I. kapitola

NEROVNOSTI MEZI STRANAMI TROJÚHELNÍKU FINSLEROVA-HADWIGEROVA NEROVNOST

1. Uvnitř strany AB daného trojúhelníku ABC je zvolen libovolný bod D, o němž platí

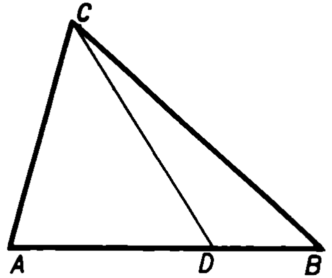
$$|AB| : |AD| = k,$$

kde $k > 1$ je reálné číslo. Dokažte, že pak platí

$$|BC| + (k + 1)|AC| > k|CD|.$$

Důkaz. (obr. 1). Podle daného předpokladu platí

$$|AB| = k|AD|.$$



Obr. 1

Z trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník ABC,

$$|AC|+|BC|>|AB|,$$

plyne

$$|AC|+|BC|>k|AD|. \tag{1}$$

Podobně z trojúhelníkové nerovnosti $|AD|+|AC|>|CD|$ pro trojúhelník ACD vyplývá

$$k(|AD|+|AC|)>k|CD|. \tag{2}$$

Spojením vztahů (1) a (2) dostáváme

$$|AC|+|BC|+k(|AD|+|AC|)>k|AD|+k|CD|$$

a po zjednodušení máme

$$|BC|+(k+1)|AC|>k|CD|,$$

což je nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

2. Dokažte, že jestliže délky a, b, c stran trojúhelníku ABC splňují podmínku

$$a^2+b^2=kc^2,$$

potom $k>\frac{1}{2}$.

Důkaz. O délkách stran trojúhelníku ABC platí

$$a+b>c.$$

Z této nerovnosti dostaneme

$$a^2+b^2+2ab>c^2.$$

Použijeme-li nerovnost **A.1**, dojdeme k nové nerovnosti

$$2(a^2+b^2)>c^2,$$

a dále

$$2kc^2>c^2,$$

tj. $k>\frac{1}{2}$, jak jsme měli dokázat.

3. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC platí

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$ (tj., právě když trojúhelník je rovnostranný).

Důkaz. V nerovnosti **C.1** pišme $(s-a)$, $(s-b)$ místo a, b. Snadno vypočítáme, že

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}\geqq\frac{4}{2s-a-b}=\frac{4}{c}.$$

Znaménko rovnosti platí, právě když $s-a=s-b$, tj., právě když $a=b$. Použijeme-li dvakrát cyklickou záměnu, získáme tyto další dvě nerovnosti:

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geqq\frac{4}{a}\quad\text{(rovnost, právě když } b=c\text{)},$$

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-c}\geqq\frac{4}{b}\quad\text{(rovnost, právě když } a=c\text{)}.$$

Sečtením všech tří nerovností dostaneme

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

kde rovnost platí, právě když $a=b=c$, tj., právě když trojúhelník je rovnostranný. Tím je důkaz vysloveného tvrzení proveden.

4. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC platí

$$\sqrt{s}<\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c}\leqq\sqrt{3s},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Pro stručnost položme

$$x=\sqrt{s-a},\quad y=\sqrt{s-b},\quad z=\sqrt{s-c}, \tag{1}$$

potom

$$x^2+y^2+z^2=3s-(a+b+c)=s. \tag{2}$$

Poněvadž platí

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqq x+y+z,$$

máme tím dokázánu první nerovnost.

Podle vztahu **E** platí

$$x+y+z\leqq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}, \tag{3}$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když $x=y=z$. Vyjádříme-li tuto nerovnost s použitím vztahů (1), (2) pomocí čísel

a, b, c, dostaneme druhou nerovnost uvedenou v textu úlohy. Poněvadž rovnost ve vztahu (3) platí právě tehdy, když $x = y = z$, nastane v uvedené nerovnosti rovnost právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

5. Dokažte, že v každém trojúhelníku platí

$$s^2 \geqq 3S\sqrt{3},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Vztah **B** použijeme na čísla $s - a$, $s - b$, $s - c$. Tak dostaneme

$$3s - a - b - c \geqq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}; \qquad (1)$$

přitom rovnost platí právě tehdy, když $s - a = s - b = s - c$, tj., když jde o rovnostranný trojúhelník. Dalšími úpravami vztahu (1) postupně dostaneme:

$$s \geqq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$s^3 \geqq 27(s-a)(s-b)(s-c),$$
$$s^4 \geqq 27s(s-a)(s-b)(s-c) = 27S^2,$$

$$s^2 \geqq 3S\sqrt{3},$$

jak jsme měli dokázat.

Poznámky. 1. Snad je vhodné upozornit čtenáře na to, že tato nerovnost udává vztah mezi obvodem a obsahem trojúhelníku.

2. Poněvadž $S = sr$ (viz vztah **III**), můžeme z odvozené nerovnosti dostat nerovnost udávající vztah mezi obvodem a poloměrem vepsané kružnice:

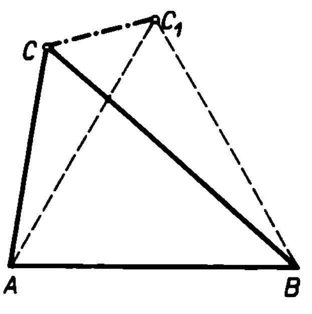
$$s \geqq 3r\sqrt{3}.$$

6. Dokažte, že o prvcích každého trojúhelníku platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz (obr. 2). Nad stranou AB daného trojúhelníku ABC sestrojme v polorovině ABC rovnostranný trojúhel-



Obr. 2

ník ABC_1. Z trojúhelníku ACC_1 se dá užitím kosinové věty vypočítat velikost úsečky CC_1. Přitom si uvědomíme, že

$|\sphericalangle CAC_1| = \left|\alpha - \frac{\pi}{3}\right|$, a že $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$. Pak můžeme psát

$$|CC_1|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Z kosinové věty pro trojúhelník ABC vyjádříme $\cos\alpha$ a dosadíme:

$$|CC_1|^2 = b^2 + c^2 - bc\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \sqrt{3}bc\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 2S\sqrt{3}.$$

O velikosti úsečky CC_1 platí, že $|CC_1| \geqq 0$. Rovnost nastane právě tehdy, když $C = C_1$, a to je jedině tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný. Dospíváme tak k nerovnosti

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3}.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

V r. 1938 matematikové Finsler a Hadwiger zesílili právě dokázanou nerovnost a odvodili následující větu:

7. V každém trojúhelníku platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3} + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. Na čísla $s-a$, $s-b$, $s-c$ použijeme nerovnost **F**. Dostaneme tak

$$(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a) \geqq$$
$$\geqq \sqrt{3s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $s-a=s-b=s-c$, tj., když trojúhelník je rovnostranný.

Pravá strana nerovnosti je rovna $S\sqrt{3}$ a levou stranu budeme postupně upravovat.

$$3s^2-2s(a+b+c)+(ab+bc+ca) \geqq S\sqrt{3},$$
$$4(ab+bc+ca) \geqq 4S\sqrt{3}+4s^2,$$
$$4(ab+bc+ca) \geqq 4S\sqrt{3}+(a+b+c)^2,$$
$$2(ab+bc+ca) \geqq 4S\sqrt{3}+a^2+b^2+c^2,$$
$$2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2) \geqq 4S\sqrt{3}+2(a^2+b^2+c^2),$$
$$a^2+b^2+c^2 \geqq 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Rovnost platí, právě když trojúhelník je rovnostranný. Tím je důkaz proveden.