Faktoriály a kombinační čísla

8. kapitola. Různé

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1985. pp. 96–107.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404120

8. kapitola

RŮZNÉ

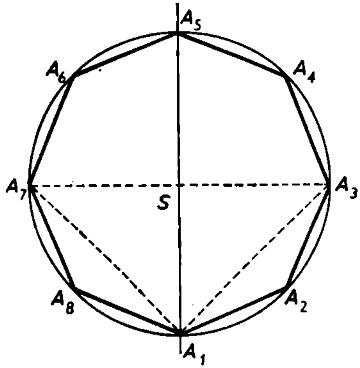
V závěru této knížky uvedeme několik příkladů s kombinatorickým námětem. Budou to otázky, kde zase nevystačíme jen s mechanickým použitím hotového vzorce, nýbrž bude třeba provést určitou matematickou úvahu. Náš první příklad je z planimetrie.

Příklad 45. V rovině je dán pravidelný n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (kde n je sudé). Z n vrcholů A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n vyberte tři tak, aby tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníka. Kolika způsoby je to možné?

Řešení. Odpovězme nejprve na otázku, kolik zde existuje rovnoramenných trojúhelníků s hlavním vrcholem v bodě A_1. Označme S střed kružnice opsané danému n-úhelníku a sestrojme přímku A_1S*). Z geometrie víme, že tato přímka prochází ještě jedním vrcholem našeho n-úhelníka (vrcholem, jehož index je $\frac{n}{2} + 1$). Přímka A_1S rozděluje rovinu na dvě poloroviny; zvolme si z nich tu, která obsahuje uvnitř bod A_2. Uvnitř této

---

*) Na obr. 9 jsme znázornili speciální případ $n = 8$. Čárkovaně je tam též narýsován jeden z rovnoramenných trojúhelníků, o nichž jedná příklad 45; je to trojúhelník $A_1A_3A_7$. Ještě připomeňme, že u rovnostranného trojúhelníka pokládáme každý jeho vrchol za hlavní.



Obr. 9

poloroviny leží $\frac{1}{2}(n-2)$ vrcholů našeho n-úhelníka a číslo $\frac{1}{2}(n-2)$ znamená zřejmě i počet rovnoramenných trojúhelníků s hlavním vrcholem A_1. Mezi těmito trojúhelníky může ovšem existovat i trojúhelník rovnostranný, neboť i tento trojúhelník zahrnujeme pod pojem trojúhelníka rovnoramenného. Kdy může vzniknout rovnostranný trojúhelník? Zřejmě je to možné právě tehdy, je-li číslo n dělitelné třemi. Budeme tedy rozlišovat dva případy.

Je-li n dělitelné třemi, pak počet rovnoramenných trojúhelníků, jež nejsou rovnostranné a mají hlavní vrchol A_1, je

$$\frac{1}{2}(n-2)-1=\frac{1}{2}(n-4).$$

Stejný počet ovšem dostáváme, volíme-li za hlavní vrchol kterýkoli z dalších bodů $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Součin

$$n \cdot \frac{1}{2}(n-4)$$

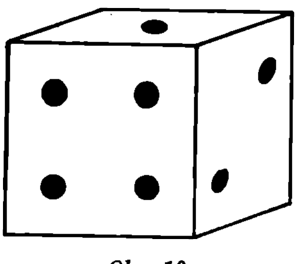
udává tedy počet všech rovnoramenných trojúhelníků, jež nejsou rovnostranné. Počet rovnostranných trojúhelníků však určíme snadno — je totiž roven číslu $\frac{n}{3}$. Je-li n dělitelné třemi, máme tedy celkový výsledek

$$\frac{n}{2}(n-4) + \frac{n}{3} = \frac{n}{6}(3n-10).$$

Zbývá ještě případ, kdy n není dělitelné třemi. Pak nelze sestrojit žádný rovnostranný trojúhelník, a číslo $\frac{n}{2}(n-2)$ znamená tedy hledaný počet rovnoramenných trojúhelníků.

Odpověď. Je-li n dělitelné třemi, pak hledaný počet rovnoramenných trojúhelníků je $\frac{n}{6}(3n-10)$; není-li n dělitelné třemi, je hledaný počet $\frac{n}{2}(n-2)$.

Jistě znáte kostku, kterou se hrají různé společenské hry (viz obr. 10). Každá stěna kostky je označena



Obr. 10

některým z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tím, že je na ní uveden příslušný počet bodů (ok). V některých kombinatorických úlohách, jež vedou k počtu pravděpodobnosti, se vyskytují též otázky spojené s jednou nebo několika takovými hracími kostkami.

Uvedeme nejprve jednu velmi jednoduchou variantu takového příkladu.

Příklad 46. Máme dvě hrací kostky — červenou a modrou. Kolika způsoby můžeme při hodu těmito kostkami dosáhnout součtu 6?

Řešení. Součet 6 se může vyskytnout např. tak, že na červené kostce padne 1 a na modré 5. Uvědomte si, že tento případ musíme odlišovat od případu, kdy na červené máme 5 a na modré 1.

Celkem nám dá odpověď tato tabulka:

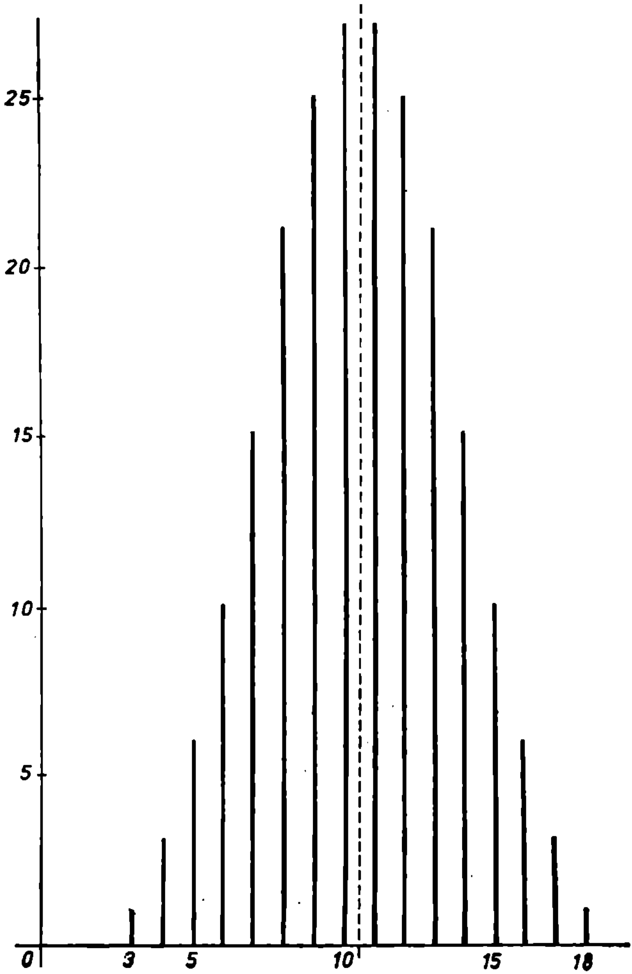
červená	1	2	3	4	5
modrá	5	4	3	2	1

Součet 6 může padnout pěti způsoby.

Po přípravné úvaze z předcházejícího příkladu se nyní obrátíme k otázce složitější.

Příklad 47. Máme tři hrací kostky — červenou, modrou a bílou. Při hodu těmito kostkami mohou padnout součty 3, 4, 5, . . ., 17, 18. Vyšetřete, kolika způsoby lze každý z těchto součtů uskutečnit.

Řešení. Barva kostek nás zase upozorňuje na to, že je třeba dbát na pořadí, ve kterém uvažovaný součet padl.



Obr. 11

Součet 3 můžeme uskutečnit jediným způsobem — na každé kostce padne 1. Součet 4 lze uskutečnit třemi způsoby — číslo 2 padne na jedné kostce a na ostatních dvou jsou jedničky. Postupujeme-li tímto způsobem dále, dostáváme počet možností pro každý z uvažovaných součtů.

Přehledně je výsledek takového vyšetřování patrný z této tabulky:

součet	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
počet způsobů	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Bývá zvykem, že se taková tabulka znázorní i graficky. Na obr. 11 vidíme sloupkový diagram, který odpovídá naší úloze o třech hracích kostkách. Všimněte si, že je tento diagram „souměrný" podle svislé přímky, kterou jsme v obr. 11 narýsovali čárkovaně.

Našli jsme tedy odpověď na otázku o třech hracích kostkách. Zůstaňme však ještě u této problematiky a ukažme si jiný způsob, kterým můžeme celý výpočet zformalizovat a tím si jej podstatně usnadnit. Uvažujme pomocný šestičlen

$$A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

a vytvořme mocninu A^3. To je mnohočlen v proměnné x a má tvar

$$A^3 = s_3x^3 + s_4x^4 + s_5x^5 + \ldots + s_{17}x^{17} + s_{18}x^{18}.$$

Jakou úlohu zde mají koeficienty $s_3, s_4, s_5, \ldots, s_{17}, s_{18}$? Odpovězme příkladem. Napíšeme-li A^3 jako součin $A.A.A$, pak např. koeficient s_6 dostaneme takto: Mocninu x^6 lze vytvořit tak, že v prvním činiteli A vybereme vhodný člen x^a, v druhém A člen x^b a ve třetím A člen x^c

tak, že $a + b + c = 6$. Číslo s_6 tedy určuje počet všech způsobů, jimiž tento výběr můžeme provést. Představíme-li si nyní, že první činitel A odpovídá kostce červené, druhý modré a třetí bílé, plyne odtud okamžitě, že s_6 značí počet způsobů, jimiž na našich třech kostkách lze vytvořit součet 6.

Nyní k technickému použití právě popsané skutečnosti. Abychom určili všechna čísla s_i, zabývejme se čistě aritmetickou úlohou — totiž umocňováním našeho šestičlenu na třetí. Platí

$$\begin{aligned}
A^3 &= [(x + x^2 + x^3) + x^3(x + x^2 + x^3)]^3 = \\
&= (x + x^2 + x^3)^3 (1 + x^3)^3 = \\
&= [x^3 + 3x^2(x^2 + x^3) + 3x(x^2 + x^3)^2 + (x^2 + \\
&+ x^3)^3] (1 + x^3)^3 = \\
&= (x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 3x^5 + \\
&+ 6x^6 + 3x^7 + x^6 + 3x^7 + 3x^8 + x^9) (1 + x^3)^3 = \\
&= (x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 6x^7 + 3x^8 + x^9) (1 + \\
&+ 3x^3 + 3x^6 + x^9) = \\
&= x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + \\
&+ 25x^9 + 27x^{10} + 27x^{11} + 25x^{12} + 21x^{13} + \\
&+ 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}.
\end{aligned}$$

Je vidět, že koeficienty získaného mnohočlenu jsou skutečně čísla, která jsou nám už známa z předcházejícího řešení úlohy o třech hracích kostkách.

Do kombinatorické analýzy bývají často zahrnovány i poučky o tzv. latinských čtvercích. Je to problematika, která svým původem vlastně patří do matematiky rekreační a vyšlo o ní už mnoho článků a knih. Škola mladých matematiků zařadila před časem do svého edičního programu také jeden svazek o latinských čtvercích, který napsal J. Bosák (viz citaci v závěru). Bosákova publikace informuje i o tzv. řecko-latinských a o roomských čtvercích. Zde se tedy omezíme jen na několik letmých poznámek.

Latinský čtverec je čtvercové schéma tvaru šachovnice s n^2 poli, přičemž v každém poli je napsáno jedno z přirozených čísel 1, 2, 3, . . ., n. Přitom se požaduje, aby se v žádném řádku ani v žádném sloupci nevyskytovalo číslo více než jedenkrát. Vzpomeneme-li na pojem pořadí, kterým jsme se zabývali na počátku této knížky, můžeme říci, že se v jednotlivých řádcích latinského čtverce vyskytují některá z pořadí čísel 1, 2, 3, . . ., n.

Pro $n = 5$ zde uvádíme tento příklad latinského čtverce:

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	4	5	1	2
4	5	2	3	1
5	3	1	2	4

Latinské čtverce v dnešní době hrají velmi důležitou roli v matematické statistice, v tzv. plánování čili uspořádávání pokusů. Představme si např., že na pokusném poli, jež má 5 × 5 dílců podobně jako v našem schématu latinského čtverce, chceme pěstovat 5 odrůd určité plodiny (nebo při určité plodině vyzkoušet 5 druhů hnojení apod.), abychom zjistili jejich výnosnost. Odrůdy prostě označme čísly 1, 2, 3, 4, 5. Každou odrůdu máme vyzkoušet na stejném počtu dílců, tj. v našem případě na

5 dílcích. Kdybychom nyní třeba všechny dílce s odrůdou 1 umístili v levém horním rohu schématu a dostali třeba podstatně vyšší nebo nižší výnos, nevěděli bychom potom, zdali tento výsledek byl skutečně způsoben kvalitou odrůdy nebo pouze tím, že v této oblasti pokusného pole půda má odlišnou kvalitu nebo odlišnou vlhkost apod. Abychom tedy pokud možno vyloučili vliv nestejnorodosti půdy, musíme dílce s každou odrůdou „rozptýlit" po celém poli. To právě lze učinit schématem latinského čtverce tak, že odrůdu 1 umístíme na dílcích označených číslem 1 v latinském čtverci atd.

Jedním latinským čtvercem se budeme ještě zabývat v dalším příkladě.

Příklad 48. Je dáno čtvercové schéma se 16 poli:

		3	
4			
	1		
			2

Zde jsou čtyři pole obsazena čísly, ostatní jsou volná. Napište do volných okének čísla 1, 2, 3, 4 tak, aby vznikl latinský čtverec.

Řešení. Všimněme si levého horního pole v daném schématu. Zde nemůže stát číslo 3 (neboť tím už je první řádek obsazen) ani číslo 4 (tím je obsazen první sloupec). Přicházejí tedy v úvahu čísla 1 a 2.

Napišme sem tedy číslo 1. Na konci prvního řádku přichází tedy v úvahu jen číslo 4 a tím dostává první řádek tvar 1, 2, 3, 4. Podobně první sloupec končí nutně číslem 3, a má tedy (ve směru shora dolů) tvar 1, 4, 2, 3. Dále si všimneme třeba sloupce posledního, kde nám zatím chybí dva údaje; zřejmě tento sloupec musí mít tvar 4, 1, 3, 2. Podobně lze postupovat ještě v dalších případech; dostáváme tak posléze tento latinský čtverec:

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Zbývá ještě probrat případ, kdy v levém horním rohu našeho schématu je číslo 2. Pak snadno najdeme třeba pro první řádek jedinou možnost 2, 4, 3, 1 a pro první sloupec rovněž 2, 4, 3, 1. I další konstrukce jsou zde jednoznačné a vedou k tomuto latinskému čtverci:

2	4	3	1
4	2	1	3
3	1	2	4
1	3	4	2

Je vidět, že daným podmínkám odpovídají dva latinské čtverce.

Úlohy

44. V rovině je dán pravidelný n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (kde n je liché). Z n vrcholů $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ vyberte tři tak, aby tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníka. Kolika způsoby je to možné?

45. Kolika způsoby lze hodit čtyřmi kostkami součet 12?

46. Dva hráči spolu hrají tuto hru: Daný počet zápalek je rozdělen do dvou hromádek. Hráč smí při jednom tahu vzít buď z jedné hromádky libovolný (kladný) počet zápalek, nebo z obou hromádek tentýž (kladný) počet zápalek. V tazích se hráči pravidelně střídají. Vyhrává ten, který svým tahem dobírá poslední zápalky, jež jsou ještě ve hře. Popište, jak si má hráč počínat, aby si vynutil vítězství.

47. Je dána množina

$$\mathsf{M} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Ukažte, že její prvky je možno seřadit do konečné posloupnosti tak, že současně platí:

I. Každý prvek množiny M se vyskytuje v posloupnosti právě dvakrát.

II. Mezi prvním a druhým výskytem prvku x je právě x dalších členů posloupnosti (pro každé $x \in \mathsf{M}$).

48. Nahraďte podmínku II. z předcházející úlohy podmínkou II.′ a řešte úlohu, která tak vznikne.

II.′ Mezi prvním a druhým výskytem prvku x je právě $x - 1$ dalších členů posloupnosti (pro každé $x \in \mathsf{M}$).

49. Nechť N je množina všech přirozených čísel. Ukažte, že její prvky je možno seřadit do nekonečné posloupnosti tak, že současně platí:

I. Každý prvek množiny N se vyskytuje v posloupnosti právě dvakrát.

II. Mezi prvním a druhým výskytem prvku x je právě x dalších členů posloupnosti (pro každé $x \in$ N).