Faktoriály a kombinační čísla

4. kapitola. Binomická věta

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1985. pp. 49–63.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404116

4. kapitola

BINOMICKÁ VĚTA

Kombinační čísla se používají v tzv. *binomické větě*, jejíž znění si zde nejprve uvedeme (a která je čtenářům rovněž známa ze školy). *Binomická věta* zní:

Jsou-li a, b libovolná čísla (reálná nebo komplexní) a n přirozené číslo, platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \\ + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Její použití si opět procvičíme v příkladech.

Příklad 25. Pomocí binomické věty vypočtěte $(x^3 + 2y)^5$.

Řešení. Podle binomické věty platí

$$(x^3+2y)^5 = \binom{5}{0}x^{15} + \binom{5}{1}x^{12}.2y + \binom{5}{2}x^9.4y^2 + \\ + \binom{5}{3}x^6.8y^3 + \binom{5}{4}x^3.16y^4 + \binom{5}{5}.32y^5.$$

Binomické koeficienty $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \ldots, \binom{5}{5}$ můžeme určit třeba z Pascalova trojúhelníka:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Dostáváme tak

$$(x^3 + 2y)^5 = x^{15} + 10x^{12}y + 40x^9y^2 + 80x^6y^3 + 80x^3y^4 + \\ + 32y^5.$$

V dalším příkladě si dokážeme dva vztahy o kombinačních číslech, které jsou dosti užitečné v mnoha úvahách.

Příklad 26. Je dáno přirozené číslo n. Dokažte, že platí

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n;$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + $

$$+ (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

Řešení. Dvakrát použijeme vzorce, který známe z binomické věty. Jestliže sem dosadíme

$$a = 1, \qquad b = 1,$$

dostaneme okamžitě vztah, který je v řádku a). Dosadíme-li

$$a = 1, \qquad b = -1,$$

jako výsledek vychází vzorec b).

Následuje příklad, v němž se také vyskytují kombinační čísla, a vzorec, který nás tu bude zajímat, trochu připomíná vztah b) z minulého příkladu. V příkladě 27 si předvedeme dvě různé metody řešení.

Příklad 27. Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Dokažte, že platí

$$1.\binom{n}{1} - 2.\binom{n}{2} + 3.\binom{n}{3} - 4.\binom{n}{4} + \ldots + n(-1)^{n-1}\binom{n}{n} = 0.$$

Řešení. Vyjdeme ze vzorce

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \tag{1}$$

který platí pro všechny hodnoty

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Přesvědčíme se o tom snadno, když za kombinační čísla, která se ve vzorci (1) vyskytují, dosadíme podle definice. Upravíme-li nyní podle (1) levou stranu dokazovaného vztahu, můžeme z každého členu vytknout činitele n. V závorce pak zbývá výraz

$$\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1},$$

který se podle příkladu 26b) rovná nule. Tím řešení končí.

Jiné řešení. Můžeme se opřít i o jednoduché znalosti z diferenciálního počtu. Postupujeme takto:

Vyjdeme ze vzorce

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n,$$

kde n je přirozené číslo větší než 1 a x je proměnná. Derivujeme levou stranu a také stranu pravou, takže dostaneme

$$n(1+x)^{n-1} = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

Dosadíme-li sem $x = -1$, máme hned žádaný vzorec.

Nyní si odvodíme jednu nerovnost, kterou budeme v dalším potřebovat.

Příklad 28. Pro každé přirozené číslo n a pro každé nezáporné číslo x platí $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$. Dokažte!*)

Řešení. Nerovnost vyplývá z binomické věty

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \ldots$$

V místě, kde jsme napsali tři tečky, jsou členy**) tvaru $\binom{n}{k}x^k$, které jsou za našich předpokladů vesměs čísla nezáporná. Jestliže tedy na pravé straně tyto členy vynecháme, buď se tím tato strana zmenší, nebo se nezmění. Vždycky tedy platí

$$(1 + x)^n \geqq 1 + \binom{n}{1}x,$$

což po malé úpravě už dává žádanou nerovnost.

---

*) Nerovnost z tohoto příkladu se nazývá *Bernoulliho nerovnost.* Jméno nám připomíná známý švýcarský rod Bernoulliů, který velmi ovlivnil rozvoj matematiky a fyziky. V prvním díle Ilustrovaného encyklopedického slovníku (Praha 1980) se najdou tři zástupci této matematické rodiny: Daniel (1700—1782), Jakob (1654—1705) a Johann (1667—1748).
**) Pro $n = 1$ ovšem tyto členy už neexistují, ale v tom případě Bernoulliho nerovnost platí z triviálních důvodů.

Jiné řešení. Můžeme postupovat též matematickou indukcí. Než však přistoupíme k tomuto druhému řešení, připojíme ještě jednu poznámku. Obor čísel x z naší úlohy je možno totiž rozšířit a dokázat platnost Bernoulliho nerovnosti pro všechna reálná čísla $x > -1$.

Matematickou indukci začneme případem $n = 1$. Pak má nerovnost tvar

$$(1 + x)^1 \geqq 1 + x,$$

což je zřejmě správné. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo n platí

$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx.$$

Obě strany této nerovnosti znásobíme kladným číslem $(1 + x)$; vychází

$$(1 + x)^{n+1} \geqq (1 + nx)(1 + x). \tag{2}$$

Na pravé straně vynásobením dostáváme

$$1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2.$$

Číslo nx^2 je nezáporné, takže po jeho vynechání se příslušný výraz buď zmenší, nebo nezmění. Z toho plyne

$$(1 + nx)(1 + x) \geqq 1 + (n + 1)x.$$

Připojíme-li toto k nerovnosti (2), dostáváme

$$(1 + x)^{n+1} \geqq 1 + (n + 1)x.$$

Tím jsme však Bernoulliho nerovnost dokázali též pro $n + 1$ a důkaz je tím podán.*)

Bernoulliho nerovnost nám umožní odvodit jeden zajímavý vztah. Tomuto odvození je věnován příklad 29.

---

*) Rozmyslete si sami, zda Bernoulliho nerovnost platí též pro $x = -1$.

Příklad 29. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqq 2.$$

Řešení. Stačí dosadit $x = \frac{1}{n}$ do Bernoulliho nerovnosti. Po zkrácení už okamžitě dostáváme žádaný vztah. Prosíme čtenáře, aby si uvědomil, že znaménko $=$ v tomto vztahu platí právě tehdy, je-li $n = 1$.

S příkladem 29 úzce souvisí další nerovnost, která rovněž podává informaci o mocnině $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Příklad 30. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Řešení. Pro $n = 1$ dostáváme

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < 3,$$

takže nerovnost skutečně platí. V dalším textu budeme předpokládat, že přirozené číslo n je větší než 1. Podle binomické věty máme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{n^3} +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2.\ \ldots\ .n} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Ve zlomcích

$$\frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots, \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}$$

upravíme čitatele tím, že zde každého činitele nahradíme číslem n. Tím se každý z těchto zlomků zvětší a přejde na tvar

$$\frac{n^2}{2!}, \frac{n^3}{3!}, \ldots, \frac{n^n}{n!}.$$

Dosadíme-li tyto zvětšené hodnoty do našeho výpočtu, vidíme, že můžeme krátit, a dostáváme tak nerovnost

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \tag{3}$$

Zbývá odhadnout číslo

$$a = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Zde ve jmenovatelích budeme místo čísel $2!, 3!, \ldots, n!$ klást čísla $2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Tím se zřejmě (počínaje od druhého členu) každý jmenovatel zmenší a pro číslo a tím nacházíme odhad

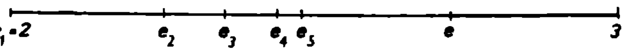
$$a < \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

Je tedy $a < 1$. Vrátíme-li se ke vzorci (3) a použijeme-li zde výsledku právě dosaženého, dostáváme tím už okamžitě nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

☛ **Zůstaňme ještě na chvíli u příkladů 29 a 30.** Zde se vyskytuje výraz

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

který má v matematické analýze dosti časté upotřebení. Dosazujeme-li totiž do e_n po řadě $n = 1, 2, 3, \ldots$, dostáváme tak posloupnost čísel, jež jsou — jak jsme právě viděli — vesměs větší než číslo 2 nebo tomuto číslu rovna a menší než číslo 3. Na obr. 4 vidíme část číselné osy



Obr. 4

a na ní jsme zobrazili část naší posloupnosti, to je čísla e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Dá se dokázat, že tato posloupnost je rostoucí, tj. že pro každé n platí $e_n < e_{n+1}$. Už z názoru je patrné, že se tato čísla e_n musí „hromadit" kolem určité hodnoty; toto „mezní" číslo označujeme písmenem e. Výpočet ukazuje, že je e $\doteq$ 2,71828. Mnozí naši čtenáři jistě umějí počítat s limitami, a vědí proto, že se v takovém případě mluví o *konvergenci* posloupnosti e_1, e_2, e_3, ... a že se píše

$$\lim_{n \to \infty} e_n = e .$$

Říkáme, že číslo e je *limitou* posloupnosti e_1, e_2, e_3, ... *)

Nerovnosti, které jsme až dosud probrali, nám umožní odvodit některé věty o faktoriálech. Těmto odvozením jsou věnovány další příklady.

Příklad 31. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

---

*) Čtenáře ediční řady Škola mladých matematiků, kteří se zajímají o pojem limity, odkazujeme na sv. 43 s názvem *Posloupnosti a řady*. Knížku napsal J. Jarník a několik stránek je v ní věnováno také úvahám vedoucím k číslu e.

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ máme

$$1! > \frac{1}{3},$$

což zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo n uvažovaná nerovnost platí, a budeme dokazovat nerovnost

$$(n + 1)! > \left(\frac{n + 1}{3}\right)^{n+1}. \tag{4}$$

Levou stranu nerovnosti (4) lze upravovat podle indukčního předpokladu takto:

$$(n + 1)! = n!.(n + 1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n + 1). \tag{5}$$

Abychom dokázali vztah (4), musíme poslední výraz v řádku (5) porovnat s číslem $\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$. Ptejme se, zda může platit

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n (n + 1) \leqq \left(\frac{n + 1}{3}\right)^{n+1}. \tag{6}$$

Kdyby tato nerovnost platila, pak bychom po vynásobení (kladným) číslem 3^{n+1} dostali

$$3n^n(n + 1) \leqq (n + 1)^{n+1}.$$

Dále lze krátit číslem $n + 1$, což dává

$$3n^n \leqq (n + 1)^n.$$

Dělíme-li obě strany číslem n^n, pak po snadné úpravě pravé strany vychází

$$3 \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

To však je spor s tím, co jsme dokázali v předcházejícím příkladě. Vztah (6) tedy neplatí a naopak je správná nerovnost

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n (n + 1) > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Připojíme-li tuto nerovnost k řádku (5), dostáváme závěrem vztah (4), čímž je hotov druhý indukční krok. Důkaz uvedené nerovnosti je tím podán.

Příklad 32. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 6$ platí

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n. \tag{7}$$

Řešení. I zde použijeme matematické indukce, ale ta začne u čísla $n = 6$. Pro tento případ totiž dostáváme $6! < 3^6$, čili $720 < 729$, což je zřejmě správná nerovnost. Předpokládejme tedy, že nerovnost (7) platí pro některé přirozené číslo $n \geqq 6$, a budeme dokazovat obdobnou nerovnost pro číslo $n + 1$. Platí

$$(n + 1)! = n!.(n + 1) < \left(\frac{n}{2}\right)^n (n + 1). \tag{8}$$

Porovnáme nyní čísla

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n + 1) \quad \text{a} \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Kdyby platilo

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n + 1) > \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1},$$

pak by odtud plynulo

$$2.n^n(n+1) > (n+1)^{n+1},$$

čili po další malé úpravě

$$2.n^n > (n+1)^n.$$

Obě strany bychom dělili číslem n^n a dostali bychom

$$2 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

To však je spor s příkladem 29. Našli jsme tak vztah

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1},$$

který připojíme k (8). Tak vychází

$$(n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Tím jsme prokázali platnost nerovnosti také pro číslo $n + 1$ a důkaz je hotov.

Ještě několik slov k předcházejícím dvěma příkladům. Výsledky, s kterými jsme se tam seznámili, můžeme shrnout do stručného vyjádření

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \tag{9}$$

což platí pro všechna „dostatečně velká" přirozená čísla n.

Z počítání s faktoriály víme, že číslo $n!$ vzrůstá, dosazujeme-li za n po řadě čísla 1, 2, 3, ... Vyjádření (9) ukazuje, že $n!$ vzrůstá „rychleji" než $\left(\frac{n}{3}\right)^n$ a „pomaleji" než $\left(\frac{n}{2}\right)^n$. Tak např. pro $n = 300$ máme odhad*)

$$100^{300} < 300! < 150^{300}.$$

Platí $100^{300} = 10^{600}$, což je číslo, které má (v desítkové soustavě) celkem 601 místo. Z toho je tedy patrné, že číslo 300! má také alespoň 601 místo. Z druhé strany jsme číslo 300! odhadli číslem 150^{300}. Abychom si uvědomili, kolik číslic má (v desítkové soustavě) číslo 150^{300}, budeme počítat logaritmicky. V logaritmických tabulkách najdeme, že $\log 150 \doteq 2{,}1761$. Musíme si ovšem uvědomit, že toto je neúplné číslo, které zastupuje vyjádření

$$2{,}17605 \leqq \log 150 \leqq 2{,}17615.$$

Odtud plyne

$$300 . 2{,}17605 \leqq 300 . \log 150 \leqq 300 . 2{,}17615,$$

čili

$$652{,}815 \leqq \log 150^{300} \leqq 652{,}845.$$

Toto vyjádření však znamená, že číslo 150^{300} má (v desítkové soustavě) právě 653 číslice. Celkem je tedy vidět z řádku (9), že číslo 300! má nejvýše 653 číslice.

Souhrnně lze tedy říci, že číslo 300! má alespoň 601 číslici a nejvýše 653 číslice. Tento odhad je ovšem jen velmi hrubý; kdybychom chtěli určit přesný počet číslic v čísle 300!, potřebovali bychom k tomu zřejmě velmi zdlouhavý numerický výpočet. V integrálním počtu se odvozuje tzv. *Stirlingův vzorec*, který dovoluje určit číslo $n!$ poměrně dosti přesně, jestliže číslo n je „dostatečně velké". V tomto vzorci se vyskytuje číslo e, o kterém už byla řeč na stránkách této knížky. Stirlingův vzorec má tvar

---

*) Srovnej též výsledek, k němuž jsme došli v příkladě 3.

$$n! \doteq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Ukázali jsme si tedy, že binomická věta slouží k odvození některých vztahů, jež jsou dosti užitečné i při numerickém počítání. Kapitolu ukončíme jedním příkladem, který nám osvětlí užitečnost binomické věty i v teorii čísel.

Příklad 33. Nechť p je libovolné prvočíslo a n libovolné přirozené číslo. Potom rozdíl $n^p - n$ je dělitelný prvočíslem p. Dokažte.

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. Přitom ovšem budeme prvočíslo p pokládat za pevné. Pro $n = 1$ je uvedený rozdíl roven nule, takže tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení je dokázáno pro některé přirozené číslo n, a budeme je dokazovat pro číslo $n + 1$. Budeme tedy pracovat s výrazem

$$(n + 1)^p - (n + 1),$$

který upravíme podle binomické věty na tvar

$$(n^p - n) + \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \binom{p}{3} n^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-1} n.$$

Výraz $n^p - n$ je dělitelný prvočíslem p podle indukčního předpokladu, zatímco každý ze zbývajících členů je číslem p dělitelný podle toho, co jsme dokázali v příkladě 14. Je tedy také rozdíl

$$(n + 1)^p - (n + 1)$$

dělitelný prvočíslem p. Skončil druhý indukční krok a tím i celý důkaz.

Poučka, s níž jsme se setkali v předcházejícím příkladě, se nazývá *malá věta Fermatova*. Francouzský matematik P. de Fermat (1601—1665) byl původním povoláním vlastně právník a matematikou se začal zabývat až po své třicítce. Vynikl zvláště v číselné teorii, ale publikoval jen málo článků. Většina jeho objevů se najde v jeho korespondenci s tehdejšími významnými osobnostmi a také v poznámkách, které si psal při studiu Diofantovy učebnice algebry. Do této knihy si Fermat poznamenal i jedno tvrzení, které se dnes nazývá *velká věta Fermatova*. Tvrzení se týká rovnice

$$x^n + y^n = z^n,$$

kde n je dané přirozené číslo. Fermat se zabýval případem $n \geqq 3$ a pokoušel se dokázat, že uvedená rovnice tu není řešitelná přirozenými čísly x, y, z. Ze zápisu, který se zachoval, je vidět, že se Fermatovi nepodařilo najít žádné řešení. Domníval se dokonce, že našel důkaz pro nemožnost takového řešení. V úvaze měl však jistě nějakou chybu, neboť tento problém nebyl dodnes rozřešen, i když se velkou větou Fermatovou zabývalo mnoho vynikajících matematiků. Přitom současná matematika má k dispozici účinnější metody pro řešení číselně teoretických problémů, než měla doba Fermatova.*)

---

*) Velká věta Fermatova se dostala i do krásné literatury. Karel Matěj Čapek-Chod (1860—1927) má ve svém díle povídku Experiment zařazenou do sbírky *Ad hoc*! Děj se odehrává za první světové války a hrdinou povídky je odborný učitel, který právě v první válečný den rozřešil Fermatův problém. Těšil se na odměnu sto tisíc marek, která byla za vyřešení vypsána, ale peněz se nedočkal. Padl ve válce a řešení se ztratilo. Bylo vůbec správné? — Povídku před časem vysílal i Československý rozhlas.

Úlohy

28. Vypočtěte: a) $(1+\sqrt{3})^6$; b) $(1+i)^7$.

29. Je dáno přirozené číslo n a reálné číslo x, o němž platí $|x| \leqq 1$. Dokažte nerovnost

$$(1+x)^n + (1-x)^n \geqq 2.$$

30. S přesností na dvě desetinná místa vypočtěte

$$e_{100} = 1{,}01^{100}.$$

31. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí*)

$$n! \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

32. Podle Stirlingova vzorce vypočtěte přibližně 300!.

33. Nechť m, n jsou daná přirozená čísla. Potom existuje přirozené číslo p tak, že platí

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}.$$

Dokažte.

---

*) Srovnej tuto úlohu s příkladem 32.