1. kapitola

FAKTORIÁL PŘIROZENÉHO ČÍSLA

Aby nevzniklo nedorozumění, připomínáme hned na začátku této knížky, že *přirozeným číslem* zde rozumíme číslo celé kladné. Přirozená čísla jsou tedy

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

Na střední škole se definuje faktoriál přirozeného čísla, což je pojem užitečný v mnoha kombinatorických úvahách i v jiných částech matematiky. Jeho potřebnost si uvědomíme při četbě dalších stránek. Je-li dáno přirozené číslo n větší než 1, pak součin

$$1.2.3.4 \ldots (n-1).n$$

zapisujeme stručně $n!$ a čteme *n faktoriál.* Definici symbolu $n!$ rozšiřujeme i na případy $n = 0$ a $n = 1$ a klademe

$$0! = 1, \qquad 1! = 1.$$

Pro malé hodnoty n je možno faktoriály celkem snadno vypočítat. Výsledek ukazuje tato tabulka:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

Podrobnější přehled faktoriálů se najde ve většině matematických tabulek. Tak např. *Pětimístné tabulky logaritmické,* které před lety sestavili M. Valouch a M. A. Valouch pro potřeby některých středních škol, uvádějí faktoriály všech přirozených čísel od 1 do 30 a také jejich rozklady v součin prvočísel. Kromě toho jsou v této knize rovněž dekadické logaritmy faktoriálů až do log 200! s mantisou zaokrouhlenou na deset desetinných míst.

Pro účely vědecké však mnohdy ani taková tabulka nestačí. V r. 1944 vydal H. S. Uhler knížku s názvem *Exact values of the first* 200 *factorials*, kde shrnul hodnoty $n!$ pro přirozená čísla $n \leq 200$. Tentýž autor vypočetl pak ještě později $n!$ pro čísla n z intervalu od 201 do 300, a roku 1956 uveřejnil v časopise Scripta Mathematica dokonce hodnotu 1000!, což je číslo mající v desítkové soustavě 2568 cifer. To ovšem už můžeme označit za počtářskou kuriozitu a nemá praktickou cenu, aby se někdo snažil tento výkon překonat. Není totiž tak důležité, abychom znali přesné hodnoty velkých faktoriálů, daleko užitečnější je poznat základní vlastnosti tohoto matematického pojmu a umět s ním pracovat.

Abychom se s faktoriály blíže seznámili, začneme několika příklady.

Příklad 1. Rozhodněte, které ze dvou čísel

$$A = 500! + 503!, \qquad B = 501! + 502!$$

je větší.

Řešení. Zde se vyskytují příliš velká čísla, a nemůžeme se tedy o výsledku přesvědčit přímým výpočtem. Pomůžeme si proto jinak. První z čísel vyjádříme ve tvaru

$$500! + 503! = 500!\,(1 + 501.502.503)$$

a druhé ve tvaru

$$501! + 502! = 500!\,(501 + 501.502).$$

Stačí nyní porovnat číslo

$$x = 1 + 501 . 502 . 503$$

s číslem

$$y = 501 + 501 . 502 .$$

Ani zde však nemusíme ještě numericky počítat, ale pomůžeme si opět jednoduchým obratem. Ve výrazu pro y vytkneme 501, takže máme

$$y = 501(1 + 502) = 501 . 503 .$$

Dále je zřejmé, že

$$x > 501 . 502 . 503 ,$$

takže máme $x > y$.

Odpověď. Číslo A je větší než číslo B.

Podíváme se nyní na jiný příklad.

Příklad 2. Nechť n je přirozené číslo. Ověřte si, že platí

$$\frac{(n - 1)!}{(n + 1)!} + \frac{(2n + 1)!}{(2n + 3)!} = \frac{5n + 6}{2n\,(n + 1)\,(2n + 3)} .$$

Řešení. První zlomek na levé straně můžeme zkrátit číslem $(n - 1)!$, druhý číslem $(2n + 1)!$. Levá strana uvažovaného vzorce má pak tvar

$$\frac{1}{n(n + 1)} + \frac{1}{2(n + 1)\,(2n + 3)} .$$

Uvedeme zlomky ještě na společného jmenovatele, jímž je číslo

$$2n(n + 1)\,(2n + 3) .$$

Po úpravě dostáváme výsledek

$$\frac{5n+6}{2n(n+1)(2n+3)},$$

který se rovná pravé straně dokazovaného vzorce. Proveďte si pomocné výpočty sami podrobně.

Další dva příklady, v nichž se pracuje s faktoriálem, patří tak trochu do číselné teorie. O tom, který hned následuje, bude ještě zmínka v dalších úvahách.

Příklad 3. Určete, kolika nulami končí (při zápise v desítkové soustavě) číslo 300!.

Řešení. Číslo 300! je součinem všech přirozených čísel od 1 do 300. Všimněme si zde těch činitelů, které jsou dělitelné pěti. Jsou to čísla 5, 10, 15, 20, ..., 295, 300. Těchto čísel je zřejmě 60. Musíme si však uvědomit, že mezi těmito uvažovanými čísly byla zahrnuta také čísla 25, 50, 75 ..., 275, 300, z nichž každé je dělitelné číslem 5^2. Tato skupina čísel obsahuje zřejmě 12 prvků. Konečně je nutno uvážit, že jsou zde čísla 125 a 250, jež jsou dělitelná číslem 5^3.

Celkem jsme tedy zjistili, že číslo 300! je dělitelné mocninou $5^{60+12+2}$, tj. 5^{74}. Z naší úvahy též vyplývá, že 300! není dělitelné mocninou 5^{75}. Polovina z čísel 1, 2, 3, ..., 300 je sudých, takže 300! je jistě dělitelné mocninou 2^{150}. Z toho vyplývá, že 300! je dělitelné mocninou 10^{74}, avšak není dělitelné mocninou 10^{75}.

Odpověď. Číslo 300! končí 74 nulami.

Příklad 4. Ukažte, že číslo $18! + 1$ je dělitelné číslem 23.

Řešení. Máme-li po ruce vhodné tabulky, můžeme v nich vyhledat, že platí

$$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000.$$

Pak budeme dělit

$$6\,402\,373\,705\,728\,001 : 23.$$

Čtenář vidí, že tato cesta pro důkaz našeho tvrzení je dosti pracná, i když jsme většinu námahy „přenechali“ tabulkám. Nemáme-li po ruce příslušné tabulky, musíme hledat jiný způsob řešení. Ukážeme si, jak lze postupovat v tomto případě.

Zřejmě je $4! = 24 = 23 + 1$

a dále*)

$$6! = (4!).30 = (23 + 1).(23 + 7) = 23^2 + 8.23 + 7 = 23a + 7.$$

Podobně počítáme dále

$$\begin{aligned}
8! &= (6!).56 = (23a + 7).(23.2 + 10) = 23b + 1,\\
10! &= (8!).90 = (23b + 1).(23.3 + 21) = 23c + 21,\\
12! &= (10!).132 = (23c + 21).(23.5 + 17) = 23d + 12,\\
14! &= (12!).182 = (23d + 12).(23.7 + 21) = 23e + 22,\\
16! &= (14!).240 = (23e + 22).(23.10 + 10) = 23f + 13,\\
18! &= (16!).306 = (23f + 13).(23.13 + 7) = 23g + 22.
\end{aligned}$$

Závěrem tedy nacházíme

$$18! + 1 = 23g + 23 = 23(g + 1),$$

čímž je prokázáno, že číslo $18! + 1$ je dělitelné číslem 23.

Otázka, s níž jsme se setkali v předcházejícím příkladě, souvisí s tzv. Wilsonovou větou**), která zní takto:

---

*) Písmena $a, b, c, \ldots, g$ v další úvaze znamenají vhodná přirozená čísla.

**) Název věty připomíná Johna Wilsona (1741—1793).

Číslo $(p - 1)! + 1$ *je dělitelné číslem* p *právě tehdy, je-li* p *prvočíslo.*

Toto tvrzení zde nebudeme dokazovat, neboť bychom se tím dostali příliš daleko do oblasti číselné teorie a odbočili tak od cíle, který si klade tato knížka. Všimněme si jen, co plyne z Wilsonovy věty pro číslo $18! + 1$. Číslo 19 je prvočíslo, a je tedy $18! + 1$ dělitelné číslem 19. Připojíme-li to k výsledku minulého příkladu, dostáváme: Číslo $18! + 1$ je dělitelné součinem $19 . 23$ čili číslem 437.

Připomeňme si nyní jeden důležitý kombinatorický pojem, který se bude v dalších úvahách častěji vyskytovat. Je to pojem pořadí. Nechť n je přirozené číslo a nechť je dána konečná množina N složená z n prvků. *Pořadí**) těchto n prvků je uspořádaná n-tice obsahující každý prvek množiny N právě jednou. Počet všech pořadí n prvků budeme označovat $P(n)$. Dá se dokázat, že pro $P(n)$ platí tento vzorec:

$$P(n) = n!.$$

Vyřešíme si dva ilustrační příklady.

Příklad 5. Je dána množina

$$\{1, 2, 3, \ldots, m - 1, m\}.$$

Kolik můžeme z těchto m prvků sestavit pořadí takových, že lichá čísla jsou na místech lichých a sudá na místech sudých? (Lichým místem v pořadí $(a_1, a_2, \ldots,$

---

*) Jak jsme řekli už v předmluvě, ve školských učebnicích se pro pořadí užívá též název *permutace*. Protože toto slovo slouží v algebře v trochu odlišném smyslu, nemluvíme na těchto stránkách o permutacích, ale o pořadích.

$\ldots, a_m$) rozumíme to, jež přísluší prvku a_i s lichým indexem i. Obdobně definujeme místo sudé.)

Řešení. Počet všech uvažovaných pořadí označme $\overline{P}(m)$ a rozlišujme dva případy. Nejprve nechť m je sudé a pak nechť m je liché.

a) Je-li $m = 2k$, máme v dané množině k lichých čísel

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2k - 1$$

a také k sudých čísel

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 2k.$$

Nejdříve umístěme lichá čísla na lichá místa; to je možné $k!$ způsoby. Na sudých místech mají být čísla sudá a ta můžeme umístit také $k!$ způsoby. Pro celkový počet pořadí tedy máme

$$\overline{P}(m) = k!\,.\,k! = (k!)^2.$$

b) Je-li $m = 2k - 1$, pak v uvažované množině existuje k lichých čísel

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2k - 1;$$

ta můžeme na lichá místa zařadit $k!$ způsoby. Sudých čísel

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 2k - 2$$

je pouze $k - 1$, takže k jejich zařazení máme $(k - 1)!$ možností. Vychází tedy

$$\overline{P}(m) = k!\,.\,(k - 1)!\,.$$

Odpověď. Je-li m sudé, potom platí

$$\overline{P}(m) = \left(\left(\frac{m}{2}\right)!\right)^2;$$

je-li m liché, je

$$\overline{P}(m) = \left(\frac{m+1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right)!.$$

Čtenář si může uvědomit, že ze vzorce $P(m) = m!$ a ze dvou vzorců právě odvozených plynou tyto nerovnosti:

$$m! > \left(\left(\frac{m}{2}\right)!\right)^2 \text{ pro } m \text{ sudé;}$$

$$m! \geqq \left(\frac{m+1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right)! \quad \text{pro } m \text{ liché.}$$

Rozmyslete si sami, proč v první z těchto nerovností je znaménko $>$, kdežto ve druhé $\geqq$.

Nyní jeden příklad s geometrickým námětem.

Příklad 6. V rovině je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (kde $n \geqq 4$) se všemi svými úhlopříčkami. Kolika způsoby můžeme projít všechny jeho vrcholy tak, že vyjdeme z vrcholu A_1, postupujeme po stranách nebo úhlopříčkách, každý z vrcholů

$$A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{n-1}$$

projdeme právě jednou a skončíme ve vrcholu A_n?

Řešení. Tvoříme vlastně pořadí z n prvků (vrcholů mnohoúhelníka), přičemž A_1 se vždycky vyskytuje na prvním místě a A_n na místě posledním. Dva prvky jsou tedy pevné, kdežto zbývající $n - 2$ prvky nikoliv. Hledaný počet je tedy

$$P(n-2) = (n-2)!.$$

Vyšli jsme z konečné množiny N, která měla n prvků, a definovali jsme pořadí těchto n prvků jako uspořádanou n-tici obsahující každý prvek množiny N právě jednou. Často se vyskytuje jiný příklad: Zkoumáme uspořádané n-tice, v nichž se jeden prvek opakuje r-krát ($2 \leqq r \leqq n$) a každý další právě jednou. Množina, ze které tyto n-tice vybíráme, má tedy $n - r + 1$ prvků. Jak víme ze školy, pro počet těchto *pořadí s opakováním**) platí vzorec

$$P(n; r) = \frac{n!}{r!}.$$

Dejme tomu, že zkoumáme uspořádané n-tice, v nichž se jeden z prvků opakuje r-krát, druhý s-krát ($r \geqq 2$, $s \geqq 2$, $r + s \leqq n$) a každý další prvek právě jednou. Množina, z níž n-tice vybíráme, má tedy $n - r - s + 2$ prvků. Potom počet těchto pořadí s opakováním je

$$P(n; r, s) = \frac{n!}{r!\,.\,s!}.$$

Pořadí s opakováním si připomeňme na jednom příkladě.

Příklad 7. Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných devíti, která můžeme napsat užitím číslic

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7.$$

Přitom se mohou číslice v čísle i opakovat.

Řešení. Vzpomeneme si nejprve na znak dělitelnosti číslem 9. Číslo (v desítkové soustavě) je dělitelné devíti právě tehdy, je-li jeho ciferný součet dělitelný devíti.

---

*) Je-li to nutné, můžeme při pořadí, v nichž se každý prvek vyskytuje právě jednou, výslovně zdůraznit, že jde o pořadí bezopakování.

V našem případě přicházejí v úvahu pouze ciferné součty 9 nebo 18, neboť ciferný součet 27 nelze pomocí daných číslic vytvořit (a samozřejmě nemůžeme vytvořit ani součty 36, 45, ...).

Kolika způsoby lze v našem případě vytvořit součet 9? Nejprve nebudeme hledět na pořadí a v zápisech uspořádáme jednotlivé sčítance podle velikosti „sestupně". Platí

$$9 = 7 + 2 + 0 + 0, \quad 9 = 7 + 1 + 1 + 0,$$
$$9 = 5 + 2 + 2 + 0, \quad 9 = 5 + 2 + 1 + 1.$$

Podobně pro součet 18 najdeme

$$18 = 7 + 7 + 2 + 2, \quad 18 = 7 + 5 + 5 + 1.$$

Vraťme se tedy k zápisu $9 = 7 + 2 + 0 + 0$. Kolik čtyřciferných čísel lze napsat, máme-li užít číslic 7, 2, 0, 0? Zde tvoříme pořadí s opakováním, v nichž se jeden prvek opakuje dvakrát. Počet těchto pořadí určuje číslo

$$\frac{4!}{2!} = 12.$$

Z tohoto počtu musíme ovšem vyloučit čtyřciferné zápisy, jež mají na prvním místě zleva nulu. Kolik je těchto případů? Ze zbývajících tří prvků 0, 2 a 7 tvoříme trojciferné zápisy a těch je $3! = 6$. Zápisu

$$9 = 7 + 2 + 0 + 0$$

odpovídá tedy $12 - 6 = 6$ případů.

Podobně zjistíme, že zápisu

$$9 = 7 + 1 + 1 + 0$$

odpovídá počet

$$\frac{4!}{2!} - \frac{3!}{2!} = 12 - 3 = 9.$$

Stejný výsledek dostaneme zřejmě i pro zápis

$$9 = 5 + 2 + 2 + 0 .$$

Kolik čtyřciferných čísel se odvodí ze zápisu

$$9 = 5 + 2 + 1 + 1 ?$$

Je jich zřejmě

$$\frac{4!}{2!} = 12 .$$

Zatím jsme tedy zjistili, že se pro ciferný součet 9 dá najít celkem 36 případů.

Nyní uvažujme o ciferném součtu 18. Vyjádření

$$18 = 7 + 7 + 2 + 2$$

odpovídají zápisy, v nichž se sedmička opakuje dvakrát a dvojka také dvakrát. Počet takových čtyřciferných čísel se tedy rovná číslu

$$\frac{4!}{2!.2!} = 6 .$$

Konečně vztahu

$$18 = 7 + 5 + 5 + 1$$

odpovídá

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

případů. Pro ciferný součet 18 jsme tedy celkem našli 18 případů.

Odpověď. Z daných číslic se dá sestavit celkem 54 čtyřciferných čísel dělitelných devíti.

Připomeňme si další kombinatorický pojem. Dejme tomu, že jsou dána přirozená čísla k, n, pro něž platí

$k \leqq n$. Nechť je dána konečná množina N složená z n prvků; *k-prvková variace* z n prvků množiny N je uspořádaná k-tice obsahující každý prvek množiny N nejvýše jednou. Počet všech k-prvkových variací z n prvků označíme $V_k(n)$. Dá se dokázat, že pro $k > 1$ platí

$$V_k(n) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1)$$

a pro $k = 1$ je

$$V_k(n) = n.$$

Použijeme-li faktoriálů, můžeme číslo $V_k(n)$ vyjádřit takto:

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Podle starší terminologie se k-prvkovým variacím z n prvků říká *variace k-té třídy z n prvků*. Toto slovní vyjádření budeme v této knížce též občas používat.

Srovnáme-li definici variací s definicí pořadí, kterou jsme zde uvedli o několik stránek dříve, vidíme, že pořadí (bez opakování) jsou zvláštním případem variací. Dostaneme je pro $k = n$.

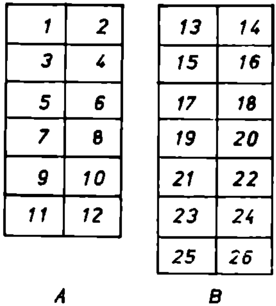
Následuje jeden příklad o variacích.

Příklad 8. Třída, v níž je 26 míst (obr. 1), má 24 žáků. Kolika způsoby je možno sestavit zasedací pořádek?

Řešení. Představme si nejdříve, že jsme jednotlivá místa ve třídě očíslovali tak, jak ukazuje obr. 1. Tato místa nechť tvoří množinu N. Dále si představme, že i žáci jsou po řadě očíslováni, takže dostanou např. označení

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_{24}.$$

Vytvořit nějaký zasedací pořádek znamená přiřadit každému žáku z_i nějaký prvek množiny N čili sestrojit



Obr. 1

24-prvkovou variaci z 26 prvků. Počet všech těchto variací je

$$V_{24}(26) = 26.25.24 \ldots 5.4.3 = \frac{26!}{2!}.$$

Nyní k numerickému výpočtu. Podle tabulek je

$$26! = 403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000,$$

takže pro hledaný počet máme výsledek

$$201\,645\,730\,563\,302\,817\,792\,000\,000.$$

Příklad 8 můžeme ovšem řešit i tak, že použijeme pořadí s opakováním. Rozmyslete si postup sami.

Tuto kapitolu ukončí příklad trochu jiného druhu. Budeme se zabývat rovnicí, v níž za neznámé x, y, z, t připouštíme jen přirozená čísla. Jak snad víte, v číselné teorii se taková úloha nazývá diofantovská rovnice*). V té, kterou budeme rozebírat, se vyskytnou faktoriály.

---

*) Označení diofantovská rovnice nám připomíná Diofanta z Alexandrie, který žil okolo r. 275 n. l. Někdy se neznámé v diofantovské rovnici omezují též na čísla celá, jindy na celá nezáporná apod.

Příklad 9 je trochu myšlenkově náročnější, a proto doporučujeme, abyste si řešení dobře promysleli.

Příklad 9. Je dána rovnice

$$x!\,.\,y!\,.\,z! = t!\,. \qquad (1)$$

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho čtveřic přirozených čísel x, y, z, t větších než 1 takových, že vyhovují rovnici (1).

Řešení. Zvolme libovolné přirozené číslo $n > 2$*) a položme $x = n$, $y = n! - 1$, $z = (n!)! - 1$. Součin $x!\,.\,y!$ lze pak psát jako

$$n!\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n! - 2)\,(n! - 1) = (n!)!\,.$$

Podobně pro $x!\,y!\,z!$ máme

$$[(n!)!]\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots [(n!)! - 2]\,.\,[(n!)! - 1] = [(n!)!]!\,.$$

Pro takto zvolenou trojici přirozených čísel x, y, z vychází tedy $t = (n!)!$. Protože takovou konstrukci lze provést pro libovolné přirozené číslo $n > 2$, je vidět, že rovnici (1) skutečně vyhovuje nekonečně mnoho čtveřic přirozených čísel větších než 1.

Zamysleme se ještě nad předcházejícím příkladem. V řešení jsme si ukázali, že existuje nekonečně mnoho požadovaných čtveřic, ale nezabývali jsme se otázkou, zda jsme postupem uvedeným v předcházejících řádcích vyčerpali všechna řešení rovnice (1). Je zřejmé, že jsme mohli začít třeba tak, že položíme např.

$$y = n, \quad x = n! - 1, \quad z = (n!)! - 1\,,$$

což znamená vlastně záměnu písmen x, y, z v předcháze-

---

*) Z další úvahy pochopíme, proč se zde omezujeme na případ $n > 2$. Je to proto, aby v úvaze vystupovala jen přirozená čísla větší než 1.

jící konstrukci. To je jedna možnost, ale snad existují i řešení jiného typu (podívejte se na úlohu 1, která následuje za touto kapitolou). Kdybychom hledali všechny čtveřice přirozených čísel x, y, z, t, jež vyhovují rovnici (1), byl by to určitě složitější a obtížnější úkol než to, čím se zabýval náš příklad.

Úlohy

1. Ověřte si, že platí tyto rovnosti:

a) $7!.3!.3!.2! = 9!$;
b) $7!.6! = 10!$;
c) $7!.5!.3! = 10!$;
d) $14!.5!.2! = 16!$.

2. Rozhodněte, které ze dvou čísel $500!.503!$ a $501!.502!$ je větší.

3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

a) $n!.(n+3)! > (n+1)!.(n+2)!$;
b) $n! + (n+3)! > (n+1)! + (n+2)!$.

4. Dokažte správnost těchto vzorců:*)

a) $(1!).1 + (2!).2 + (3!).3 + \ldots + (n!).n = (n+1)! - 1$;

b) $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$.

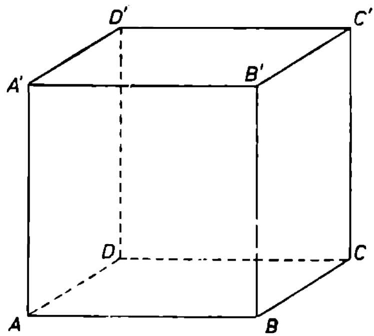
5. Mám sedm knih českých a pět slovenských. Kolika způsoby je mohu postavit do řady na poličku tak, že

*) Zde n značí přirozené číslo.

nejprve jsou zařazeny všechny knihy české a pak všechny slovenské?

6. Vrcholy konvexního n-úhelníka z příkladu 6 máme projít tak, že začneme v A_1, postupujeme po stranách nebo úhlopříčkách, každý z vrcholů $A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n$ projdeme právě jednou a skončíme v A_1. Kolika způsoby je to možné?

7. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ (viz obr. 2). Rozhodněte, zda můžeme projít její vrcholy tak, že vyjdeme z A, jdeme po hranách krychle, každý z vrcholů B, D, A', B', C', D' projdeme právě jednou a skončíme ve vrcholu C.*)



Obr. 2

8. Je dána rovnice

$$x!.y!.z!.t! = u!.$$

---

*) V této úloze hledáme tedy pořadí osmi prvků A, B, C, D, A', B', C', D' taková, že A stojí na místě prvním, C na místě osmém a každé dva po sobě jdoucí prvky znamenají přesně to, že v obr. 2 existuje mezi příslušnými vrcholy hrana.

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho pětic přirozených čísel x, y, z, t, u větších než 1 takových, že vyhovují dané rovnici.

9. Je dána rovnice

$$x! + y! = z!.$$

Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z, jež vyhovují dané rovnici.

10. Určete nejmenší přirozené číslo x, které má tuto vlastnost: Není možno najít žádné přirozené číslo n tak, že $n!$ má v desítkové soustavě právě x číslic.