Nerovnosti v trojúhelníku

Úvod

In: Stanislav Horák (author): Nerovnosti v trojúhelníku. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1986. pp. 5–12.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404130

ÚVOD

V této knížce bude daný trojúhelník vždy označen ABC. V pravoúhlém trojúhelníku bude C vrchol pravého úhlu. Délky stran budou označeny a, b, c, a to tak, že $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Střed opsané kružnice označíme S, střed vepsané kružnice O, T těžiště a V ortocentrum. Při odvozování nebo citování různých nerovností mohou a, b, c představovat reálná čísla, která pak ovšem nemají význam délek strany trojúhelníku.

Dále označíme:

α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, a to tak, že $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCA|$. Přitom $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

v_a, v_b, v_c výšky trojúhelníku. Přitom v_a je ta výška, která prochází vrcholem A, atd.

t_a, t_b, t_c délky těžnic trojúhelníku, a to tak, že $t_a = |AA'|$, kde A' je střed strany BC, atd.

w_a, w_b, w_c délky os vnitřních úhlů trojúhelníku, přičemž w_a je délka té osy, která půlí úhel $\sphericalangle BAC$, atd.

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ poloviční obvod trojúhelníku ABC.

R poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

r_a, r_b, r_c poloměry kružnic vně vepsaných trojúhelníku ABC. Přitom kružnice s poloměrem r_a se dotýká strany BC ve vnitřním bodě, atd.

S obsah trojúhelníku.

V celé knížce pracujeme s reálnými čísly. V zájmu stručnosti budeme proto užívat slova ‚číslo' ve významu ‚reálné číslo'.

Vzorce, které budeme v knížce potřebovat. (Při odvolávání na některý vzorec uvedeme prostě příslušné římské číslo.)

I. $S = \frac{1}{2} a v_a = \frac{1}{2} b v_b = \frac{1}{2} c v_c$.

Je vidět, že stačí znát pouze jeden z těchto tří vzorců, a ostatní dva dostaneme postupným užitím cyklické záměny: $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$.

I.a $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, tzv. *Heronův vzorec.*

I.b $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ a další dva vzorce cyklickou záměnou: $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$ a současně $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$, $\gamma \to \alpha$.

I.c $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$. Tento vzorec je v podstatě vzorec **I.a**.

II. $v_a = c \sin \beta = b \sin \gamma$ a další dva cyklickou záměnou.

II.a $R = abc : (4S)$.

II.b $a = 2R \sin \alpha$ a další dva cyklickou záměnou.

III. $r = S : s$,
$r_a = S : (s - a)$ a další dva cyklickou záměnou.

IV.a $t_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$ a další dva cyklickou záměnou.

IV.b $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

V. $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$. Tzv. *sinová věta*, která se dá odvodit z rovnic **II** nebo **II.b.**

VI. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ a další dva cyklickou záměnou. Tzv. *kosinová věta*, která je velmi často užívaná v elementární geometrii.

VII. $\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{r}$.

VIII.a $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ a další dva cyklickou záměnou.

VIII.b $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ a další dva cyklickou záměnou.

VIII.c $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ a další dva cyklickou záměnou.

IX.a $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ a další dva cyklickou záměnou.

IX.b $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ a další dva cyklickou záměnou.

IX.c $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ a další dva cyklickou záměnou.

Vzorce **IX.a, b, c** platí pro úhly z intervalu $\langle 0;\pi)$, tudíž také pro úhly trojúhelníku.

X.a $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

X.b $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$

Vzorce **X.a, b** platí pro úhly α, β, γ, jejichž součet je π, tudíž také pro úhly trojúhelníku.

Nerovnosti, které budeme v knížce potřebovat. (Při odvolávání na některou nerovnost uvedeme prostě příslušné písmeno.)

A.1 $a^2+b^2\geqq 2ab$,

kde a, b jsou libovolná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a=b$. Vztah **A.1** plyne jednoduše ze vztahu $(a-b)^2\geqq 0$. Je často používán i ve tvaru:

A.2 $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$,

kde a, b jsou libovolná nezáporná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a=b$. Jestliže a, b jsou vzájemně reciproká čísla, potom

A.3 $a+b\geqq 2.$

Rovnost platí právě tehdy, když $a=b$.

Vzorec **A.2** se dá zobecnit pro libovolné přirozené n. Zobecnění budeme potřebovat jen pro $n=3$:

B. $a + b + c \geqq 3\sqrt[3]{abc}$,

kde a, b, c jsou libovolná nezáporná čísla. Rovnost platí, právě když $a = b = c$.

Důkazy nerovností **A.2, A.3** a **B** a jejich zobecnění najde čtenář v Rozhledech, roč. *51* (1972—73), str. 152 v článku *P. Vihana* Didoniny úlohy. Jsou tam i geometrické aplikace těchto vzorců.

C.1 $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 4$,

kde a, b jsou libovolná kladná čísla. Rovnost platí, právě když $a = b$. I tato nerovnost se dá zobecnit pro libovolný počet členů v závorkách. Budeme používat jen toto zobecnění:

C2. $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9$,

kde a, b, c jsou libovolná kladná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$.

Důkazy nerovností **C.1** a **C.2** se provedou tak, že se oba mnohočleny vynásobí a použije se nerovnost **A.3.**

D. $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$,

kde a, b, c jsou libovolná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$.

Důkaz nerovnosti vyplývá z třikrát použité nerovnosti **A.1.**

E. $|a + b + c| \leqq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$,

kde a, b, c jsou libovolná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$.

Jen stručně *důkaz*. Ze vztahu **D** plyne

$$2(a^2+b^2+c^2) \geqq 2(ab+bc+ca),$$

kde platí rovnost právě tehdy, když $a=b=c$. Upravujme dál:

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2,$$

a to už je v podstatě dokazovaný vztah.

F. $ab+bc+ca \geqq \sqrt{3abc(a+b+c)}$,
kde a, b, c jsou libovolná nezáporná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.
I zde provedeme stručný *důkaz*. Vyjdeme z identity

$$ab+bc+ca=$$

$$=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)} \qquad (1)$$

Podle vztahu **D** je

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqq a^2bc+ab^2c+abc^2. \qquad (2)$$

Nahradíme-li v (1) pod odmocnítkem první trojčlen pravou stranou nerovnosti (2), dostaneme nerovnost **F.** Tím je důkaz proveden.

G. $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \leqq \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$,
kde x_i, y_i $(i=1, 2, 3)$ jsou libovolná čísla.
Rovnost platí právě tehdy, když buď všechna čísla $x_i=0$, nebo všechna čísla $y_i=0$, nebo jestliže existuje takové číslo $k>0$, že $x_i=ky_i$ $(i=1, 2, 3)$. Toto je tzv.

Cauchyho nerovnost. Její *důkaz* (a důkazy mnohých jiných nerovností) najde čtenář v brožure *A. Kufnera* Nerovnosti a odhady (39. svazek knižnice ŠMM) nebo v brožuře *J. Morávka* Dynamické programování (33. svazek knižnice ŠMM).