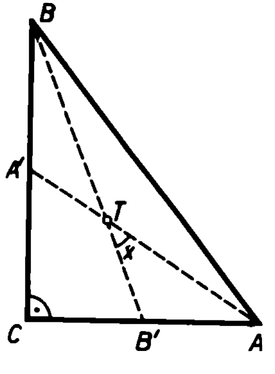
III. kapitola

NEROVNOSTI MEZI STRANAMI, ÚHLY A DALŠÍMI PRVKY TROJÚHELNÍKU EULEROVA NEROVNOST

20. V pravoúhlém trojúhelníku jsou sestrojeny těžnice AA', BB', jejichž koncové body půlí odvěsny. Dokažte, že

$$\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2.$$

Důkaz (obr. 3). Úhly $AA'B$ a $TA'B$ jsou tupé, a proto je strana TB v trojúhelníku $TA'B$ nejdelší. Z téhož důvodu je TA nejdelší stranou v trojúhelníku $TB'A$.



Obr. 3

I platí

a) $|BT|>|TA'|$, z čehož postupně dostaneme $\frac{2}{3}t_b>\frac{1}{3}t_a$, $t_a:t_b<2$. Tím je dokázána nerovnost vpravo.

b) $|AT|>|TB'|$ a z toho postupně $\frac{2}{3}t_a>\frac{1}{3}t_b$ a $t_a:t_b>\frac{1}{2}$, čímž je dokázána nerovnost vlevo. Spojením obou částečných výsledků obdržíme vztahy uvedené v textu úlohy.

21. V pravoúhlém trojúhelníku jsou sestrojeny těžnice AA', BB', jejichž koncové body A', B' půlí odvěsny. Dokažte, že pro ostrý úhel x, který tyto dvě těžnice svírají, platí

$$\cos x \geqq \frac{4}{5}\,.$$

Rovnost platí právě tehdy, kdy je trojúhelník rovnoramenný.

Důkaz (viz obr. 3). Použijeme vzorec **IV.a** a Pythagorovu větu:

$$|AA'|^2=t_a^2=\frac{1}{2}(c^2+b^2)-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}(c^2+3b^2).$$

Analogicky

$$t_b^2=\frac{1}{4}(c^2+3a^2).$$

Dále víme, že $|TA|=\frac{2}{3}t_a$, $|TB'|=\frac{1}{3}t_b$. A nyní na trojúhelník TAB' použijeme kosinovou větu:

$$|AB'|^2=|TA|^2+|TB'|^2-2\cdot|TA|\cdot|TB'|\cos x. \qquad (1)$$

Dosadíme-li do této rovnice z předešlých vzorců $\left(|AB'| = \frac{1}{2} b\right)$, dojdeme po úpravě k rovnici

$$\cos x = 2c^2 : \sqrt{4c^4 + 9a^2b^2}.$$

Avšak podle **A.1** platí

$$ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2} c^2,$$

s rovností právě tehdy, když $a = b$. Odtud

$$9a^2b^2 \leqq \frac{9}{4} c^4$$

a potom

$$\cos x \geqq \frac{2c^2}{\sqrt{4c^4 + \frac{9}{4} c^4}} = \frac{4}{5}.$$

Tím je vyslovená věta dokázána. Nutno ještě dodat, že rovnost platí právě tehdy, když $a = b$, tj., právě tehdy, když daný pravoúhlý trojúhelník je zároveň rovnoramenný.

Poznámka. Pro $\cos x_0 = \frac{4}{5} = 0{,}8$ je $x_0 \doteq 36°52'12''$, což je (nikoliv absolutně přesně) největší možná hodnota úhlu x.

22. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$6sr \leqq at_a + bt_b + ct_c \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

kde rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Jistě platí

$$v_a \leqq t_a, \quad v_b \leqq t_b, \quad v_c \leqq t_c,$$

kde ve všech nerovnostech zároveň platí rovnost právě tehdy, když $a = b = c$. Z napsaných tří nerovností plyne

$$6sr = 6S = av_a + bv_b + cv_c \leqq at_a + bt_b + ct_c,$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Tím jsme dokázali první nerovnost.

K důkazu druhé nerovnosti použijeme Cauchyho nerovnost **G**, v níž položíme

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c;$$
$$y_1 = t_a, \quad y_2 = t_b, \quad y_3 = t_c.$$

Tím dojdeme k nerovnosti

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když existuje takové kladné číslo k, že $t_a = ka$, $t_b = kb$, $t_c = kc$. Avšak podle vzorce **IV.b** je

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2), \tag{a}$$

a proto po dosazení máme

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Rovnost platí právě tehdy, když existuje $k > 0$, že

$$t_a = ka, \quad t_b = kb, \quad t_c = kc.$$

Dosazením těchto hodnot do (a) vyjde $k^2 = \frac{3}{4}$. Tudíž rovnost nastane právě jen při $t_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, $t_b = \frac{\sqrt{3}}{2} b$, $t_c = \frac{\sqrt{3}}{2} c$. Dosazením těchto hodnot do prvních dvou vzorců **IV.a** obdržíme po kratší úpravě

$$a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2), \quad b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2).$$

Obě tyto rovnosti odečteme a po kratší úpravě máme

$$a^2 - b^2 = 0, \quad \text{tedy} \quad a = b.$$

Analogicky dostaneme $b = c$ a odtud už vyplývá, že rovnost i v druhém případě platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Tím je také důkaz dokončen.

2. pomocná věta. *O úhlech α, β, γ trojúhelníku platí*

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Důkaz. Levou stranu předložené ekvivalence upravme takto:

$$\begin{aligned}
&(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin 2\gamma = \\
&= 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(2\alpha + 2\beta) = \\
&= -2 \sin(\alpha + \beta) [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] = \\
&= -2 \sin(\alpha + \beta)[-2 \sin\alpha \sin\beta] = \\
&= 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,
\end{aligned}$$

a to jsme měli dokázat.

3. pomocná věta. *O úhlech každého trojúhelníku platí*

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leqq \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

Důkaz. Vyjdeme z nerovnosti dokázané v úloze 8:

$$8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leqq 1, \qquad (1)$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Obě strany nerovnosti (1) vynásobíme kladným číslem

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

a při použití známých goniometrických vzorců dostaneme

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leqq \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Z 2. pomocné věty víme, že

$$4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma,$$

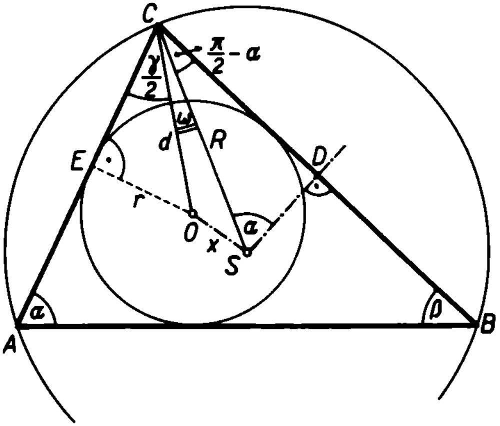
a ze vzorce **X.a**, že

$$4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma,$$

a tím jsme v podstatě s důkazem hotovi. Nutno ovšem dodat, že rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

23. V libovolném trojúhelníku vyjádřete vzdálenost středů vepsané a opsané kružnice pomocí délek jejich poloměrů.

Řešení. a) Předpokládejme nejprve, že jde o ostroúhlý trojúhelník a že $\alpha \geqq \beta$. Kdyby platilo $\beta > \alpha$, zaměnili bychom označení vrcholů A, B, a tím by se změnilo i označení úhlů (obr. 4a). Nejprve zjistíme velikost úhlu OCS. Z vlastnosti středu O kružnice vepsané plyne, že $|\sphericalangle ACO| = \frac{\gamma}{2}$. V pravoúhlém trojúhelníku SCD (D je střed strany BC) platí $|\sphericalangle CSD| = \alpha$ (je to polovina středového úhlu nad stranou BC), a proto $|\sphericalangle SCD| = \frac{\pi}{2} - \alpha$.



Obr. 4a

Tudíž

$$|\sphericalangle OCS| = \omega = \gamma - \frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

V trojúhelníku OCS je podle toho

$$d = |OC| = r : \sin\frac{\gamma}{2}, \quad |SC| = R,$$

$$|\sphericalangle OCS| = \omega = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

a můžeme použít kosinovou větu:

$$x^2 = |OS|^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos\omega =$$
$$= R^2 + d^2 - 2Rr \cos\omega : \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Poměr $\cos\omega : \sin\frac{\gamma}{2}$ vyjádříme pomocí velikostí stran daného trojúhelníku. Protože

$$\cos\omega : \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) : \sin\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) : \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Použijeme-li teď vzorce **VIII.a,b**, dojdeme po kratší úpravě k rovnosti

$$\cos\omega : \sin\frac{\gamma}{2} = (a + b) : c.$$

Podle toho

$$x^2 = R^2 + d^2 - \frac{2Rr(a + b)}{c}. \tag{1}$$

Avšak (znovu používáme vzorec **VIII.a**)

$$d^2 = r^2 : \sin^2\frac{\gamma}{2} = r^2ab : [(s - a)(s - b)] =$$
$$= r^2abc : [c(s - a)(s - b)].$$

Poněvadž (viz vzorec **II.a** a vzorec **III**)

$$abc = 4RS, \qquad r = S : s,$$

dostáváme

$$\begin{aligned} d^2 &= r \cdot 4RS \cdot r : [c(s-a)(s-b)] = \\ &= r \cdot 4RS \frac{S}{s} : [c(s-a)(s-b)] = \\ &= rS^2 \cdot 4R : [sc(s-a)(s-b)] = \\ &= 4Rr(s-a)(s-b)(s-c) : [c(s-a)(s-b)] = \\ &= 2Rr(a+b-c) : c. \end{aligned}$$

Dosadíme-li takto vypočítanou hodnotu do rovnosti (1), dojdeme po jednoduché úpravě k žádanému výsledku:

$$x^2 = R(R-2r).$$

To je známý Eulerův vzorec.

b) Jestliže trojúhelník je tupoúhlý (obr. 4b), pak

$$|\sphericalangle OCS| = \frac{\gamma}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \pi + \alpha\right) = \frac{\gamma}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$d = |OC| = r : \sin\frac{\gamma}{2}, \quad |SC| = R,$$

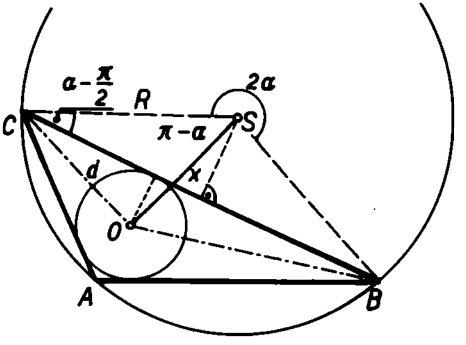
a dál postupujeme jako v případě a). Je přirozené, že i zde dospějeme k Eulerovu vzorci

$$x^2 = R(R-2r).$$

Velikost úsečky x může být rovna nule, a to jedině tehdy, když $O = S$, což nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Poněvadž vždy platí $x^2 \geqq 0$, docházíme tak k Eulerově nerovnosti

$$R \geqq 2r,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.



Obr. 4b

24. Ukažte, že v každém trojúhelníku vzdálenost d jeho ortocentra V od středu S jemu opsané kružnice je dána vzorcem

$$d^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \tag{1}$$

Důkaz. a) Je-li daný trojúhelník pravoúhlý s přeponou c, je

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad d = \frac{1}{2}c, \quad R = \frac{1}{2}c$$

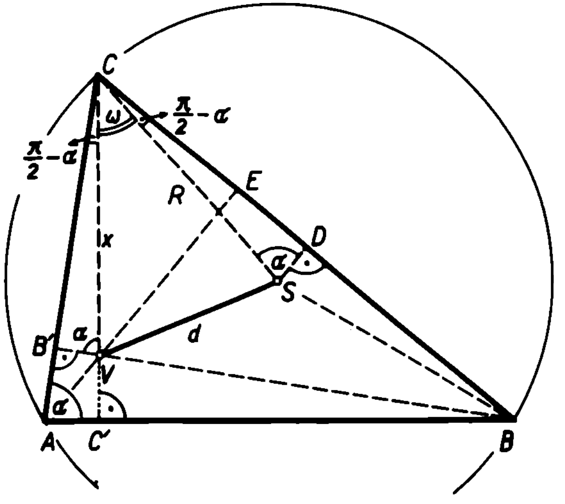
a uvedený vztah platí.

b) Je-li daný trojúhelník rovnostranný, je

$$a = b = c, \quad d = 0, \quad R = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$

a náš vzorec opět platí.

c) Předpokládejme, že jde o ostroúhlý trojúhelník ABC, nikoliv však o rovnostranný nebo rovnoramenný (obr. 5a). Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\alpha > \beta$. Kdyby totiž platilo $\beta > \alpha$, pak by stačilo změnit označení vrcholů A, B, a tím by se změnilo i označení úhlů.



Obr. 5a

Nejprve vypočítáme velikost úhlu VCS. Z pravoúhlého trojúhelníku ACC' dostaneme $|\sphericalangle ACC'| = \frac{\pi}{2} - \alpha$. V pravoúhlém trojúhelníku SCD je $|\sphericalangle CSD| = \alpha$, a proto $|\sphericalangle SCD| = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Tudíž

$$|\sphericalangle VCS| = \omega = \gamma - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \gamma + 2\alpha - \pi = \alpha - \beta.$$

Dále je nutné vypočítat velikost úsečky $|CV| = x$. Zde platí

$$x = |CE| : \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = |AC| \cos\gamma : \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= b \cos\gamma : \sin\beta = 2R \cos\gamma.$$

Teď jsme použili vzorec **II.b.** Po této přípravě můžeme přistoupit k vlastnímu výpočtu. Na trojúhelník CVS použijeme kosinovou větu, v níž budeme hned upravovat pravou stranu.

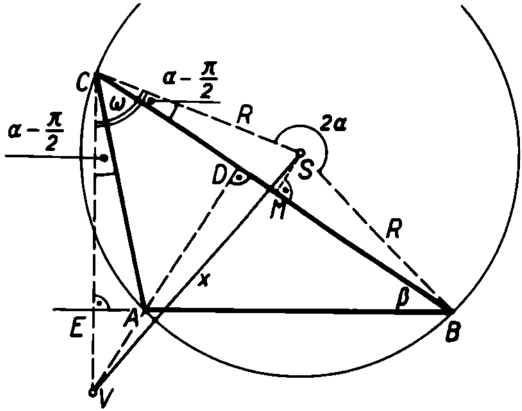
$$\begin{aligned}
d^2 &= R^2 + x^2 - 2Rx \cos\omega = \\
&= R^2 + 4R^2 \cos^2\gamma - 4R^2 \cos\gamma \cos\omega = \\
&= R^2 + 4R^2(1 - \sin^2\gamma) - 4R^2 \cos\gamma \cos\omega = \\
&= 5R^2 - 4R^2 [\sin^2\gamma + \cos\gamma \cos(\alpha - \beta)] = \\
&= 5R^2 - 4R^2 [\sin^2\gamma - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)] = \\
&= 5R^2 - 4R^2 [\sin^2\gamma - \cos^2\alpha \cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta] = \\
&= 5R^2 - 4R^2 [\sin^2\gamma - 1 + \sin^2\alpha + \sin^2\beta] = \\
&= 9R^2 - 4R^2 [\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma].
\end{aligned}$$

Použijeme-li ještě vzorec **II.b**, dojdeme k žádanému výsledku:

$$d^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

d) Všimněme si teď případu, kdy trojúhelník ABC je tupoúhlý (nikoliv rovnoramenný), a body S, V leží tedy vně trojúhelníku (obr. 5b). Z obrázku je patrno, že nekonvexní úhel BSC má velikost 2α, z čehož plyne, že

$$|\sphericalangle CSM| = \pi - \alpha, \quad \text{což znamená, že} \quad |\sphericalangle BCS| = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$



Obr. 5b

Dále

$$|\sphericalangle VCB| = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

a tudíž

$$|\sphericalangle VCS| = \omega = 2\alpha - \pi + \gamma = \alpha - \beta.$$

Ještě potřebujeme velikost úsečky CD.

$$|CD| = |CV| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = |CV| \sin\beta.$$

Avšak $|CD| = b \cos\gamma$, a tak z obou rovností a zároveň s použitím vzorce **II.b**:

$$|CV| = b \cos\gamma : \sin\beta = 2R \cos\gamma.$$

Další postup je týž jako v odst. c). Rozumí se, že dojdeme k témuž výsledku:

$$d^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

e) Stále jsme se vyhýbali rovnoramennému trojúhelníku. Jestliže trojúhelník je rovnoramenný s osou souměrnosti, která prochází vrcholem C, pak body C, S, V leží v přímce, leží v ose souměrnosti trojúhelníku, a netvoří trojúhelník. Potom velikosti úsečky SV se dá vypočítat z trojúhelníku ASV. To přenechávám čtenářům, jen je potřebí rozlišit případ, kdy trojúhelník je ostroúhlý a kdy tupoúhlý.

Poznámky. 1. Poněvadž $d^2 \geqq 0$, kde rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný (neboť jenom v něm splyne ortocentrum se středem opsané kružnice), můžeme psát

$$9R^2 \geqq a^2 + b^2 + c^2,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

2. Velikost úsečky VS jsme mohli vypočítat i pomocí R a α, β, γ. Začátek je stejný jako prve, ale pak je postup poněkud jiný:

$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 + x^2 - 2Rx \cos\omega = \\ &= R^2 + 4R^2 \cos^2\gamma - 4R^2 \cos\gamma \cos\omega = \\ &= R^2 + 4R^2 \cos\gamma\, [\cos\gamma - \cos(\alpha - \beta)] = \end{aligned}$$

$$= R^2 + 4R^2 \cos\gamma[-\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)] =$$
$$= R^2 - 8R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma. \qquad (2)$$

To už je výsledek. Porovnáme-li oba vzorce (1) a (2) pro d^2, dojdeme k zajímavé identitě platící o úhlech trojúhelníku:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma).$$

(To jsme v prvním vzorci položili $a = 2R \sin\alpha$, $b = 2R \sin\beta$, $c = 2R \sin\gamma$.)

A ještě jedné věci si všimněme. Poněvadž $d^2 \geqq 0$, kde rovnost platí, právě když je trojúhelník rovnostranný, dostáváme

$$R^2 - 8R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \geqq 0,$$

což je ekvivalentní s nerovností

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqq \frac{1}{8},$$

kde znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Tak jsme jinou cestou dospěli k výsledku úlohy 10.

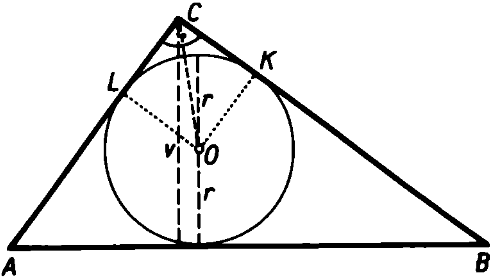
25. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme v velikost výšky kolmé na přeponu. Pak platí

$$0{,}4 < \frac{r}{v} < 0{,}5.$$

Dokažte.

Důkaz (obr. 6). Jestliže kružnice vepsaná pravoúhlému trojúhelníku ABC se odvěsen BC, AC dotýká po řadě v bodech K, L a jestliže střed této kružnice označíme O, pak čtyřúhelník $OKCL$ je čtverec. V něm $|OC| = r\sqrt{2}$. I platí

$$v \leqq r + |OC| = r(1+\sqrt{2}).$$



Obr. 6

Rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnoramenný ($|AC| = |BC|$). Z toho máme první nerovnost

$$\frac{r}{v} \geqq \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \doteq 0{,}414 > 0{,}4. \qquad (1)$$

Nyní ukážeme, že výška trojúhelníku (nejen pravoúhlého) je vždy větší než průměr vepsané kružnice. Východiskem bude trojúhelníková nerovnost:

$$a + b > c,$$
$$a + b + c > 2c,$$
$$2s > 2c,$$
$$\frac{2}{c} > \frac{2}{s},$$

$$\frac{2S}{c} > \frac{2S}{s}.$$

Na levou stranu nerovnosti použijeme vztah **I** a na pravou vztah **III**. Dostaneme tak

$$v_c > 2r \quad \text{čili} \quad r : v < 0{,}5,$$

čímž je dokázána i druhá nerovnost.

26. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$v_a + v_b + v_c \geqq 9r,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný.

Důkaz. Podle vzorce **VII** je

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{r}. \tag{1}$$

Podle **C.2** platí

$$(v_a + v_b + v_c)\left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}\right) \geqq 9. \tag{2}$$

Rovnost tu platí právě tehdy, když $v_a = v_b = v_c$, což nastane právě tehdy, je-li trojúhelník rovnostranný. O tom se přesvědčíme následujícím způsobem: Poněvadž

$$v_a = \frac{2S}{a}, \quad v_b = \frac{2S}{b}, \quad v_c = \frac{2S}{c},$$

plyne odtud, že rovnost $v_a = v_b = v_c$ je ekvivalentní s rovností $a = b = c$.

Spojením vztahů (1), (2) docházíme k výsledku

$$v_a + v_b + v_c \geqq 9r.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

27. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$\frac{a^2}{v_b^2 + v_c^2} + \frac{b^2}{v_c^2 + v_a^2} + \frac{c^2}{v_a^2 + v_b^2} \geqq 2.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Pro stručnost označme levou stranu dané nerovnosti písmenem M. A nyní zaveďme

$$N = \frac{v_b^2 + v_c^2}{a^2} + \frac{v_c^2 + v_a^2}{b^2} + \frac{v_a^2 + v_b^2}{c^2}.$$

Jeho souvislost s výrazem M je evidentní. Užitím vzorců I upravíme výraz N a po kratší úpravě dostaneme

$$N = 8S^2(a^2 + b^2 + c^2) : (a^2b^2c^2). \tag{1}$$

Avšak v poznámce 1 úlohy 24 jsme ukázali, že platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqq 9R^2, \tag{2}$$

s rovností právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Ze vztahů (1) a (2) dostaneme

$$N \leqq 72R^2S^2 : (a^2b^2c^2).$$

Nyní použijeme vzorec **II.a**:

$$RS=\frac{1}{4}abc, \quad \text{tj.} \quad 72R^2S^2=\frac{9}{2}a^2b^2c^2,$$

a tudíž

$$N\leqq\frac{9}{2}; \tag{3}$$

přitom rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Z nerovnosti (3) dostaneme nerovnost s ní ekvivalentní

$$MN\leqq\frac{9}{2}M.$$

Jestliže si uvědomíme, co představují výrazy M, N, poznáme, že se tu nabízí aplikovat nerovnost **C.2.** Podle ní je totiž $MN\geqq 9$, kde rovnost platí právě tehdy, když jednotliví sčítanci mnohočlenu M (a tedy i všichni sčítanci mnohočlenu N) si jsou rovni. To však vede na rovnostranný trojúhelník, jak vyplývá z následujícího výpočtu:

$$\frac{a^2}{v_b^2+v_c^2}=\frac{b^2}{v_c^2+v_a^2},$$

zbavíme se zlomků, a poněvadž $av_a=bv_b=2S$, dojdeme k rovnici

$$a^2v_c^2=b^2v_c^2,$$

a z ní už plyne $a=b$. Podobně bychom dostali $b=c$, a tím je tvrzení dokázáno.

Na základě dosavadních výsledků můžeme napsat následující řetěz nerovností:

$$9 \leqq MN \leqq \frac{9}{2} M,$$

takže

$$M \geqq 2,$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Při známém významu M máme předloženou nerovnost dokázanou.

28. O prvcích v trojúhelníku platí

$$9r \leqq t_a + t_b + t_c \leqq \frac{9}{2} R;$$

rovnost na obou stranách platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

Důkaz. Je okamžitě patrno, že

$$t_a \geqq v_a, \quad t_b \geqq v_b, \quad t_c \geqq v_c,$$

přičemž rovnosti ve všech třech vztazích platí zároveň právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Sečtením všech tří vztahů přicházíme k nerovnosti

$$t_a + t_b + t_c \geqq v_a + v_b + v_c \geqq 9r,$$

jak vyplývá z úlohy 26. Tím je dokázána první nerovnost. Důkaz druhé nerovnosti začneme nám známým vztahem (viz poznámka 1 úlohy 24)

$$9R^2 \geqq a^2 + b^2 + c^2, \tag{1}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Podle vzorce **IV.b** je

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}\left(t_a^2+t_b^2+t_c^2\right). \tag{2}$$

Vztahy (1), (2) nás přivádějí k nerovnosti

$$\frac{27}{4}R^2 \geqq t_a^2+t_b^2+t_c^2,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Nyní použijeme nerovnost **E**:

$$t_a+t_b+t_c \leqq \sqrt{3\left(t_a^2+t_b^2+t_c^2\right)}.$$

Použijeme-li znovu vzorec **IV.b**, dojdeme k žádanému vztahu:

$$t_a+t_b+t_c \leqq \frac{9}{2}R,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když je daný trojúhelník rovnostranný, neboť za této podmínky platila rovnost v předcházející nerovnosti.

29. Dokažte, že v rovnoramenném trojúhelníku ABC ($AC=BC$) platí

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{c}{w_a}<\frac{3}{2}.$$

Důkaz (obr. 7). Především si uvědomme, že o vnitřním úhlu α při základně platí

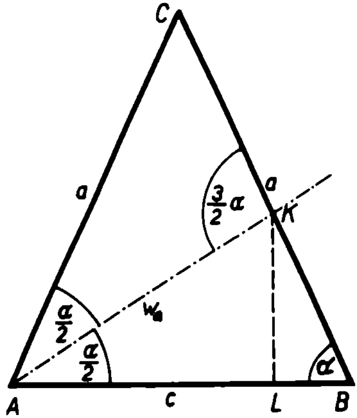
$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \quad \text{a tedy též} \quad 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$$

a potom

$$1 > \cos\frac{\alpha}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Osa úhlu CAB protne stranu BC v bodě K. Patu kolmice spuštěné z bodu K na základnu AB označme L. Pro stručnost zaveďme ještě toto označení:

$$|AK| = w_a, \quad |AL| = c'.$$



Obr. 7

Ihned je patrno, že

$$c : w_a > c' : w_a = \cos\frac{\alpha}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Tím jsme dokázali levou část vztahu. Abychom dokázali i druhou nerovnost, použijeme sinovou větu na trojúhelník ABK:

$$c : w_a = \sin\frac{3\alpha}{2} : \sin\alpha = \left(4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) : \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right). \quad (1)$$

Napišme nyní dvě nerovnosti, které s ohledem na to, že $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, jsou jistě pravdivé:

$$4\cos\frac{\alpha}{2} + 1 > 0, \quad 1 - \cos\frac{\alpha}{2} > 0.$$

Součin levých stran je kladné číslo:

$$1 + 3\cos\frac{\alpha}{2} - 4\cos^2\frac{\alpha}{2} > 0.$$

Tuto nerovnost nahradíme nerovností ekvivalentní

$$3\cos\frac{\alpha}{2} > 4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

a dále

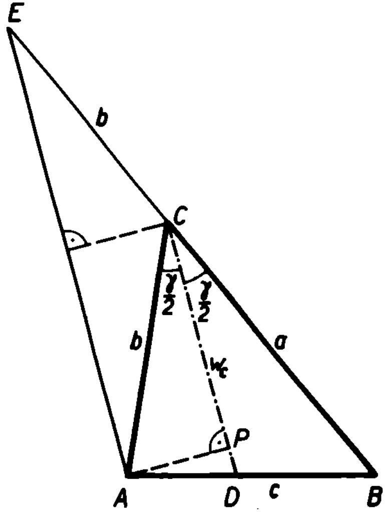
$$\frac{3}{2} > \frac{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = c : w_a,$$

jak plyne z (1). Tím jsme s důkazem hotovi.

4. pomocná věta. *Délka osy vnitřního úhlu ACB v trojúhelníku ABC je dána vzorcem*

$$w_c = 2ab\cos\frac{\gamma}{2} : (a + b).$$

Důkaz (obr. 8). V trojúhelníku ABC je přímka CD osou vnitřního úhlu ACB. Její délka je $w_c = |CD|$. Vrcholem A veďme přímku rovnoběžnou s CD a její průsečík s přímkou BC označme E. Kromě toho z vrcholu A spusťme kolmici na CD a její patu označme P. Pak ještě



Obr. 8

spusťme z vrcholu C kolmici na přímku AE. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle CDB \sim \triangle EAB$ plyne

$$|CD| : |CB| = |EA| : |EB|,$$

jinak psáno

$$w_c : a = |EA| : (a + b).$$

Avšak

$$|EA| = 2|CP| = 2|AC| \cos\frac{\gamma}{2} = 2b \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do předešlé úměry, dostaneme

$$w_c : a = 2b \cos\frac{\gamma}{2} : (a + b),$$

což jsme měli dokázat.

Poznámka. Z dosaženého výsledku můžeme odvodit větu: Nutná a postačující podmínka pro to, aby velikost úhlu ACB byla $\frac{2}{3}\pi$, je

$$\frac{1}{w_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

30. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$\frac{a^2 + b^2}{w_c^2} + \frac{b^2 + c^2}{w_a^2} + \frac{c^2 + a^2}{w_b^2} \geqq 8,$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Ve 4. pomocné větě jsme ukázali, že

$$w_c = 2ab \cos\frac{\gamma}{2} : (a + b),$$

z čehož dostaneme

$$\cos\frac{\gamma}{2} = w_c(a + b) : (2ab).$$

Tento vzorec budeme upravovat a přitom použijeme nerovnosti **C.1**:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq\frac{4}{a+b},$$

v níž rovnost platí, právě když $a=b$. Píšeme tedy

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\,w_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq w_c\,\frac{2}{a+b},$$

takže

$$\cos^{-2}\frac{\gamma}{2}\leqq\frac{(a+b)^2}{4w_c^2}\leqq\frac{a^2+b^2}{2w_c^2},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a=b$. Analogické nerovnosti platí i pro $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$. Nyní už můžeme psát (viz úlohu 17)

$$4\leqq\cos^{-2}\frac{\alpha}{2}+\cos^{-2}\frac{\beta}{2}+\cos^{-2}\frac{\gamma}{2}\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2}{w_a^2}+\frac{c^2+a^2}{w_b^2}+\frac{a^2+b^2}{w_c^2}\right),$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

31. Dokažte, že v každém trojúhelníku platí

$$(a+b+c)\sqrt{3}\geqq 2(w_a+w_b+w_c),$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. Vzorec pro w_c ze 4. pomocné věty upravíme pro náš účel. Při tom použijeme vzorec **VIII.b**:

$$w_c = 2ab \cos\frac{\gamma}{2} : (a+b) = 2ab\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} : (a+b) =$$
$$= \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

Podle **A.2**

$$w_c \leqq \frac{2}{2\sqrt{ab}}\sqrt{abs(s-c)} = \sqrt{s(s-c)},$$

kde rovnost nastane jen pro $a = b$. Odtud opět podle **A.2**

$$\frac{w_c}{\sqrt{3}} \leqq \sqrt{\frac{1}{3}s(s-c)} \leqq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}s + (s-c)\right] = \frac{1}{6}(2a+2b-c)$$

s rovností ve druhé nerovnosti právě tehdy, když $\frac{1}{3}s = s-c$, tj. právě tehdy, jestliže $2c = a+b$. Rovnost v obou nerovnostech současně tudíž nastane právě tehdy, když $a = b = c$.

Z toho a ze vztahů získaných cyklickou záměnou vychází

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(w_a + w_b + w_c) \leqq \frac{1}{6}(3a+3b+3c) = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Odtud už výsledek

$$(a+b+c)\sqrt{3} \geqq 2(w_a + w_b + w_c),$$

kde rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Tím je také důkaz proveden.

32. O délkách os vnitřních úhlů trojúhelníka platí

$$3S\sqrt{3} \leqq w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \leqq s^2,$$

kde znaménko rovnosti v obou nerovnostech má platnost právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Ve 4. pomocné větě jsme odvodili vzorec

$$w_c = 2ab \cos\frac{\gamma}{2} : (a+b),$$

odtud

$$w_c^2 = 4a^2b^2 \cos^2\frac{\gamma}{2} : (a+b)^2.$$

Použijeme-li nyní vzorec **VIII.b**, dostaneme rovnost s touto ekvivalentní a tu hned upravujeme:

$$w_c^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}\,\frac{s(s-c)}{ab} = \frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c) =$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}\left[(a+b)^2 - c^2\right] = ab - \frac{ab}{(a+b)^2}c^2.$$

Analogicky

$$w_a^2 = bc - \frac{bc}{(b+c)^2}a^2, \quad w_b^2 = ac - \frac{ac}{(a+c)^2}b^2.$$

Avšak podle **A.1** platí

$$2ab \leqq a^2 + b^2.$$

Odtud plyne, že

$$4ab \leqq (a+b)^2 \quad \text{a posléze} \quad \frac{ab}{(a+b)^2} \leqq \frac{1}{4},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a = b$. Analogicky máme

$$\frac{bc}{(b+c)^2} \leqq \frac{1}{4}, \quad \text{rovnost právě tehdy, když } b = c,$$

$$\frac{ca}{(c+a)^2} \leqq \frac{1}{4}, \quad \text{rovnost právě tehdy, když } c = a.$$

Podle toho tedy platí

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \geqq ab + bc + ca - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2), \tag{1}$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$. Z Finslerovy—Hadwigerovy nerovnosti (úloha 7) po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \leqq \frac{1}{2}(ab + bc + ca) - S\sqrt{3}. \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) dají

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \geqq \frac{1}{2}(ab + bc + ca) + S\sqrt{3}. \tag{3}$$

Tento vztah je nutné ještě upravit. Ze vztahu (2) vyplývá

$$2(ab + bc + ca) \geqq a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}.$$

Avšak podle **D** platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca.$$

Rovnost zde platí právě tehdy, když $a = b = c$. Obě posledně napsané nerovnosti vedou k novému vztahu

$$ab + bc + ca \geqq 4S\sqrt{3}.$$

Spojením této nerovnosti s nerovností (3) máme posléze

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \geqq 3S\sqrt{3},$$

čímž jsme s důkazem hotovi. V nerovnosti (1), stejně jako v (2) a v nerovnosti **D**, platí rovnost právě tehdy, když $a = b = c$. Tudíž i výsledná nerovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Zbývá dokázat druhou nerovnost. V úloze 31 jsme odvodili vztah

$$w_c \leqq \sqrt{s(s-c)},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a = b$. Cyklickou záměnou obdržíme vztahy platící pro délky druhých dvou os:

$$w_a \leqq \sqrt{s(s-a)} \quad \text{s rovností, právě když} \quad b = c,$$

$$w_b \leqq \sqrt{s(s-b)} \quad \text{s rovností, právě když} \quad a = c.$$

Odtud už vyplývá

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \leqq s(s - a + s - b + s - c) = s^2.$$

Dodejme, že rovnost nastane právě tehdy, když $a = b = c$, tj. pro rovnostranný trojúhelník. Tím jsme s důkazem hotovi.

33. Dokažte, že o prvcích každého trojúhelníku platí

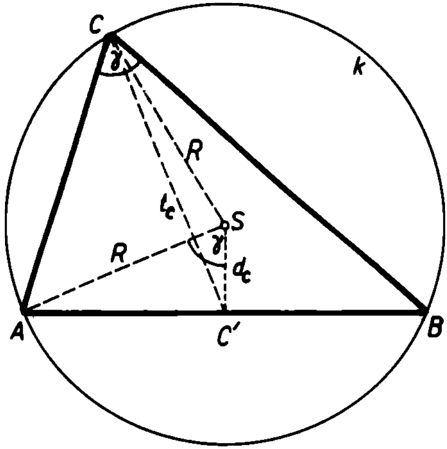
$$at_a + bt_b + ct_c \leqq 3Rs,$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. V obr. 9a, b jsou narýsovány trojúhelníky a jim je opsána kružnice $k = (S; R)$. Označme C' střed strany AB a d_c vzdálenost středu S od strany AB.

a) Předpokládejme nejprve, že trojúhelník je ostroúhlý (obr. 9a). Pokud body C, S, C' leží na jedné přímce, pak $AC = BC$ a trojúhelník je rovnoramenný. Platí potom

$$t_c = R + d_c.$$



Obr. 9a

Jestliže body C, S, C' jsou vrcholy trojúhelníku, je zřejmě

$$t_c < R + d_c.$$

V každém případě tedy je

$$t_c \leqq R + d_c,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník ABC je rovnoramenný ($AC = BC$). Cyklickou záměnou dojdeme k analogickým relacím:

$$t_a \leqq R + d_a,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $AB = AC$,

$$t_b \leqq R + d_b,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $BC = BA$. Poslední tři nerovnosti znásobme postupně čísly c, a, b a sečtěme:

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq R(a + b + c) + ad_a + bd_b + cd_c.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $AC = BA = CB$, tj. právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Z pravoúhlého trojúhelníku SAC' dostaneme (viz vzorce **II.b**)

$$c = 2R \sin\gamma, \quad d_c = R \cos\gamma,$$

a tedy $cd_c = R^2 \sin 2\gamma$. Cyklickou záměnou dostaneme obdobná vyjádření součinů ad_a, bd_b. Po dosazení nabude naše nerovnost tvaru

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq 2Rs + R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

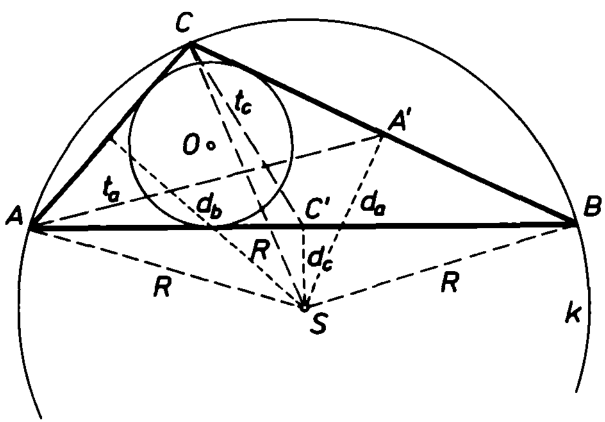
Podle 3. pomocné věty se dá tato nerovnost upravit na tvar

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq 2Rs + R^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 3Rs,$$

kde znaménko rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

b) Předpokládejme nyní, že trojúhelník ABC je tupoúhlý, a nechť např. $\gamma > \frac{\pi}{2}$ (obr. 9b). Podobně jako v případě ostroúhlého trojúhelníka, platí i zde

$$t_a \leqq R + d_a, \quad t_b \leqq R + d_b.$$



Obr. 9b

Protože však nyní $\cos\gamma < 0$, je odhad $t_c \leqq R + d_c$ příliš hrubý. My však vystačíme s nerovností

$$t_c < R$$

(v trojúhelníku $SC'C$ proti většímu úhlu leží větší strana).

Máme tedy nerovnost

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq 2Rs + ad_a + bd_b = 2Rs + 2rs + cd_c,$$

neboť

$$ad_a = 2S_{BSC} \quad \text{a} \quad bd_b = 2S_{ASC},$$

takže podle **III** je

$$ad_a + bd_b = 2S_{ABC} + 2S_{ASB} = 2S + cd_c = 2rs + cd_c.$$

Nyní zřejmě platí, že $d_c \leqq |SO| - r$, takže podle úlohy 23 a nerovnosti **A.2** máme

$$d_c \leqq \sqrt{R(R-2r)} - r \leqq \frac{1}{2}(R + R - 2r) - r = R - 2r.$$

Protože podle trojúhelníkové nerovnosti je zároveň $c \leqq s$, máme tedy nerovnost

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq 2Rs + 2rs + cd_c \leqq$$
$$\leqq 2Rs + 2rs + s(R - 2r) = 3Rs.$$

Vyslovená poučka platí tedy i pro trojúhelník, který je tupoúhlý. Že platí i pro pravoúhlý, dokáže si čtenář sám.

34. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$\frac{r_a - r}{a} + \frac{r_b - r}{b} + \frac{r_c - r}{c} \geqq \sqrt{3},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Podle vzorců **III** platí

$$r_a - r = \frac{S}{s-a} - \frac{S}{s} = \frac{aS}{s(s-a)},$$

a tudíž

$$\frac{r_a - r}{a} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

V posledním kroku jsme použili vzorec **VIII.c.** Cyklickou záměnou odvodíme podobné vzorce:

$$\frac{r_b - r}{b} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad \frac{r_c - r}{c} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Z úlohy 16 víme, že

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geqq \sqrt{3},$$

s rovností právě jen pro rovnostranný trojúhelník. Tuto nerovnost lze nahradit nerovností ekvivalentní

$$\frac{r_a - r}{a} + \frac{r_b - r}{b} + \frac{r_c - r}{c} \geqq \sqrt{3},$$

v níž rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Tím jsme s důkazem hotovi.

35. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

a) $r(r_a + r_b + r_c) \geqq S\sqrt{3}$;

b) $r(4R + r) \geqq S\sqrt{3}$.

Rovnost v obou případech platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. a) V úloze 7 jsme dokázali, že

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2, \tag{1}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Po kratší úpravě dostaneme nerovnost ekvivalentní:

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geqq 4S\sqrt{3}. \tag{2}$$

A nyní upravujme výraz

$$V = 4r(r_a + r_b + r_c)$$

s použitím vzorců **III** a **I.a**:

$$V = \frac{4S}{s}\left(\frac{S}{s-a} + \frac{S}{s-b} + \frac{S}{s-c}\right) =$$

$$= \frac{4S^2}{s} \cdot \frac{3s^2 - 2s(a+b+c) + (ab+bc+ca)}{(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \frac{4S^2(-s^2 + ab + bc + ca)}{S^2} =$$

$$= 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Výsledek našich úprav je levá strana nerovnosti (2), což znamená, že platí

$$r(r_a + r_b + r_c) \geqq S\sqrt{3},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník, neboť tento vztah byl odvozen ze vztahu (1), v němž rovnost platí právě za těchto podmínek.

b) Důkaz spočívá v úpravě levé strany právě dokázané nerovnosti. Použijeme k tomu opět vzorce **I.a, II.a, III**:

$$r_a + r_b + r_c = \frac{S}{s-a} + \frac{S}{s-b} + \frac{S}{s-c} =$$

$$= \frac{S[3s^2 - 2s(a+b+c) + ab + bc + ca]}{(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \frac{Ss(ab + bc + ca - s^2)}{S^2} =$$

$$= \frac{s(ab + bc + ca) - s^3}{S} = \frac{s(ab + bc + ca) + s^3 - 2s^3}{S} =$$

$$= \frac{s^3 - s^2(a+b+c) + s(ab+bc+ca) - abc + abc}{S} =$$

$$= \frac{abc}{S} + \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sS} = 4R + \frac{S}{s} = 4R + r.$$

Podle toho

$$r(4R + r) \geqq S\sqrt{3},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$, neboť získaná nerovnost je pouze modifikací nerovnosti odst. a).

V některých sbírkách matematických vzorců jsou uváděny i tyto zajímavé vzorce:

5. pomocná věta.

$$r = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \tag{1}$$

$$r_a = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}, \tag{2}$$

vzorce pro r_b, r_c získáme z tohoto vzorce cyklickou záměnou,

$$s = 4R \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}, \tag{3}$$

$$s - a = 4R \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \tag{4}$$

vzorce pro $s-b$, $s-c$ získáme opět cyklickou záměnou.

Dokážeme pouze vzorec (1), ostatní se dokazují obdobně. Podle vzorců **I—X** je

$$r = \frac{S}{s} = ab \sin\gamma : (a + b + c) =$$

$$= 4R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma : [2R (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)] =$$

$$= 16R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} :$$

$$: \left[4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}\right],$$

čímž je důkaz proveden.

36. O prvcích trojúhelníku platí

$$\frac{v_b+v_c}{r_a+v_a}\cdot\frac{v_c+v_a}{r_b+v_b}\cdot\frac{v_a+v_b}{r_c+v_c}\leqq 1,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. S použitím vzorců **II, II.b** a známých goniometrických vzorců upravíme nejprve čitatele prvního zlomku:

$$\begin{gathered}v_b=c\sin\alpha=2R\sin\gamma\sin\alpha,\\ v_c=2R\sin\alpha\sin\beta,\\ v_b+v_c=2R(\sin\beta+\sin\gamma)\sin\alpha=\\ =2R\sin\alpha\cdot 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\\ =4R\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\\ =4R\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.\end{gathered}$$

A nyní jmenovatele (používáme 5. pomocnou větu):

$$r_a=4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$v_a=2R\sin\beta\sin\gamma=8R\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$r_a+v_a=4R\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=4R\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]=$$

$$= 4R \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= 4R \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= 4R \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Po kratší úpravě docházíme k částečnému výsledku

$$\frac{v_b + v_c}{r_a + v_a} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Hodnoty dalších dvou obdobných zlomků dostaneme cyklickou záměnou. Součinem všech tří rovností obdržíme na pravé straně po krátké úpravě součin

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

který, jak víme z úlohy 8, je menší než 1. Dodejme, že rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

37. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b) \leqq 27R^3,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Opět použijeme vzorce z 5. pomocné věty.

$$r_b + r_c = 4R\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= 4R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = 4R\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme obdobné vyjádření pro $(r_c + r_a)$ a pro $(r_a + r_b)$. Můžeme proto psát

$$(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b) = 64R^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Použijeme-li však nerovnosti

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3}{8}\sqrt{3},$$

která se vyskytuje v řešení úlohy 14 a kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$, dostaneme

$$(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b) \leqq 27R^3,$$

kde rovnost platí právě jen pro $\alpha = \beta = \gamma$. Tím jsme s důkazem hotovi.

38. V trojúhelníku platí

$$\frac{w_a}{v_a + 2r_a} + \frac{w_b}{v_b + 2r_b} + \frac{w_c}{v_c + 2r_c} \geqq 1;$$

rovnost nastane právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

Důkaz. Podle 4. pomocné věty platí

$$w_a = 2bc \cos\frac{\alpha}{2} : (b+c).$$

Tento vzorec ještě s použitím **II.b** upravíme pro naše účely. Pišme tedy

$$w_a = 8R^2 \sin\beta \sin\gamma \cos\frac{\alpha}{2} : [2R\,(\sin\beta + \sin\gamma)] =$$

$$= 8R \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} : \left[\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right] \geqq$$

$$\geqq 8R \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \qquad (1)$$

Použili jsme nerovnost

$$0 < \cos\frac{\beta-\gamma}{2} \leqq 1$$

s rovností právě tehdy, když $\beta = \gamma$, tj. pro rovnoramenný trojúhelník, a dále jsme použili rovnost

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ještě upravíme jmenovatele:

$$v_a = c \sin\beta = 2R \sin\beta \sin\gamma = 8R \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$2r_a = 8R \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Protože

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

je

$$v_a+2r_a=8R\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left[\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right]=$$

$$=8R\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

Podle (1) a (2) můžeme tedy psát

$$\frac{w_a}{v_a+2r_a}\geqq\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}:\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

kde rovnost platí, právě když $\beta=\gamma$.

Po této přípravě je už vidět, že pro součet uvedený v textu úlohy je

$$\frac{w_a}{v_a+2r_a}+\frac{w_b}{v_b+2r_b}+\frac{w_c}{v_c+2r_c}\geqq$$

$$\geqq\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=1.$$

To jsme teď použili 1. pomocnou větu. Musíme dodat, že rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$, tj. pro rovnostranný trojúhelník. Tím jsme také důkaz tvrzení skončili.

6. pomocná věta. *O prvcích trojúhelníku platí*

$$\frac{r_a}{v_a+2r_a}+\frac{r_b}{v_b+2r_b}+\frac{r_c}{v_c+2r_c}=1.$$

Důkaz. Pro stručnost označíme levou stranu identity písmenem L. Podle 5. pomocné věty je

$$r_a = 4R \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

a podle (2) z úlohy 38

$$v_a + 2r_a = 8R\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

takže

$$\frac{r_a}{v_a + 2r_a} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} : \left[2\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) : \left(2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) : \left(2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right).$$

A už můžeme psát

$$\frac{r_a}{v_a + 2r_a} + \frac{r_b}{v_b + 2r_b} + \frac{r_c}{v_c + 2r_c} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Přihlédneme-li k pomocné větě 1, dostaneme výsledek, který jsme chtěli dokázat.

Tuto pomocnou větu použijeme v další úloze.

39. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$\left(\frac{r_a}{v_a + 2r_a}\right)^2 + \left(\frac{r_b}{v_b + 2r_b}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{v_c + 2r_c}\right)^2 \geqq \frac{1}{3},$$

kde rovnost platí, právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. Levou stranu nerovnosti označíme N. Z důkazu 6. pomocné věty už víme, že

$$\left(\frac{r_a}{v_a+2r_a}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right),$$

a podle toho

$$N=\frac{1}{4}\left[3-2\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\ldots\right)+\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right)\right]\geqq$$

$$\geqq\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

jak plyne z pomocné věty 1 a z výsledku úlohy 18. Odtud také vyplývá, že rovnost nastane jedině tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Poznámky. 1. Při úpravě výrazu N jsme v okrouhlých závorkách použili teček místo vypsání celého mnohočlenu. Čtenáře, který sleduje text s tužkou v ruce, jistě toto zkrácené vyjadřování nezmýlilo.

2. Jen pro zajímavost. Právě dokázaná nerovnost byla zobecněna pro libovolný celý exponent $k>0$ a její formulace je pak tato:

Pro libovolné celé $k>0$ platí mezi prvky trojúhelníku

$$\left(\frac{r_a}{v_a+2r_a}\right)^k+\left(\frac{r_b}{v_b+2r_b}\right)^k+\left(\frac{r_c}{v_c+2r_c}\right)^k\geqq 3^{1-k},$$

kde rovnost platí právě tehdy, jestliže trojúhelník je rovnostranný, anebo pro $k=1$. Rovnost také triviálně platí pro $k=0$.

Porovnejte tento vzorec s naším výpočtem, který jsme provedli pro $k=1$ a $k=2$.