

Faktoriály a kombinační čísla

5. kapitola. Fibonacciho čísla

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech).
Praha: Mladá fronta, 1985. pp. 64–71.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404117>

Terms of use:

© Jiří Sedláček, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

5. kapitola

FIBONACCIHO ČÍSLA

Na přelomu XII. a XIII. století žil v italské Pise významný matematik Leonardo Pisano, který napsal dvě učebnice matematiky. První měla název *Liber abaci* (kniha o abaku) a Leonardo v ní vykládá indický způsob počítání, zdokonalený podle al-Chvárizmího. Druhá se věnuje geometrii a obsahuje popis tehdejších geometrických vědomostí, jež autor poznal na svých cestách po severní Africe a u maurských vědců.

Leonardo byl známější pod svou přezdívkou Fibonacci (čti Fibonači), jež je zkratkou latinského *Filius Bonaccii* (tj. syn Bonacciho). Pro nás má zde z Fibonacciho díla důležitost zvláště kniha *Liber abaci* napsaná r. 1202, jež se dochovala ve druhém zpracování z r. 1228. Tento spis obsahuje velkou řadu úloh a jedna z nich se zvláště proslavila:

Kolik potomků má za jeden rok jeden pár králíků, jestliže každý pár přivede na svět měsíčně jeden další pár a králíci se počínají množit ve dvou měsících svého věku?

Nebudeme zde podrobně rozbírat tuto archaickou kratochvíli, ale přejdeme hned k jejímu matematickému jádru. Bude nás zajímat číselná posloupnost

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \dots, \quad (1)$$

jež je definována takto: její první dva členy se rovnají 1, čili

$$F_1 = 1, F_2 = 1, \quad (2)$$

a každý další člen F_n s indexem n větším než 2 se rovná součtu dvou předcházejících členů, čili pro každé $n > 2$ je

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (3)$$

Posloupnost (1), jež je dána svými členy F_1 a F_2 a rekurentním vzorcem (3), se nazývá posloupnost *Fibonacciho*. Čísla, jež se vyskytují v řádku (1), se též nazývají *Fibonacciho čísla*.

Když použijeme prvních dvou členů, jak je udává řádek (2), a rekurentního vzorce (3), můžeme postupně počítat všechna čísla v řádku (1). Zde tedy je několik počátečních členů, jež si snadno můžeme vypočítat:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Promyslete si sami, jak tato čísla souvisejí s úlohou o králicích, o níž byla výše řeč. Kdo na souvislost nepřijde, může se podívat do knížky [13], kterou citujeme v závěru tohoto svazku. V ní je vše vyloženo do podrobností. Také Š. Znáám [14] podává vysvětlení.

Fibonacciho čísla mají řadu zajímavých vlastností a často se vyskytují i v kombinatorické matematice. Tak např. v teorii grafů zjišťujeme, že se Fibonacciho čísla dají vyjádřit počtem koster některých speciálních grafů (viz o tom [11]). Š. Znáám [14] říká, že Fibonacciho čísla jsou často „šedou eminencí“ v pozadí řešení praktických problémů a má pro toto tvrzení zajisté pádné argumenty. Napsalo se o nich už mnoho článků i knížek, a v zahraničí existuje dokonce speciální vědecký časopis s názvem *The Fibonacci Quartely*. Je to oficiální orgán Fibonacciho společnosti, vychází od r. 1963 a uveřejňuje články o Fibonacciho číslech i o příbuzné proble-

matice. Založení tohoto speciálního časopisu je jistě vzácná pocta dávnému matematikovi, vždyť uznejte sami, kolik ze současných vědeckých pracovníků se dočká toho, že po nich v budoucnu pojmenují vědecké periodikum?

Jak závisí n -tý člen Fibonacciho posloupnosti na čísle n ? Odpovíme si na to v příkladě, jenž následuje. Formule (4), která se tam vyskytuje, se nazývá *Binetův vzorec*.

Příklad 34. Přesvědčete se, že pro každé přirozené číslo n platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (4)$$

Řešení. Postupujeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ vzorec (4) po snadné úpravě dává $F_1 = 1$ a pro $n = 2$ vychází $F_2 = 1$, což je ve shodě s řádkem (2). Předpokládejme dále, že přirozené číslo n je větší než 2 a že (4) platí pro čísla $n - 2$ a $n - 1$. Dokážeme, že vzorec platí též pro přirozené číslo n . Pro stručnost vyjadřování položíme

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

a určíme součet $F_{n-1} + F_{n-2}$. Ten lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{n-2} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) - \beta^{n-2} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Povšimněme si, že

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \alpha^2,$$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \beta^2,$$

takže

$$F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n).$$

Výraz na pravé straně se však rovná hodnotě F_n vypočtené z dokazovaného Binetova vzorce (4). Tím jsme s důkazem hotovi.

Příklad jsme rozřešili, ale mnohý z čtenářů se nad ním možná zamyslí. Kde se vzal vzorec (4), který jsme před chvílí dokazovali? Zajisté se k němu nedá dojít pokusně, jak jsme na to zvyklí v mnoha úlohách na matematickou indukci. To opravdu ne, lze jej však odvodit, použijeme-li tzv. vytvořujících funkcí. Edice Škola mladých matematiků přinesla už jeden svazek, v němž se popisuje i toto odvození. Napsal jej F. Zítek a citujeme jej v seznamu literatury na konci této knížky. Jiný postup k odvození Binetova vzorce popisuje N. J. Vilenkin (v publikaci [12], str. 157—158). Tam se vytvořujících funkcí nepoužívá, a proto je tato cesta pro středoškolského studenta schůdnější. Zájemci se mohou v obou pramenech informovat, a my se zde tedy nebudeme naznačenou otázkou zabývat.

Po tomto malém výletu do historie a po matematických úvahách, jež jsou kombinatorice trochu vzdálené, se vrátíme opět ke kombinatorické problematice — ke kombinačním číslům a k Pascalovu trojúhelníku.

† Podívejme se na Pascalův trojúhelník a zkoumejme, kolikrát se v tomto schématu vyskytuje některé pevně

zvolené přirozené číslo m . Označme q_m počet míst, na nichž se v Pascalově trojúhelníku vyskytuje číslo m . Číslo 1 je možno ve schématu najít nekonečněkrát, což lze formálně vyjádřit zápisem $q_1 = \infty$. Číslo 2 je tu jednou ($q_2 = 1$), číslo 3 dvakrát ($q_3 = 2$) atd. Po vynaložení nepatrné námahy si sestavíme tuto tabulku:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
q_m	∞	1	2	2	2	3	2	2	2	4	2

Zde jsme sice zachytili jen několik hodnot q_m , avšak při sestavování tabulky si pravděpodobně každý uvědomí i jeden obecný závěr: Je vidět, že pro každé m větší než 1 je q_m vždycky konečné. Promyslete si sami, proč je tomu tak!

V Pascalově trojúhelníku můžeme při podrobnějším studiu najít opakované hodnoty binomických koeficientů i na místech, jež bychom mohli nazvat netriviální. Další řádky nám ukáží jeden případ.

Příklad 35. Přesvědčete se, že platí

$$\binom{16}{2} = \binom{10}{3}.$$

Řešení. Vypočteme

$$\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120,$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

a odtud už plyne tvrzení.

D. Singmaster před časem vyšetřoval opakované hodnoty binomických koeficientů*) a objevil přitom

*) Fibonacci Quart. 13 (1975), No. 4, 295—298.

zajímavou souvislost s Fibonacciho čísly F_i . Studoval totiž rovnici

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+2}, \quad (5)$$

v níž n, k mají být přirozená čísla ($n > k$), a ukázal, že (5) má nekonečně mnoho řešení. Další příklad nás o tom bude informovat.

Příklad 36. Rovnice (5) je splněna, položíme-li

$$n = F_{2i+2}F_{2i+3} - 1, \quad k = F_{2i}F_{2i+3} - 1,$$

kde i je libovolné přirozené číslo. Dokažte.

Řešení. Rovnici (5) lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k+1)} &= \\ = \frac{n(n-1)\dots(n-k)(n-k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k+1)(k+2)}, \end{aligned}$$

čili po úpravě

$$(n+1)(k+2) = (n-k)(n-k-1). \quad (6)$$

Do rovnice (6) máme dosadit za n, k Fibonacciho čísla uvedená v textu příkladu a máme se přesvědčit, že platí rovnost. Vypočteme tedy po řadě

$$\begin{aligned} n+1 &= F_{2i+2}F_{2i+3}, \\ k+2 &= F_{2i}F_{2i+3} + 1, \\ n-k &= (F_{2i+2} - F_{2i})F_{2i+3} = F_{2i+1}F_{2i+3}, \\ n-k-1 &= F_{2i+1}F_{2i+3} - 1. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do levé strany rovnice (6), dostáváme výraz

$$L = F_{2i+2}F_{2i+3}(F_{2i}F_{2i+3} + 1).$$

Použijeme-li vztahu, jehož důkaz jsme odsunuli za tuto kapitolu do úlohy 34, máme postupně

$$\begin{aligned} L &= F_{2i+3}((F_{2i+1}^2 - 1)F_{2i+3} + F_{2i+2}) = \\ &= F_{2i+3}(F_{2i+2}^2 F_{2i+3} - F_{2i+1}) = \\ &= F_{2i+1}F_{2i+3}(F_{2i+1}F_{2i+3} - 1). \end{aligned}$$

Tento poslední výraz však též dostaneme, dosadíme-li do pravé strany rovnice (6) příslušné hodnoty. Tím jsme tvrzení dokázali.

Končí pátá kapitola a následují tři úlohy o Fibonacciho číslech. Nezařadili jsme jich na tomto místě víc, i když zajímavých cvičení by se nabízela celá řada. Předpokládáme, že si všichni zájemci najdou další studijní materiál např. v knížkách [5], [12] a [13].

Úlohy

34. Pro každé přirozené číslo n platí

$$F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 - (-1)^n.$$

Dokažte.

35. Ověřte si, že platí

$$F_7^2 = F_6^2 + 3F_5^2 + 2(F_4^2 + F_3^2 + F_2^2 + F_1^2).$$

36. Pro každé celé nezáporné číslo k platí tyto vzorce:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k-1} + \binom{k+2}{k-2} + \dots + \binom{2k}{0} = F_{2k+1},$$

$$\binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k-1} + \binom{k+3}{k-2} + \dots + \binom{2k+1}{0} = F_{2k+2}.$$

Dokažte.

(V prvním vzorci se sčítají všechna kombinační čísla, v jejichž zápisu součet horního a dolního čísla je $2k$, ve druhém vzorci sčítáme všechna kombinační čísla, kde zmíněný součet je $2k + 1$.)