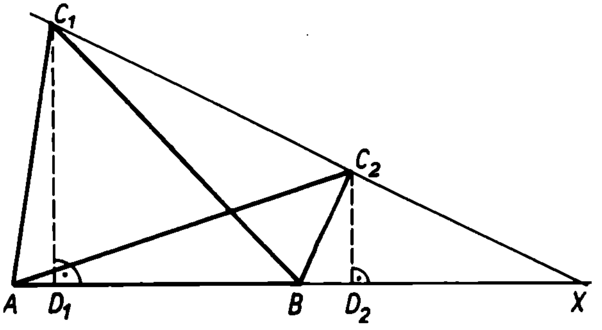
Z podobnosti trojúhelníků XC_1D_1, XC_2D_2 dostáváme

$$|C_1D_1| : |C_2D_2| = |XC_1| : |XC_2|,$$

a tudíž

$$S_1 : S_2 = |XC_1| : |XC_2|,$$

jak jsme měli dokázat.



Obr. 11b

42. Při stejném označení, jaké bylo v úloze 40 a 41, platí

$$R_1R_2R_3 \geqq 8r_1r_2r_3,$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný a O je jeho střed. Dokažte.

Důkaz (obr. 12). Přímka AO (BO; CO) protne stranu BC (CA; AB) v bodě A' (B'; C'). Označme

$$|OA'| = u_1, \quad |OB'| = u_2, \quad |OC'| = u_3.$$

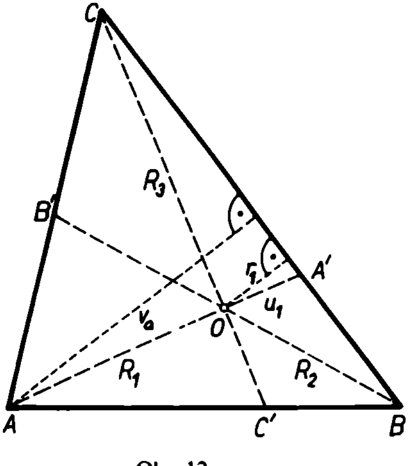
I platí

$$\frac{R_1}{R_1+u_1}=\frac{R_1+u_1-u_1}{R_1+u_1}=1-\frac{u_1}{R_1+u_1},$$

a proto

$$V=\frac{R_1}{R_1+u_1}+\frac{R_2}{R_2+u_2}+\frac{R_3}{R_3+u_3}=$$

$$=3-\left(\frac{u_1}{R_1+u_1}+\frac{u_2}{R_2+u_2}+\frac{u_3}{R_3+u_3}\right).$$



Obr. 12

Označme ještě S obsah trojúhelníku ABC, S_1 obsah trojúhelníku BCO, S_2 obsah trojúhelníku CAO a S_3 obsah trojúhelníku ABO. Podle 7. pomocné věty platí

$$\frac{u_i}{R_i+u_i}=\frac{S_i}{S}\quad \text{pro} \quad i=1,2,3.$$

Po tomto nutném odbočení můžeme pokračovat v úpravě našeho výrazu V:

$$V = 3 - \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}\right) = 3 - 1 = 2.$$

Všimněme si, že platí $u_1 \geqq r_1$, kde rovnost platí právě tehdy, když bod O leží na výšce procházející vrcholem A. Potom též

$$R_1 + u_1 \geqq R_1 + r_1, \quad \text{čili} \quad \frac{1}{R_1 + r_1} \geqq \frac{1}{R_1 + u_1}$$

a také

$$\frac{R_1}{R_1 + r_1} \geqq \frac{R_1}{R_1 + u_1}.$$

Znaménko rovnosti platí, právě když bod O leží na výšce z vrcholu A. Cyklickou záměnou dostaneme další dva obdobné vztahy:

$$\frac{R_2}{R_2 + r_2} \geqq \frac{R_2}{R_2 + u_2}, \quad \frac{R_3}{R_3 + r_3} \geqq \frac{R_3}{R_3 + u_3},$$

kde rovnost v každé nerovnosti platí, právě když bod O leží na příslušné výšce. Sečtením všech tří nerovností dostaneme

$$\frac{R_1}{R_1 + r_1} + \frac{R_2}{R_2 + r_2} + \frac{R_3}{R_3 + r_3} \geqq$$

$$\geqq \frac{R_1}{R_1 + u_1} + \frac{R_2}{R_2 + u_2} + \frac{R_3}{R_3 + u_3} = 2. \tag{1}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když bod O splývá s ortocentrem trojúhelníku. Protože bod O leží uvnitř trojúhelníku, může rovnost nastat jen pro ostroúhlý trojúhelník. V získané nerovnosti se zbavme zlomků a po kratším výpočtu dojdeme k nerovnosti

$$R_1R_2R_3 \geqq R_1r_2r_3 + R_2r_3r_1 + R_3r_1r_2 + 2r_1r_2r_3$$

a odtud jednoduchou úpravou

$$\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3} \geqq 2 + \left(\frac{R_1}{r_1} + \frac{R_2}{r_2} + \frac{R_3}{r_3}\right) \geqq 2 + 3\sqrt[3]{\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3}}, \tag{U}$$

kde jsme použili vztah **B**. Znaménko rovnosti platí, právě když

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2} = \frac{R_3}{r_3}. \tag{2}$$

Položme

$$\sqrt[3]{\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3}} = X > 0,$$

pak je vztah (U) ekvivalentní s nerovnostmi

$$X^3 - 3X - 2 \geqq 0, \quad \text{jinak} \quad (X+1)^2(X-2) \geqq 0.$$

Odtud tedy dostáváme, že

$$X - 2 \geqq 0, \quad \text{čili} \quad X^3 \geqq 8,$$

jinak

$$\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3} \geqq 8.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když bod O splývá s ortocentrem trojúhelníka. V dalším ukážeme, že to stačí k tomu, aby trojúhelník byl rovnostranný.

Všimněme si obr. 13, v němž je znázorněn ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho ortocentrum $V \equiv O$. Označme D (E) patu výšky z vrcholu A (B). Potom

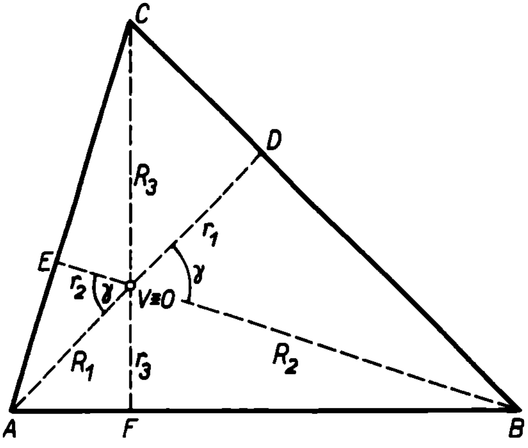
$$\triangle OBD \sim \triangle OAE \quad \text{(podle věty } \mathbf{uu}\text{)}$$

a odtud

$$|OB| : |OD| = |OA| : |OE|,$$

tj.

$$R_2 : r_1 = R_1 : r_2.$$



Obr. 13

Přihlédneme-li k rovnicím (2), dostáváme $r_1 = r_2$ a $R_1 = R_2$. Bod O je tedy středem kružnice vepsané i opsané, a trojúhelník ABC je nutně rovnostranný.

43. Danému trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa vnitřního úhlu BAC (CBA ; ACB) protne stranu BC (CA ; AB) v bodě D (E ; F) a kružnici k ještě v bodě D' (E' ; F'). Těžnice jdoucí vrcholem A (B ; C) protne stranu BC (CA ; AB) v bodě K (L ; M) a kružnici k ještě v bodě K' (L' ; M'). Pro stručnost označme

$$
\begin{aligned}
w'_a &= |AD'|, \quad w'_b = |BE'|, \quad w'_c = |CF'|; \\
t'_a &= |AK'|, \quad t'_b = |BL'|, \quad t'_c = |CM'|.
\end{aligned}
$$

Potom platí

$$\sqrt{w_a w'_a} + \sqrt{w_b w'_b} + \sqrt{w_c w'_c} \leqq 2s \leqq \sqrt{t_a t'_a} + \sqrt{t_b t'_b} + \sqrt{t_c t'_c}.$$

Znaménko rovnosti na obou stranách platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

Důkaz (obr. 14). Všimněme si, že

$$\triangle ABD \sim \triangle AD'C,$$

neboť

$$
\begin{aligned}
&|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle AD'C| = \beta \\
\text{a } &|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD'| = \frac{1}{2}\alpha.
\end{aligned}
$$

Jsou tedy podobné podle věty **uu**. Z této podobnosti dostáváme

$$|AB| : |AD| = |AD'| : |AC|, \quad \text{čili} \quad c : w_a = w'_a : b,$$

z čehož

$$w_a w'_a = bc$$

a cyklicky

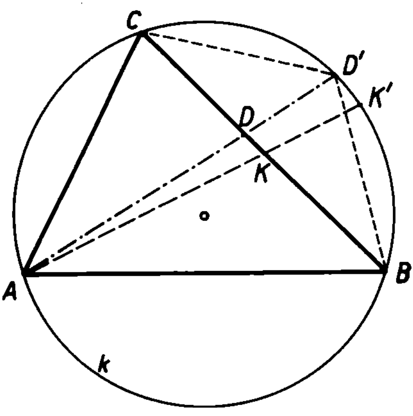
$$w_b w'_b = ca, \quad w_c w'_c = ab.$$

Tudíž

$$\sqrt{w_a w'_a} + \sqrt{w_b w'_b} + \sqrt{w_c w'_c} = \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab} \leqq$$

$$\leqq \frac{c+a}{2} + \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} = 2s.$$

(V posledním kroku úpravy jsme použili vztah A.2 třikrát.) Rovnost platí, právě když $a = b = c$.



Obr. 14

Tím jsme dokázali nerovnost stojící vlevo. Ještě je potřebí dokázat druhou nerovnost. Víme, že (vzorec **IV.a**)

$$|AK|^2 = t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Nyní vyjádříme mocnost bodu K ke kružnici k:

$$|KA| \cdot |KK'| = |KB| \cdot |KC| = \frac{1}{4} a^2.$$

Můžeme psát:

$$t_a t_a' = |AK| \cdot |AK'| = |AK| \cdot (|AK| + |KK'|) =$$
$$= |AK|^2 + |AK| \cdot |KK'| =$$
$$= \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) \geqq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2.$$

Poslední krok úpravy spočíval v použití vzorce **A.1.** Rovnost platí, právě když $b = c$. Máme tedy částečný výsledek

$$\sqrt{t_a t_a'} \geqq \frac{b+c}{2}.$$

Cyklickou záměnou dojdeme k dalším dvěma analogickým nerovnostem

$$t_b t_b' \geqq \frac{c+a}{2}, \quad t_c t_c' \geqq \frac{a+b}{2},$$

přičemž znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $a = c$ v první nerovnosti a pro $a = b$ v druhé nerovnosti. Sečtením všech tří nerovností docházíme k výsledku

$$\sqrt{t_a t_a'} + \sqrt{t_b t_b'} + \sqrt{t_c t_c'} \geqq 2s; \tag{b}$$

rovnost nastane právě tehdy, když $a = b = c$. Spojením nerovností (a) a (b) dostaneme žádaný výsledek.

44. Středem O kružnice, která je vepsána trojúhelníku ABC, jsou sestrojeny rovnoběžky se stranami trojúhelníku ABC. Rovnoběžka se stranou AB (BC; AC) protne strany AC, BC (BA, CA; CB, AB) po řadě ve vnitřních bodech K, L (P, Q; N, M). Dokažte, že

$$|KL|^2+|MN|^2+|PQ|^2 \geqq 8Rr.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz (obr. 15). Sestrojme ještě v trojúhelníku ABC výšku, která prochází vrcholem C. Její patu označme F a její průsečík s přímkou KL označme F_1. Je ihned patrno, že

$$|KL|:|AB|=|CF_1|:|CF|,$$

tj.

$$|KL|:c=(v_c-r):v_c.$$

Tudíž

$$|KL|=c(v_c-r):v_c=c\left(1-\frac{r}{v_c}\right)=c\left(1-\frac{rc}{2S}\right).$$

Přihlédneme-li ke vztahu **III**, dostaneme

$$|KL|=c\left(1-\frac{c}{2s}\right)=\frac{c(a+b)}{2s}\geqq\frac{c}{s}\sqrt{ab},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a=b$.

Podobně platí

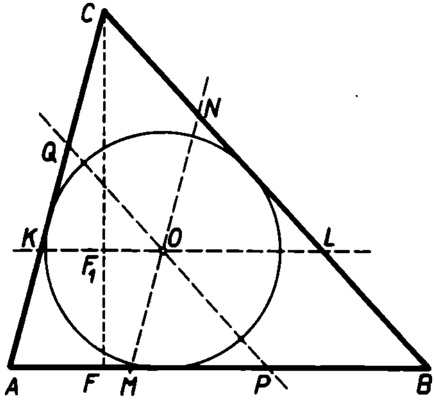
$$|MN|\geqq\frac{b}{s}\sqrt{ac} \quad \text{s rovností jedině, když} \quad a=c,$$

$$PQ\geqq\frac{a}{s}\sqrt{bc} \quad \text{s rovností jedině, když} \quad b=c.$$

Podle toho

$$|KL|^2+|MN|^2+|PQ|^2 \geqq (abc^2+ab^2c+a^2bc):s^2=$$
$$=abc(a+b+c):s^2=2abc:s=8RS:s=8Rr,$$

jak jsme měli dokázat. Dodejme, že rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$. (V posledních krocích důkazu jsme použili vzorce **II.a** a **III.**)



Obr. 15

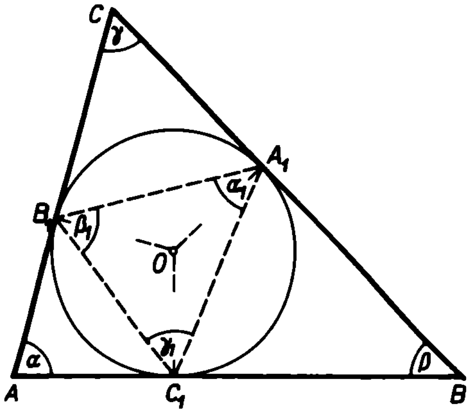
45. Do trojúhelníku je vepsána kružnice, která se stran BC, CA, AB dotýká po řadě v bodech A_1, B_1, C_1. Délky stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$ označme a_1, b_1, c_1 ($a_1=|B_1C_1|$ atd.). Dokažte, že

$$\frac{a^2}{a_1^2}+\frac{b^2}{b_1^2}+\frac{c^2}{c_1^2} \geqq 12. \qquad (1)$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz (obr. 16). Především vypočítáme velikosti úhlů trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

$$\alpha_1 = |\sphericalangle B_1A_1C_1| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle B_1OC_1| = \frac{1}{2}\,(\pi - \alpha).$$



Obr. 16

Analogicky

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\,(\pi - \beta), \qquad \gamma_1 = \frac{1}{2}\,(\pi - \gamma).$$

Na trojúhelník $A_1B_1C_1$ použijeme vzorce **II.b** a dostaneme

$$a_1 = 2r \sin\alpha_1 = 2r \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$b_1 = 2r\cos\frac{\beta}{2}, \quad c_1 = 2r\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Tyto hodnoty dosadíme do levé strany nerovnosti (1) a hned budeme upravovat s použitím **II.b**:

$$\frac{R^2}{r^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\frac{\beta}{2}}+\frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}\right)=$$

$$=\frac{4R^2}{r^2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Z Eulerovy nerovnosti (úloha 23) dostaneme

$$R^2 : r^2 \geqq 4$$

s rovností právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Z výsledku úlohy 13 plyne

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geqq\frac{3}{4},$$

kde rovnost platí, právě když $\alpha=\beta=\gamma$. Proto můžeme napsat:

$$\frac{4R^2}{r^2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\geqq 4\cdot 4\cdot\frac{3}{4}=12.$$

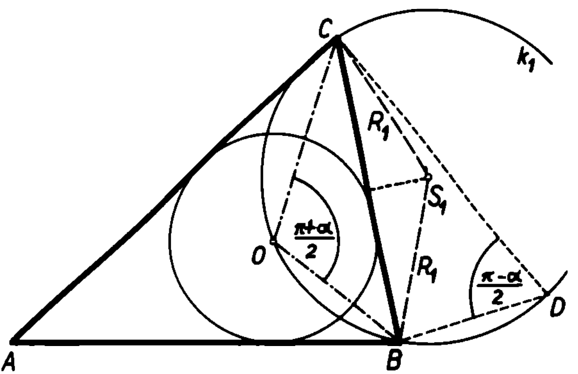
Rovnost nastane, právě když trojúhelník je rovnostranný.

46. Střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC označme O. Střed a poloměr kružnice k_1 (k_2; k_3) opsané trojúhelníku BCO (CAO; ABO) označme po řadě S_1, R_1 (S_2, R_2; S_3, R_3). Ukažte, že platí

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \geqq 3R^2.$$

Znaménko rovnosti má platnost právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz (obr. 17). V trojúhelníku BCO je $|\sphericalangle BOC| = = \pi - \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi + \alpha}{2}$. Proto velikost středového úhlu



Obr. 17

$|\sphericalangle BS_1C| = \pi + \alpha$. Jestliže D je libovolný bod kružnice k_1, který leží v polorovině opačné k polorovině BCO, ale nesplývá s body B, C, pak $|\sphericalangle BDC| = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. I platí

$$a:2R_1=\sin\frac{\pi-\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$a:2R=\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Odtud už snadno vypočítáme

$$R_1=2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Analogicky platí

$$R_2=2R\sin\frac{\beta}{2},\quad R_3=2R\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Tím docházíme k rovnosti

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2=4R^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Přihlédneme-li nyní k výsledku úlohy 13, v němž rovnost platí, právě když $\alpha=\beta=\gamma$, máme

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2\geqq 4\cdot\frac{3}{4}R^2=3R^2,$$

kde znaménko rovnosti platí ovšem právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$.

8. pomocná věta. *V trojúhelníku ABC proložme vrcholem C přímku p, která protíná stranu AB ve vnitřním bodě D. Označíme-li $|AD|=m$, $|BD|=n$, $|CD|=r$, pak platí tzv. Stewartova věta:*

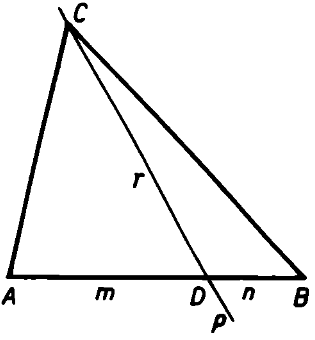
$$cr^2=a^2m+b^2n-cmn.$$

Důkaz (obr. 18). Označme $\omega = |\sphericalangle ADC|$. Potom z trojúhelníku ACD plyne $b^2 = m^2 + r^2 - 2rm \cos\omega$ a z trojúhelníku BCD plyne $a^2 = n^2 + r^2 + 2rn \cos\omega$. Z obou rovnic vyloučíme $\cos\omega$ a po kratší úpravě, při níž použijeme rovnosti $m + n = c$, dostaneme

$$cr^2 = a^2m + b^2n - cmn,$$

jak jsme měli dokázat.

Tuto větu použijeme při odvození další nerovnosti.



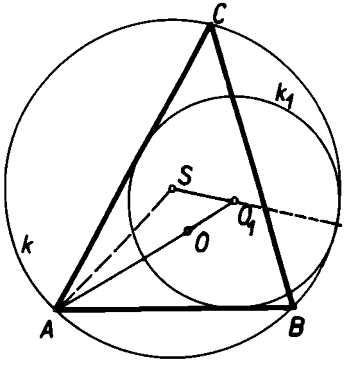
Obr. 18

47. Trojúhelníku je opsána kružnice k poloměru R. Dále je sestrojena kružnice $k_1 = (O_1; r_1)$ $[k_2 = (O_2; r_2)$; $k_3 = (O_3; r_3)]$, která má s kružnicí k vnitřní dotyk a zároveň se dotýká polopřímek AB, AC $[BA, BC; CA, CB]$. Pak platí

$$r_1 + r_2 + r_3 \geqq 4r,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

Důkaz (obr. 19). Označme po řadě O, O_1 střed kružnice vepsané danému trojúhelníku a střed kružnice k_1. Body O, O_1 leží na ose vnitřního úhlu CAB. Přitom $AO < AO_1$, a proto bod O je vnitřním bodem úsečky AO_1.



Obr. 19

A nyní si všimněme trojúhelníku ASO_1. Podle Stewartovy věty platí

$$|SO|^2 \cdot |AO_1| = |SO_1|^2 \cdot |AO| + |AS|^2 |OO_1| - \\ - |AO_1| \cdot |AO| \cdot |OO_1|. \qquad (1)$$

Avšak

$$|SO|^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{(Eulerova věta, viz úloha 23),}$$

$$|AO_1| = r_1 : \sin \frac{\alpha}{2}, \quad |SO_1| = R - r_1,$$

$$|AO| = r : \sin \frac{\alpha}{2}, \quad |AS| = R,$$

$$|OO_1| = |AO_1| - |AO| = (r_1 - r) : \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Přihlédneme-li k výsledku úlohy 17, dojdeme ke konci řešení naší úlohy. Poznamenejme ještě, že rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný, neboť za tohoto předpokladu platila i rovnost v úloze 17.