Nerovnosti v trojúhelníku

II. kapitola. Nerovnosti týkající se stran a úhlů trojúhelníku

In: Stanislav Horák (author): Nerovnosti v trojúhelníku. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1986. pp. 21–35.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404132

II. kapitola

NEROVNOSTI TÝKAJÍCÍ SE STRAN A ÚHLŮ TROJÚHELNÍKU

8. Dokažte, že v každém trojúhelníku platí

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{a}{2\sqrt{bc}},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $b = c$. Na základě toho pak dokažte, že o úhlech trojúhelníka platí

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8},$$

kde rovnost nastane právě tehdy, je-li trojúhelník rovnostranný.

Důkaz. Vyjdeme z kosinové věty pro trojúhelník ABC a tu budeme vhodně upravovat:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) =$$
$$= (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

(to jsme použili vzorec **IX.a**). Odtud vyplývá, vynecháme-li dvojčlen v závorce, že

$$a^2 \geqq 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad \text{čili} \quad \sin\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, když $b = c$, tj. pro rovnoramenný trojúhelník s rameny AC, AB.

Jestliže na odvozený vztah použijeme dvakrát po sobě cyklickou záměnu, dostaneme

$$\sin\frac{\beta}{2} \leqq \frac{b}{2\sqrt{ca}}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Vynásobením všech tří vztahů dojdeme k nerovnosti uvedené v textu úlohy. Poznamenejme ještě, že rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$.

Nyní uvedeme dvě věty, které jsou důsledkem věty 8.

9. O úhlech každého trojúhelníku platí

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqq \frac{3}{2},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz tohoto tvrzení pouze naznačíme. Podle **X.b** platí

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Dál už může čtenář pokračovat sám.

10. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma \leqq \frac{1}{8},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný.

Důkaz. V 8. úloze jsme dokázali, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqq\frac{1}{8}. \tag{1}$$

Položme

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-x,\quad \frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-y,\quad \frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-z. \tag{2}$$

Úhly x, y, z můžeme považovat za úhly trojúhelníku, neboť o jejich velikostech platí

$$x+y+z=\pi,$$

jak se můžeme přesvědčit sečtením rovnic (2). Dosadíme-li z (2) do (1), obdržíme

$$\cos x\cos y\cos z\leqq\frac{1}{8}.$$

Podle úlohy 8 rovnost platí právě tehdy, když $x=y=z$, tj. právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Vyslovené tvrzení můžeme považovat za dokázané, neboť jeho platnost nezávisí na označení prvků (úhlů) trojúhelníku.

11. Dokažte, že v trojúhelníku, který není pravoúhlý, platí

$$\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma\geqq 9.$$

Rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Levou stranu dané nerovnosti — pro stručnost ji označíme L — budeme postupně upravovat. Přitom použijeme známý vzorec $1+\mathrm{tg}^2 x=\cos^{-2} x$, z něhož plyne

$$\mathrm{tg}^2 x=\cos^{-2} x-1.$$

Podle toho lze s použitím nerovnosti **B** výraz L upravit

$$L=\cos^{-2}\alpha+\cos^{-2}\beta+\cos^{-2}\gamma-3 \geqq$$

$$\geqq 3\sqrt[3]{\cos^{-2}\alpha\,\cos^{-2}\beta\,\cos^{-2}\gamma}-3,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\cos^2\alpha=\cos^2\beta=\cos^2\gamma$. Avšak podle úlohy 10 platí

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma \leqq \frac{1}{8},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Proto

$$\cos^{-2}\alpha\,\cos^{-2}\beta\,\cos^{-2}\gamma \geqq 64.$$

Tudíž

$$L=\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma \geqq 3\cdot 4-3=9,$$

jak jsme měli dokázat. Dodejme, že rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Poznámka. Z rovností $\cos^2\alpha=\cos^2\beta=\cos^2\gamma$ už plyne, že $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Jinak by totiž nutně bylo $\alpha+\beta+\gamma>\pi$, což není možné. Můžeme tedy psát $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$. Protože funkce cos je na intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ prostá, plyne odtud $\alpha=\beta=\gamma$.

Dokázali jsme tak, že platí: Jestliže v dokazované nerovnosti nastane rovnost, potom $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$. Pouhým dosazením zjistíme, že platí i obrácená implikace: Jestliže $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$, potom v dokazované nerovnosti platí rovnost.

12. V ostroúhlém trojúhelníku platí

$$\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta+\cos^{-1}\gamma\geqq 6.$$

Rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Poněvadž jde o ostroúhlý trojúhelník,

$$\cos\alpha>0,\quad \cos\beta>0,\quad \cos\gamma>0.$$

Použijeme-li nerovnost **B** na náš případ, dostaneme

$$\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta+\cos^{-1}\gamma\geqq 3\sqrt[3]{\cos^{-1}\alpha\,\cos^{-1}\beta\,\cos^{-1}\gamma}, \tag{1}$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když $\cos^{-1}\alpha=\cos^{-1}\beta=$ $=\cos^{-1}\gamma$, tj. právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Podle úlohy 10

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\leqq\frac{1}{8},$$

tj.

$$\sqrt[3]{\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}\leqq\frac{1}{2},$$

čili, jinak, psáno

$$\sqrt[3]{\cos^{-1}\alpha \cos^{-1}\beta \cos^{-1}\gamma} \geqq 2. \tag{2}$$

Ze vztahů (1), (2) obdržíme už vztah uvedený v textu úlohy. Dodejme, že rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

13. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{3}{4}.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Na levou stranu nerovnosti — označme ji pro stručnost L — použijeme vztah **IX.a** a hned budeme dál upravovat:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(3 - \cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma) = \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) = \\ &= 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Při úpravě jsme použili identitu **X.b.** V úloze 8 jsme ukázali, že

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Tudíž

$$L \geqq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

což jsme měli dokázat.

14. O úhlech trojúhelníku platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqq \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Vyjdeme z výsledku úlohy 13:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{3}{4},$$

kde znaménko rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. V této nerovnosti nahradíme funkce sinus funkcemi kosinus:

$$3 - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\right) \geqq \frac{3}{4},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{9}{4}.$$

Nyní použijeme vztah **B** a dostaneme tak řetěz nerovností

$$\frac{9}{4} \geqq \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \geqq$$

$$\geqq 3\sqrt[3]{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Rovnost nalevo i napravo platí právě tehdy, když $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{\gamma}{2}$, tj., jak se dá snadno ukázat (viz poznámku v úloze 11), právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Vynecháme-li prostřední člen řetězu, dostaneme po jednoduché úpravě

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3}{8} \sqrt{3}.$$

S použitím vztahu **X.a** dostaneme konečný tvar nerovnosti

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leqq \frac{3}{2} \sqrt{3}.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

15. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\sin^{-2} \frac{\alpha}{2} + \sin^{-2} \frac{\beta}{2} + \sin^{-2} \frac{\gamma}{2} \geqq 12,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. Z příkladu 8 víme, že

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Z této nerovnosti dostaneme jinou, s ní ekvivalentní:

$$\sin^{-2}\frac{\alpha}{2}\sin^{-2}\frac{\beta}{2}\sin^{-2}\frac{\gamma}{2}\geqq 64.$$

S použitím této nerovnosti a nerovnosti **B** dojdeme k nové nerovnosti

$$\sin^{-2}\frac{\alpha}{2}+\sin^{-2}\frac{\beta}{2}+\sin^{-2}\frac{\gamma}{2}\geqq$$

$$\geqq 3\sqrt[3]{\sin^{-2}\frac{\alpha}{2}\sin^{-2}\frac{\beta}{2}\sin^{-2}\frac{\gamma}{2}}\geqq 3\sqrt[3]{64}=12.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Důkaz věty je proveden.

1. pomocná věta. *Jestliže α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, potom*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

Důkaz. Podle **VIII.c** platí

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

a další dva analogické vztahy dostaneme cyklickou záměnou. Dosadíme-li tyto vztahy do daného výrazu na levé straně dokazované rovnosti, snadno tuto rovnost odvodíme.

Větu použijeme při důkazu další nerovnosti.

16. O úhlech každého trojúhelníku platí

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geqq\sqrt{3}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Dokažte.

Důkaz. Vyjdeme ze samozřejmě správné nerovnosti

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\geqq 0,$$

v níž rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. K této nerovnosti připišme identitu z 1. pomocné věty, znásobenou třemi:

$$3\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=3.$$

Sečtením obou posledních vztahů dostaneme

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2\geqq 3,$$

a to je už v podstatě vztah, který jsme měli dokázat.

17. O úhlech každého trojúhelníku platí

$$\cos^{-2}\frac{\alpha}{2}+\cos^{-2}\frac{\beta}{2}+\cos^{-2}\frac{\gamma}{2}\geqq 4,$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Víme, že

$$\cos^{-2}\frac{\alpha}{2}=1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Cyklickou záměnou obdržíme analogické vzorce pro $\cos^{-2}\frac{\beta}{2}$ a $\cos^{-2}\frac{\gamma}{2}$. Pro stručnost označme levou stranu dokazované nerovnosti písmenem V. Potom po dosazení je

$$V=3+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=$$

$$=3+\frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right)+\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)+\left(\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Podle vztahu **A.1** je

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\geqq 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

kde znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, tj. právě tehdy, když $\alpha=\beta$. Podobně

$$\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geqq 2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\beta=\gamma$,

$$\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\geqq 2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\gamma=\alpha$. Použijeme-li těchto tří nerovností pro úpravu výrazu V, dostaneme

$$V \geqq 3 + \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = 4.$$

To jsme na výraz v okrouhlé závorce použili výsledek 1. pomocné věty. Ve výsledné nerovnosti platí rovnost právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$, tj. právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Tím je také důkaz skončen.

18. O úhlech trojúhelníku platí

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{1}{3},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Levou stranu nerovnosti označíme pro stručnost písmenem M. Použijeme vzorec **VIII.c**

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

a analogické vzorce pro $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, které dostaneme cyklickou záměnou. Potom

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{(s-b)(s-c)(s-c)(s-a)}{s(s-a)s(s-b)} =$$

$$= \left(\frac{s-c}{s}\right)^2 = \left(1 - \frac{c}{s}\right)^2.$$

Obdobné vzorce pro druhé dva součiny dostaneme cyklickou záměnou. Nyní můžeme psát, čemu se rovná výraz M:

$$M = 3 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} - \frac{2(a + b + c)}{s} =$$

$$= 3 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} - 4 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} - 1,$$

$$M + 1 = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} . \qquad \text{(a)}$$

Podle nerovnosti **E** je

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leqq 3(a^2 + b^2 + c^2), \qquad \text{(b)}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$. Ze vztahů (a), (b) dostaneme

$$M + 1 \geqq \frac{4}{3}$$

a odtud

$$M \geqq \frac{1}{3},$$

čímž jsme s důkazem hotovi. Ještě je potřebí připomenout, že rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$, tj. pro rovnostranný trojúhelník.

19. V každém trojúhelníku platí

$$\frac{\pi}{3} \leqq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2} .$$

Přitom rovnost vlevo platí právě tehdy, když je daný trojúhelník rovnostranný. Dokažte. (α, β, γ jsou velikosti úhlů v obloukové míře.)

Důkaz. Nejprve dokážeme správnost nerovnosti stojící vlevo. Vyjdeme z nerovnosti, která je takřka na první pohled zřejmá:

$$(a-b)(\alpha-\beta)+(b-c)(\beta-\gamma)+(c-a)(\gamma-\alpha)\geqq 0.$$

(Ověřte si sami, že žádný ze tří součinů není záporný.) Znaménko rovnosti platí, právě když $a=b=c$. Po vynásobení můžeme mnohočlen na levé straně nerovnosti nahradit mnohočlenem ekvivalentním

$$a(3\alpha-\pi)+b(3\beta-\pi)+c(3\gamma-\pi)\geqq 0,$$

a odtud už po kratší úpravě plyne

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\geqq\frac{\pi}{3}, \tag{1}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$. Tím jsme dokázali nerovnost stojící vlevo. Zbývá důkaz druhé nerovnosti.

Z trojúhelníkové nerovnosti

$$b+c>a$$

dostaneme nerovnost s ní ekvivalentní

$$a(b+c-a)>0.$$

Cyklickou záměnou dojdeme k dalším dvěma nerovnostem, a tak posléze dojdeme k nerovnosti

$$\alpha(b + c - a) + \beta(c + a - b) + \gamma(b + a - c) > 0.$$

Tento vztah nahradíme vztahem ekvivalentním:

$$a(\pi - 2\alpha) + b(\pi - 2\beta) + c(\pi - 2\gamma) > 0.$$

Odtud už snadno dojdeme k výsledku

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

což je druhá část daného vztahu. Spojením (1) a (2) dostaneme vztah, který je uveden v textu úlohy.