Funkcionální rovnice

Kapitola druhá: Cauchyho metoda

Kapitola druhá

CAUCHYHO METODA

1. HUSTÉ MNOŽINY NA ČÍSELNÉ OSE

Než budeme formulovat a objasňovat Cauchyho metodu řešení funkcionálních rovnic, uvedeme několik definic a vět z matematické analýzy.

Množina A reálných čísel se nazývá *hustá*, jestliže každý interval, který má nenulovou délku (tj. který nezdegeneruje v jeden jediný bod), obsahuje prvky množiny A.

Věta. *Množina Q racionálních čísel je hustá množina.*

Důkaz. Budiž $\Delta = (a, b)$ libovolný interval na číselné ose. Označme ε jeho délku: $\varepsilon = b - a > 0$. Pak je zřejmé, že existuje přirozené číslo n_0, pro něž je $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ neboli — což je totéž — $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Předpokládejme dále, že je $b > 0$ (v případě $b < 0$ probíhají úvahy analogicky). Protože posloupnost $\frac{m}{n_0}$ pro $m = 1, 2, \ldots$, neomezeně roste, existuje takové přirozené číslo m_0, pro něž je $\frac{m_0}{n_0} < b \leqq \frac{m_0 + 1}{n_0}$. Jestliže nyní předpokládáme, že je $\frac{m_0}{n_0} \leqq a$, dostaneme nerovnosti

$$\varepsilon = b - a \leqq \frac{m_0 + 1}{n_0} - \frac{m_0}{n_0} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

které vedou ke sporu $\varepsilon < \varepsilon$.

Musí tedy platit $a < \frac{m_0}{n_0} < b$, tj. interval (a, b) obsahuje racionální číslo $\frac{m_0}{n_0}$.

Věta je dokázána.

Účelnost právě zavedeného pojmu husté množiny je patrna z následující věty:

Věta. *Budiž A hustá množina reálných čísel. Pak ke každému reálnému číslu α existuje konvergentní posloupnost*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

čísel náležejících do množiny A, která má za limitu číslo α.

Důkaz. Protože množina A je hustá, existuje ke každému přirozenému číslu n číslo $a_n \in A$ tak, že je $a_n \in \left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$, tj. že platí

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Z těchto posledních dvou nerovností však už plyne, že posloupnost

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

konverguje a má za limitu číslo α.

Věta je dokázána.

2. SPOJITÉ FUNKCE

Připomeňme, že funkce f s definičním oborem D se nazývá *spojitá v bodě* $x_0 \in D$, jestliže má limitu pro $x \to x_0$ a jestliže tato limita je totožná s její hodnotou v bodě x_0, tj. s hodnotou $f(x_0)$. Jinými slovy: Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže pro každou konvergentní posloupnost

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

která má za limitu číslo x_0 a je tvořena body, jež patří do definičního oboru funkce $f(x)$, je také odpovídající posloupnost funkčních hodnot

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

konvergentní a má za limitu číslo $f(x_0)$.

Věta. *Jestliže spojité funkce $f(x)$ a $g(x)$ se společným definičním oborem nabývají stejných funkčních hodnot na nějaké husté množině reálných čísel A, pak jsou totožné.*

Důkaz. Budiž α libovolné reálné číslo. Víme už, že existuje konvergentní posloupnost

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

čísel patřících do množiny A, která má za limitu číslo α. Pak však ze spojitosti funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a ze skutečnosti, že pro každé $a \in A$ je $f(a) = g(a)$, plyne, že je

$$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(\alpha).$$

Věta je dokázána.

8. PODSTATA A FORMULACE CAUCHYHO METODY ŘEŠENÍ FUNKCIONÁLNÍCH ROVNIC

Neřekneme-li výslovně opak, budeme všude v dalším hledat jen taková řešení zkoumaných funkcionálních rovnic, která jsou spojitými funkcemi.

Cauchyho metoda tkví — řečeno co nejobecněji — v tom, že se nejprve určí řešení uvažované funkcionální rovnice, které je definováno na nějaké husté množině reálných čísel. Poté se využije spojitosti tohoto řešení a podle poslední z výše dokázaných vět se řešení definuje pro libovolná reálná čísla.

Obvykle se řešení hledá nejprve na množině všech racionálních čísel (která je, jak jsme před chvílí viděli, hustá). Za tímto účelem se často postupuje podle následujícího schématu:

1. Nějakým vhodným postupem (například substituční metodou) se určí řešení $f(x)$ dané funkcionální rovnice na množině všech přirozených čísel.

2. Dokáže se, že takto nalezené řešení vyhovuje rovnici také

a) pro $x = 0$,
b) pro všechny celé záporné hodnoty proměnné x,
c) pro všechny racionální hodnoty proměnné x.

3. Využije se hustoty množiny racionálních čísel a spojitosti funkce $f(x)$; tím bude zaručeno, že takto určené řešení vyhovuje rovnici pro libovolné reálné hodnoty x.

Takto formulovaná Cauchyho metoda je vhodná pouze pro takové funkcionální rovnice, jejichž řešení je definováno a spojité na celé číselné ose. Lze se ale lehko přesvědčit o tom, že se touto metodou dají řešit i rovnice, jejichž řešení jsou definována a spojitá na nějaké množině D, jíž může být interval nebo sjednocení intervalů. Je-li totiž A hustá množina reálných čísel, je množina $A_1 = A \cap D$ hustá v D v tom smyslu, že pro každé číslo $\alpha \in D$ existuje konvergentní posloupnost

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

čísel ležících v A_1, která má za limitu číslo α.

Důkaz této skutečnosti přenecháváme čtenáři.

4. NĚKOLIK KLASICKÝCH PŘÍKLADŮ

Budeme Cauchyho metodu ilustrovat na několika funkcionálních rovnicích, které Cauchy řešil už počátkem minulého století.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Budeme hledat taková řešení této rovnice, která jsou definována a (v souladu s úmluvou, kterou jsme učinili výše) spojitá na celé číselné ose. Předpokládejme tedy, že $f(x)$ je jedno takové řešení rovnice (1). Nejprve dokážeme, že pro každé reálné číslo $n \geqq 2$ platí

$$\begin{aligned} (2) \qquad & f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \\ & = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n). \end{aligned}$$

Pro $n = 2$ je tato rovnost totožná s rovností (1), a tedy skutečně platí.

Nechť rovnost (2) platí pro nějaké přirozené n. Využijeme-li vztahu (1), dostáváme

$$\begin{aligned} & f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}) = \\ & = f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + f(x_{n+1}) = \\ & = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + f(x_{n+1}), \end{aligned}$$

a odtud už plyne hledaná rovnost (2) matematickou indukcí.

Zvolme v (2) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$. Pak bude pro každé přirozené číslo n a pro každé reálné číslo x platit

$$f(nx) = nf(x).$$

Označíme-li tedy $f(1) = c$, dostáváme, že platí

$$f(n) = cn$$

pro každé přirozené n.

Nechť jsou dále m a n libovolná přirozená čísla. Pak je

$$nf\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(n.\frac{m}{n}\right) = f(m) = cm,$$

tj.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = c\,\frac{m}{n};$$

je tedy $f(x) = cx$ pro libovolné kladné racionální číslo x.

Položíme-li na druhé straně v (1) $x = y = 0$, vidíme, že je

$$f(0) = 2f(0),$$

neboli — což je totéž — $f(0) = 0$. Odtud plyne, že je

$$f(x - x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x),$$

čili $f(x) = -f(-x)$. Pro každou racionální hodnotu proměnné x tedy platí

$$f(x) = cx.$$

A vezmeme-li nakonec v úvahu, že množina racionálních čísel je hustá a že funkce $f(x)$ je spojitá, zjistili jsme toto: Je-li funkce $f(x)$ řešením funkcionální rovnice (1), je $f(x) = cx$, kde c je libovolné reálné číslo. Naopak z rovnosti

$$c(x + y) = cx + cy$$

plyne, že každá taková funkce také skutečně naši funkcionální rovnici řeší.

Zde je třeba poznamenat, že kdybychom hledali řešení rovnice (1), které by mělo být spojité pouze v jednom pevném bodě, dostali bychom opět týž výsledek. Je-li totiž $f(x)$ funkce, pro niž platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

a je-li tato funkce spojitá v bodě α, pak pro libovolné reálné číslo x_0 platí

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} f((x - x_0 + \alpha) + (x_0 - \alpha)) = \\ &= \lim_{x \to x_0} (f(x - x_0 + \alpha) + f(x_0 - \alpha)) = \\ &= \lim_{x - x_0 + \alpha \to \alpha} f(x - x_0 + \alpha) + f(x_0 - \alpha) = \\ &= f(\alpha) + f(x_0 - \alpha) = f(x_0);\end{aligned}$$

to však ukazuje, že funkce $f(x)$ je spojitá všude, a má tudíž tvar $f(x) = cx$.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x) . f(y) . \tag{3}$$

Opět budeme hledat taková řešení této rovnice, která jsou definována pro všechna reálná x.

Především je zřejmé, že nulová konstantní funkce je jedním z řešení rovnice (3). Zajímá nás nyní, zda má také nenulová řešení. Předpokládejme, že $f(x)$ je jedno takové řešení; z (3) pak plyne, že je

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0,$$

tj. je-li $f(x)$ nenulová hodnota, nabývá funkce $f(x)$ kladných hodnot pro každé x.

Označme nyní $f(1) = c > 0$. Předpokládejme, že pro nějaké přirozené číslo n platí

$$f(n) = c^n .$$

Pak je

$$f(n + 1) = f(n) . f(1) = c^n . c = c^{n+1} ,$$

a odtud plyne matematickou indukcí, že platí

$$f(x) = c^x \tag{4}$$

pro každé přirozené číslo x.

Analogicky se indukcí snadno dokáže, že pro každé přirozené číslo n a pro každé reálné číslo x platí

$$f(nx) = [f(x)]^n .$$

Jsou-li tedy m a n přirozená čísla, je

$$\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n = f\left(n.\frac{m}{n}\right) = f(m) = c^m = c^{\frac{m}{n}.n} = \left(c^{\frac{m}{n}}\right)^n,$$

tj. rovnost (4) je splněna pro libovolná kladná racionální čísla.

Vezmeme-li na druhé straně v úvahu, že je $f(0) = [f(0)]^2$, tj. že je $f(0) = 1$ a

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x).f(-x),$$

dostáváme, že pro každé záporné racionální číslo x platí

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{c^{-x}} = c^x.$$

Je tedy $f(x) = c^x$ pro libovolné racionální hodnoty proměnné x. Využijeme-li ještě hustoty množiny racionálních čísel a spojitosti funkce $f(x)$, docházíme k závěru, že řešeními funkcionální rovnice (3) mohou být všechny funkce tvaru $f(x) = c^x$, kde c je libovolné kladné reálné číslo. Ze zřejmé rovnosti

$$c^{x+y} = c^x.c^y$$

je pak vidět, že tomu skutečně tak je. Nakonec dostáváme tento výsledek: Funkcionální rovnice

$$f(x + y) = f(x).f(y)$$

má nekonečně mnoho řešení, jež jsou dána vzorcem

$$f(x) = c^x,$$

kde c je kladné reálné číslo; navíc je řešením nulová konstantní funkce.

Zde je na místě poznamenat, že výše uvedenou funkcionální rovnici lze řešit též pomocí funkcionální rovnice (1). Je-li totiž $f(x)$ nenulové řešení rovnice (3), pak je, jak jsme viděli, $f(x) > 0$ pro všechna x, a tudíž můžeme utvořit funkci $g(x) = \log f(x)$. Je též zřejmé, že pro libovolná dvě reálná čísla x a y platí

$$g(x + y) = \log f(x + y) = \log (f(x) . f(y)) =$$
$$= \log f(x) + \log f(y) = g(x) + g(y),$$

a proto má funkce $g(x)$ tvar $g(x) = ax$, kde a je libovolné reálné číslo. Odtud pak nakonec dostáváme, že je

$$f(x) = 10^{ax} = (10^a)^x = c^x.$$

Současně je odtud opět patrno, že pokud bychom žádali jen tolik, aby funkce $f(x)$ byla spojitá pouze v jediném bodě (a tedy nikoliv spojitá všude), znovu bychom dostali $f(x) = c^x$.

c) Řešme funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) + f(y). \tag{5}$$

Nejprve poznamenejme, že pokud hledáme taková řešení této rovnice, která jsou definována a spojitá pro všechna x, pak jediným takovým řešením je nulová konstanta. Vskutku: předpokládáme-li, že $f(x)$ je řešení rovnice (5), pak pro $y = 0$ dostáváme

$$f(0) = f(x . 0) = f(x) + f(0),$$

odkud plyne, že je $f(x) = 0$ pro všechna x, tj. že $f(x)$ je nulová konstanta.

Připusťme nyní, že $f(x)$ je funkce, která je definována a spojitá pro všechna $x \neq 0$ a která je řešením funkcionální rovnice (5). Položme

$$g(t) = f(10^t).$$

Je zřejmé, že funkce $g(t)$ je definována a spojitá pro všechna t a že kromě toho vyhovuje rovnosti

$$g(u + v) = f(10^{u+v}) = f(10^u . 10^v) =$$
$$= f(10^u) + f(10^v) = g(u) + g(v);$$

to ovšem zase ukazuje, že je $g(t) = ct$, kde c je libovolné reálné číslo. Pak však pro $x > 0$ máme

$$f(x) = f(10^{\log x}) = g(\log x) = c \log x.$$

Nechť je konečně $x \neq 0$ libovolné reálné číslo. Využijeme-li toho, že pak je $x^2 > 0$, dostáváme vztah

$$2\, f(x) = f(x^2) = c \log x^2 = 2c \log |x|,$$

neboli

$$f(x) = c \log |x| .$$

Na druhé straně z vlastností logaritmické funkce plyne

$$c \log |xy| = c \log |x| + c \log |y|$$

pro všechny dvojice reálných čísel $x \neq 0$ a $y \neq 0$.

Všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

jež jsou definována a spojitá pro $x \neq 0$, jsou tedy dána formulí

$$f(x) = c \log |x|,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

d) Řešme funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) . f(y). \tag{6}$$

Položme zde nejprve $y = 0$. Dostáváme vztah

$$f(0) = f(x) . f(0),$$

ze kterého plyne, že je buď $f(0) = 0$, nebo $f(x) = 1$, tj. funkce $f(x)$ je totožná s konstantní jednotkovou funkcí, jež je zřejmě řešením funkcionální rovnice (6).

Předpokládejme, že $f(x)$ je nekonstantní funkce, která je definována a spojitá pro všechna x a jež řeší výše uvedenou funkcionální rovnici (6). Pak je funkce

$$g(t) = f(10^t)$$

zřejmě též spojitá a kromě toho vyhovuje následující rovnosti:

$$g(u + v) = f(10^{u+v}) = f(10^u . 10^v) =$$
$$= f(10^u) . f(10^v) = g(u) . g(v);$$

odtud plyne, že funkce $g(t)$ má tvar

$$g(t) = a^t,$$

kde a je libovolné kladné reálné číslo.

Pro $x > 0$ máme

$$f(x) = f(10^{\log x}) = g(\log x) = a^{\log x} =$$
$$= (10^{\log a})^{\log x} = (10^{\log x})^{\log a} = x^{\log a};$$

označíme-li $c = \log a$, bude

$$f(x) = x^c.$$

Je-li x libovolné nenulové reálné číslo, je

$$(f(x))^2 = f(x^2) = x^{2c},$$

a odtud plyne, že pro $x < 0$ je

$$f(x) = |x|^c.$$

Řešením rovnice (6) je tedy funkce definovaná takto:

$$f(x) = x^c \text{ pro } x > 0,$$

$$f(x) = |x|^c \text{ pro } x < 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Tato funkce je ovšem pro c < 0 nespojitá v bodě $x = 0$. Protože naopak tato funkce pro $c > 0$ zřejmě vyhovuje rovnici (6), tvoří spolu s konstantou 1 všechna řešení této rovnice.

5. INVERZNÍ FUNKCE

Než přejdeme k jistým zobecněním metod řešení výše uvedených příkladů, podíváme se ještě na jeden pojem z matematické analýzy.

Budiž $f(x)$ funkce s definičním oborem D a nechť M je obor hodnot funkce f (množina hodnot $f(x)$ pro $x \in D$).

Funkce $g(t)$ (existuje-li) se nazývá *inverzní funkcí k funkci* $f(x)$, je-li jejím definičním oborem množina M, oborem hodnot množina D a jsou-li pro všechna $x \in D$ a $t \in M$ splněny rovnosti

$$f(g(t)) = t; \quad g(f(x)) = x.$$

Připomeňme dále, že funkce $f(x)$ definovaná na intervalu Δ se nazývá *nerostoucí (neklesající)* v intervalu Δ, jestliže pro libovolná dvě čísla $x_1, x_2 \in \Delta$ plyne ze vztahu $x_1 < x_2$ nerovnost $f(x_1) \geqq f(x_2)$ ($f(x_1) \leqq f(x_2)$). Jestliže z ostré nerovnosti $x_1 < x_2$ plyne ostrá nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), nazývá se funkce $f(x)$ *rostoucí (klesající)* funkcí.

Věta. *Je-li funkce $f(x)$ definována, spojitá a rostoucí (klesající) v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak k ní existuje inverzní funkce, která je opět spojitá a rostoucí (klesající).*

Důkaz. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je rostouc' (úvahy v případě, že $f(x)$ je klesající, jsou analogické). Je zřejmé, že množina funkčních hodnot funkce $f(x)$ je tvořena všemi body uzavřeného intervalu $\langle f(a), f(b)\rangle$. Ukážeme, že ke každému číslu $t \in \langle f(a), f(b)\rangle$ existuje jediné číslo $x_0 \in \langle a, b\rangle$ tak, že platí $f(x_0) = t$.

Je-li $t = f(a)$ nebo $t = f(b)$, je hledaná hodnota x_0 totožná s hodnotou a nebo s hodnotou b. Nechť je tedy $f(a) < t < f(b)$. Budeme nyní vyšetřovat množinu T všech čísel $x \in \langle a, b\rangle$, pro něž je $f(x) < t$. Tato množina je neprázdná, neboť $f(a) < t$, a tedy $a \in T$. Množina T je také omezená, neboť je částí uzavřeného intervalu $\langle a, b\rangle$, který je zřejmě omezenou množinou. Označme nyní x_0 supremum množiny T (tj. nejmenší z horních odhadů této množiny). Protože $a \in T$ a b je horní odhad množiny T, je $a < x_0 < b$. Ukážeme, že množina T je totožná s intervalem $\langle a, x_0)$: Zřejmě $\langle a, x_0) \supset T$. Nechť je naopak $x \in \langle a, x_0)$. Pak je $x < x_0$, a x tedy není horní odhad množiny T, tj. existuje číslo $y \in T$ tak, že platí $y > x$. Protože funkce $f(x)$ je rostoucí, je $f(x) < f(y) < t$, a tedy je $y \in T$ a $T = \langle a, x_0)$.

Nyní můžeme vybrat posloupnost čísel

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

tak, že pro všechna n je $a < x_n < x_0$ a že platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ze spojitosti funkce $f(x)$ plyne, že je také

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

a protože bylo $f(x_n) < t$, je $f(x_0) \leqq t$.

Jelikož bylo $x_0 \leqq b$, můžeme vybrat posloupnost

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \ldots$$

tak, že pro všechna n je $x_0 \leqq \bar{x}_n \leqq b$ a že platí $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{x}_n = x_0$. Ale protože $\bar{x}_n \notin T$, je $f(\bar{x}_n) \geqq t$, a tedy $f(x_0) \geqq t$, což nakonec ukazuje, že platí $f(x_0) = t$.

Jestliže připustíme, že existují dvě různá čísla $x_1 < x_2$ z intervalu $\langle a, b \rangle$, pro něž je $f(x_1) = f(x_2) = t$, dostaneme spor s tím, že funkce $f(x)$ je rostoucí:

$$t = f(x_1) < f(x_2) = t.$$

Nyní označíme symbolem $g(t)$ pro každé $t \in \langle f(a), f(b) \rangle$ ono jednoznačně určené číslo z intervalu $\langle a, b \rangle$, pro něž je $f(g(t)) = t$. Tímto postupem získáme funkci $g(t)$, která je zřejmě inverzní k funkci $f(x)$. Zbývá dokázat, že tato funkce je spojitá a rostoucí.

Nechť jsou především t_1, t_2, $t_1 < t_2$ dvě libovolná čísla z intervalu $\langle f(a), f(b) \rangle$. Připustíme-li, že je $g(t_1) \geqq g(t_2)$, dostaneme z předpokladu, že funkce $f(x)$ je rostoucí, nerovnost

$$t_1 = f(g(t_1)) \geqq f(g(t_2)) = t_2\,,$$

a to je ve sporu s volbou čísel t_1 a t_2. Tudíž je funkce $g(t)$ rostoucí.

A konečně nechť je t_0 libovolný bod intervalu $\langle f(a), f(b) \rangle$ a nechť je

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots; \quad t_n \in \langle f(a), f(b) \rangle$$

posloupnost čísel, která má za limitu číslo t_0. Označíme-li $g(t_n) = x_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a $g(t_0) = x_0$, dostáváme posloupnost

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Tato posloupnost je omezená, neboť leží celá v intervalu $\langle a, b\rangle$, a proto existuje hromadný bod této posloupnosti. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in \langle a, b\rangle$, $y_1 \neq y_2$ jsou dva hromadné body této posloupnosti. Pak existují dvě podposloupnosti

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots,$$
$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_n}, \ldots,$$

pro něž platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = y_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n} = y_2$. Ze spojitosti funkce $f(x)$ nyní plyne, že je

$$f(y_1) = f(\lim_{n\to\infty} x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} t_{k_n} = t_0 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} t_{m_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_{m_n}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{m_n}) = f(y_2),$$

a odtud dostáváme rovnost $y_1 = y_2$. To však ukazuje, že posloupnost

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

konverguje; kromě toho ze vztahu $\lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = f(x_0) = t_0$ plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tato poslední rovnost však neříká nic jiného, než že platí $\lim\limits_{t_n\to t_0} g(t_n) = g(t_0)$. Funkce $g(t)$ je tedy spojitá.

Tím je věta dokázána.

Ponecháváme na čtenáři, aby si uvědomil, jak je větu možno dokázat v případě, že místo uzavřeného (a tedy konečného) intervalu $\langle a, b\rangle$ budeme uvažovat interval otevřený nebo neomezený.

Uvedeme několik příkladů inverzních funkcí.

a) Uvažujme funkci $\sin x$ v intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$.

Jak je známo, je tato funkce v uvažovaném intervalu spojitá a rostoucí. Podle právě dokázané věty tedy existuje inverzní funkce, která je definována, spojitá a rostoucí v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a nabývá hodnot z intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Tato funkce se označuje obvykle $\arcsin t$ (čti arkus sínu).

Zde je třeba poznamenat, že protože funkce $\sin x$ je definována pro všechna reálná čísla x a nabývá hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, můžeme pro všechna x utvořit výraz $\arcsin (\sin x)$. Rovnost $\arcsin (\sin x) = x$ však bude splněna pouze pro $x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Není těžké dokázat (přenecháváme to čtenáři), že pro libovolné reálné číslo x platí

$$\arcsin (\sin x) = (-1)^k (x + k\pi),$$

kde k je celá část čísla $\dfrac{\pi - x}{2\pi}$.

b) K funkci $\cos x$ uvažované na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ taktéž existuje inverzní funkce, která se značí $\arccos t$. Analogicky jako v bodě a) lze ukázat, že funkce $\arccos t$ je spojitá a klesající v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a že pro všechna $t \in \langle -1, 1 \rangle$ platí $0 \leqq \arccos t \leqq \pi$.

c) Také k funkcím $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$, které uvažujeme v intervalech $(-\pi/2, \pi/2)$, resp. $(0, \pi)$, existují inverzní funkce, které značíme $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$.

6. FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE
$f(x + y) = F(f(x), f(y))$

První dva příklady uvažované v odstavci 4 měly společné to, že na levé straně odpovídající funkcionální rovnice vystupoval výraz $f(x + y)$. Řešení těchto příkladů byla zcela analogická, a to nás vede k tomu, že si klademe otázku: Je-li $F(u, v)$ funkce dvou proměnných, za jakých podmínek má funkcionální rovnice

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)) \tag{7}$$

řešení a jak lze toto řešení najít?

Lemma. *Má-li funkcionální rovnice*

$$f(x + y) = F(f(x), f(y))$$

řešení $f(x)$ a je-li M obor hodnot funkce $f(x)$, pak funkce $F(u, v)$ vyhovuje následujícím podmínkám:

a) *pro všechny dvojice čísel $u,\ v \in M$ je*

$$F(u, v) = F(v, u);$$

b) *pro všechny trojice čísel $u,\ v,\ w \in M$ platí*

$$F(F(u, v), w) = F(u, F(v, w));$$

c) *existuje číslo $e \in M$ tak, že platí*

$$F(e, u) = u$$

pro všechna $u \in M$;

d) *ke každému $u \in M$ existuje $v \in M$ tak, že platí*

$$F(u, v) = e\,.$$

Důkaz. a) Nechť je $u, v \in M$. Pak existují reálná čísla x, y taková, že je $f(x) = u$ a $f(y) = v$, a tedy je

$$F(u, v) = F(f(x), f(y)) = f(x + y) = f(y + x) =$$
$$= F(f(y), f(x)) = F(v, u)\,.$$

b) Nechť je $u, v, w \in M$. Pak existují reálná čísla x, y a z taková, že je $f(x) = u$, $f(y) = v$, $f(z) = w$. Dále je

$$F(u, v) = F(f(x), f(y)) = f(x + y) \in M$$

a

$$F(v, w) = F(f(y), f(z)) = f(y + z) \in M.$$

Je tedy

$$\begin{aligned} f(F(u, v), w) &= F(f(x + y), f(z)) = \\ &= f(x + y + z) = F(f(x), f(y + z)) = \\ &= F(u, F(v, w)). \end{aligned}$$

c) Označme $e = f(0)$. Protože $f(x) = u \in M$, je

$$F(e, u) = F(f(0), f(x)) = f(0 + x) = f(x) = u.$$

d) Nechť je $u \in M$ a $f(x) = u$. Položme $v = f(-x)$.

Pak je

$$F(u, v) = F(f(x), f(-x)) = f(x - x) = f(0) = e.$$

Tím je lemma dokázáno.

Toto lemma však udává jen nutnou podmínku řešitelnosti rovnice (7); není z něj vidět, jak by se dalo najít explicitní vyjádření pro řešení $f(x)$.

Pomocí metod, jichž bylo použito při řešení funkcionálních rovnic z odstavce 4, můžeme nyní popsat následující postup pro určení řešení funkcionální rovnice (7):

Předpokládejme, že $f(x)$ je spojitá funkce, pro niž platí

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)),$$

a předpokládejme přitom, že $f(x)$ je definováno pro libovolné reálné hodnoty proměnné x. (Jak jsme viděli v příkladech z odstavce 4, lze tyto úvahy snadno modifikovat pro případ, že funkce $f(x)$ není definována všude.)

Definujme funkce $F_n(t)$ následujícím způsobem:

$$F_1(t) = t, \quad F_n(t) = F(F_{n-1}(t), t) \quad \text{pro } n \geqq 2.$$

Pak je zřejmě $F_1(f(x)) = f(x)$; předpokládáme-li, že pro každé přirozené n platí $F_n(f(x)) = f(nx)$, pak pro $n + 1$ dostáváme

$$f((n + 1)\,x) = f(nx + x) = F(f(nx), f(x)) = \\ = F(F_n(f(x)), f(x)) = F_{n+1}(f(x)).$$

Indukcí jsme tedy dokázali, že platí

$$f(nx) = F_n(f(x))$$

pro všechna přirozená n. Speciálně dostáváme pro $x = 1$ vztah

$$f(n) = F_n(c),$$

kde jsme položili $c = f(1)$. Tímto postupem je funkce $f(x)$ definována pro všechny přirozené hodnoty n.

Nechť jsou nyní m a n libovolná přirozená čísla. Pak je

$$F_m(c) = f(m) = f\left(n.\frac{m}{n}\right) = F_n\left(f\left(\frac{m}{n}\right)\right).$$

Budeme-li navíc ještě předpokládat, že k funkci $F_n(t)$ existuje inverzní funkce $G_n(u)$, bude

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = G_n(F_m(c)),$$

a funkce $f(x)$ je tedy definována pro všechny kladné racionální hodnoty proměnné x. Použijeme-li rovnosti

$$f(0) = F(f(x), f(-x)),$$

můžeme $f(x)$ definovat pro libovolné racionální hodnoty proměnné x. A vezmeme-li v úvahu hustotu množiny racionálních čísel a spojitost funkce $f(x)$, můžeme funkci $f(x)$ považovat za definovanou pro všechny reálné hodnoty proměnné x.

Pochopitelně je nakonec třeba ověřit, zda takto určená funkce $f(x)$ rovnici (7) také skutečně vyhovuje.

Metoda řešení funkcionálních rovnic tvaru (7), kterou jsme právě vyložili, je ovšem popsána velice schematicky a vyžaduje ještě řadu upřesnění. Tak není například vůbec jasné, jak je možno definovat funkce $F_n(t)$, zda tyto funkce vůbec existují, zda k nim existují funkce inverzní atd. Zde však nebudeme na tyto otázky v obecném případě odpovídat; odpovíme na ně v každém konkrétním případě.

Vyšetříme nyní co možná nejpodrobněji případ, kdy je funkce $F(u, v)$ mnohočlenem ve dvou proměnných. Pak má $F(u, v)$ tvar

$$F(u, v) = a_1 u^{\lambda_1} v^{\mu_1} + a_2 u^{\lambda_2} v^{\mu_2} + \ldots + a_s u^{\lambda_s} v^{\mu_s},$$

kde jsou $a_1, a_2, \ldots, a_s$ libovolná nenulová reálná čísla a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ jsou celá nezáporná čísla. Jak známo, nazývá se největší z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že to je číslo λ_1) stupněm polynomu $F(u, v)$ vzhledem k proměnné u a největší z čísel $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ (nechť je to třeba číslo μ_t) stupněm polynomu $F(u, v)$ vzhledem k proměnné v.

Jestliže má funkcionální rovnice

$$f(x + y) = F(f(x), f(y))$$

řešení, musí především funkce $F(u, v)$ vyhovovat rovnosti

$$F(u, v) = F(v, u),$$

tj. musí splňovat podmínku

$$a_1 u^{\lambda_1} v^{\mu_1} + \ldots + a_t u^{\lambda_t} v^{\mu_t} + \ldots + a_s u^{\lambda_s} v^{\mu_s} =$$
$$= a_1 u^{\mu_1} v^{\lambda_1} + \ldots + a_s u^{\mu_s} v^{\lambda_s},$$

z níž ihned plyne, že je $\lambda_1 = \mu_t$; stupně polynomu $F(u, v)$ vzhledem k proměnným u i v jsou tedy stejné. Označme tento stupeň n ($\lambda_1 = n$).

Dále musí polynom $F(u, v)$ splňovat rovnost

$$F(u, F(v, w)) = F(F(u, v), w).$$

Nyní je

$$F(u, F(v, w)) = a_1 u^n (F(v, w))^{\mu_1} + a_2 u^{\lambda_2} (F(v, w))^{\mu_2} +$$
$$+ \ldots + a_s u^{\lambda_s} (F(v, w))^{\mu_s}$$

a

$$F(F(u, v), w) = a_1 (F(u, v))^n w^{\mu_1} + a_2 (F(u, v))^{\lambda_2} w^{\mu_2} +$$
$$+ \ldots + a_s (F(u, v))^{\lambda_s} w^{\mu_s} =$$
$$= a_1 a_1^n u^{n^2} v^{n\mu_1} w^{\mu_1} + \ldots;$$

obě poslední rovnosti ukazují, že polynom $F(u, F(v, w))$ je vzhledem k proměnné u stupně n a polynom $F(F(u, v), w)$ je vzhledem k proměnné u stupně n^2. A protože oba tyto polynomy jsou si rovny, musí být $n = n^2$ čili $n = 1$.

Je-li tedy $F(u, v)$ polynom a má-li rovnice (7) řešení, pak má $F(u, v)$ tvar

$$F(u, v) = \alpha uv + \beta u + \beta v + \gamma. \tag{8}$$

Z rovnosti

$$F(F(u, u), v) = F(u, F(u, v))$$

přitom po jednoduchých úpravách dostáváme vztah

$$(\alpha\gamma - \beta^2 + \beta)(u - v) = 0,$$

který má platit pro libovolná u a v; to znamená, že koeficienty polynomu $F(u, v)$ musí navíc splňovat podmínku

$$\alpha\gamma = \beta^2 - \beta. \tag{9}$$

Nyní jsou dvě možnosti:

1. $\alpha = 0$. Pak je $\beta \neq 0$ a $\beta^2 - \beta = 0$, tj. $\beta = 1$, a rovnice (7) má tvar

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \gamma. \tag{10}$$

Položme $g(x) = f(x) + \gamma$. Je zřejmé, že funkce $f(x)$ je řešením rovnice (10) tehdy a jen tehdy, je-li funkce $g(x)$ řešením rovnice

$$g(x + y) = g(x) + g(y).$$

Všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \gamma$$

jsou tedy dána vzorcem

$$f(x) = cx - \gamma,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

2. $\alpha \neq 0$. Pak je $\gamma = \dfrac{\beta^2 - \beta}{\alpha}$ a rovnice (7) má tvar

$$f(x + y) = \alpha f(x)\, f(y) + \beta f(x) + \beta f(y) + \frac{\beta^2 - \beta}{\alpha},$$

neboli tvar

$$(11) \qquad f(x + y) = \frac{(\alpha f(x) + \beta)\,(\alpha f(y) + \beta) - \beta}{\alpha}.$$

Položíme-li zde $g(x) = \alpha f(x) + \beta$, vidíme, že $f(x)$ je řešením funkcionální rovnice (11) tehdy a jen tehdy, je-li funkce $g(x)$ řešením rovnice

$$g(x + y) = g(x) . g(y).$$

Všechna řešení dané funkcionální rovnice tvoří tedy funkce (viz příklad b, str, 48-49)

$$f(x) = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{a} \quad f(x) = \frac{c^x - \beta}{\alpha},$$

kde c je libovolné reálné kladné číslo.

Podívejme se například na funkcionální rovnici

$$(12) \qquad f(x + y) = f(x) . f(y) + f(x) + f(y).$$

Ta je zřejmě tvaru (7) s funkcí $F(u, v)$ tvaru (8), kde volíme $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$. V tomto případě je podmínka (9) splněna, neboť je $\alpha\gamma = 0 = 1 - 1 = \beta^2 - \beta$; všechna řešení funkcionální rovnice (12) tedy tvoří funkce

$$f(x) = -1 \quad \text{a} \quad f(x) = c^x - 1,$$

kde c je libovolné reálné kladné číslo.

Ještě v jednom případě lze funkcionální rovnici (7) převést na některý z klasických příkladů, které jsme vyšetřovali v odstavci 4, a to tehdy, existuje-li funkce $G(t)$, pro niž platí jedna z rovností

$$G(F(u, v)) = G(u) + G(v),$$

$$G(F(u, v)) = G(u) . G(v).$$

Jestliže totiž v tomto případě předpokládáme, že spojitá funkce $f(x)$ splňuje rovnici

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)),$$

pak funkce $g(x) = G(f(x))$ zřejmě splňuje rovnici

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

nebo rovnici

$$g(x + y) = g(x) . g(y).$$

Řešme například funkcionální rovnici

$$f(x + y) = \frac{f(x) . f(y)}{f(x) + f(y)} . \tag{13}$$

Předpokládejme, že $f(x)$ je nějaké řešení této rovnice. Nejprve je třeba poznamenat, že je $f(x) \neq 0$ pro všechna x, pro něž je funkce $f(x)$ definována: Je-li totiž pro nějaké α hodnota $f(\alpha) = 0$, platí pro každé x

$$f(x) = \frac{f(x - \alpha) f(\alpha)}{f(x - \alpha) + f(\alpha)} = 0,$$

tj. $f(x)$ je nulová konstanta, a ta nevyhovuje rovnici (13).

Funkce $f(x)$ však nemůže být definována pro $x = 0$, neboť kdyby tomu tak bylo, dostali bychom

$$f(0) = \frac{f^2(0)}{2f(0)} \text{, tj. } 1 = \frac{1}{2} ,$$

a to není možné (předpokládáme, že bylo $f(0) \neq 0$).

Utvořme nyní funkci $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Ta je pak definována a spojitá pro všechna ta x, pro něž má stejné vlastnosti i funkce $f(x)$, a kromě toho je $f(x)$ řešením rovnice (13) tehdy a jen tehdy, je-li

$$g(x+y) = \frac{1}{f(x+y)} = \frac{f(x)+f(y)}{f(x).f(y)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} = g(x) + g(y),$$

tj. vyhovuje-li $g(x)$ funkcionální rovnici

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Všechna řešení dané funkcionální rovnice tedy tvoří funkce

$$f(x) = \frac{1}{cx},$$

kde $c \neq 0$ je reálné číslo.

7. JEŠTĚ JEDNO ZOBECNĚNÍ

Rovnici (7) můžeme zobecnit, a to tak, že budeme vyšetřovat funkcionální rovnici

$$f(G(x,y)) = F(f(x), f(y)), \tag{14}$$

kde $G(x, y)$ a $F(u, v)$ jsou funkce dvou proměnných. Na několika konkrétních příkladech ukážeme, jak lze tuto rovnici převést na některou z výše uvedených funkcionálních rovnic.

a) Vyšetřujme funkcionální rovnici

$$f(a(x-y)+b) = Af(x) + Bf(y) + C, \tag{15}$$

kde a, b, A, B, C jsou pevná reálná čísla. Mohou nastat tyto eventuality:

1. $a = A = B = 0$. Pak je

$$f(b) = C$$

a řešením rovnice (15) je každá spojitá funkce $f(x)$, pro kterou platí $f(b) = C$.

2. $A = B = 0$, ale $a \neq 0$. Pak je jediným řešením rovnice (15) konstanta C.

3. $a = 0$, ale čísla A a B nejsou současně rovna nule. Jestliže v tomto případě položíme $x = y$, dostáváme vztah

$$f(b) = (A+B)\,f(x) + C,$$

a odtud plyne: Je-li $A + B \neq 0$, je $f(x) = \text{const}$, a je-li $A + B = 0$, je řešením dané funkcionální rovnice každá funkce $f(x)$, pro niž je $f(b) = C$.

4. $a \neq 0$ a čísla A a B nejsou současně rovna nule. Pak pro $x = y$ dostáváme vztah

$$f(b) = (A+B)\,f(x) + C,$$

který ukazuje: Pokud má rovnice (15) nekonstantní řešení, musí být splněna podmínka $A + B = 0$ čili $A = -B$. Pak však má daná funkcionální rovnice tvar

$$f(a(x-y)+b) = Af(x) - Af(y) + C.$$

Položme zde $y = 0$ a označme $f(0) = l$. Pak máme vztah

$$f(ax+b) = Af((x) - l) + C,$$

a odtud plyne

$$f(a(x-y)+b) = A(f(x-y)-l)+C,$$

čili

$$Af(x-y) - Al = A(f(x) - f(y)),$$

neboli nakonec

$$f(x-y) = f(x) - f(y) + l.$$

Pro $x = 0$ a $y = -z$ však dostáváme

$$f(z) = -f(-z) + 2l, \quad \text{tj.} \quad f(-z) = -f(z) + 2l,$$

a tedy je

$$f(x+z) = f(x) + f(z) - l.$$

Pak platí

$$f(x+z) - l = (f(x) - l) + (f(z) - l)$$

a z toho plyne, že je

$$f(x) = dx + l,$$

kde d je libovolné reálné číslo.

Z rovnosti

$$d(a(x-y)+b) + l = A(dx+l) - A(dy+l) + C,$$

která je ekvivalentní s rovností

$$(da - dA)x - (da - dA)y + db + l - C = 0,$$

naopak plyne, že hledaná funkce $f(x)$ je řešením uvažované funkcionální rovnice pouze pro $a = A$ a $l = C - db$.

A tak má tedy funkcionální rovnice

$$f(a(x-y)+b) = Af(x) - Af(y) + C$$

nekonstantní řešení pouze pro $a = A$. V tomto případě jsou řešeními uvedené rovnice funkce

$$f(x) = dx + C - db,$$

kde d je libovolné reálné číslo.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$f\left(\frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}\right) = f(x) \, . \, f(y) \quad (c \neq 0)\,. \tag{16}$$

Nejprve upravíme výraz

$$\frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}$$

následujícím způsobem:

$$\frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}} = \frac{c^2x+c^2y}{c^2+xy} = c\frac{2cx+2cy}{2c^2+2xy} =$$

$$= c\,\frac{2cx+2cy+c^2-c^2+xy-xy}{2c^2+2xy+cx-cx+cy-cy} =$$

$$= c\,\frac{(c+x)(c+y)-(c-x)(c-y)}{(c+x)(c+y)+(c-x)(c-y)} =$$

$$= c\,\frac{\frac{c+x}{c-x}\cdot\frac{c+y}{c-y}-1}{\frac{c+x}{c-x}\cdot\frac{c+y}{c-y}+1}\,.$$

Předpokládáme-li nyní, že $f(x)$ je řešení rovnice (16), a položíme-li v této rovnici

$$\frac{c+x}{c-x}=u\,,\ \frac{c+y}{c-y}=v\,,$$

neboli

$$x=c\,\frac{u-1}{u+1}\,,\quad y=c\,\frac{v-1}{v+1}\,,$$

dostaneme:

$$f\left(c\,\frac{uv-1}{uv+1}\right)=f\left(c\,\frac{u-1}{u+1}\right)f\left(c\,\frac{v-1}{v+1}\right).$$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ je řešením dané rovnice tehdy a jen tehdy, vyhovuje-li funkce $g(t)=f\left(c\,\dfrac{t-1}{t+1}\right)$ funkcionální rovnici

$$g(uv)=g(u)\,.\,g(v);$$

řešením této poslední rovnice jsou, jak víme, funkce

$$g(t)=|t|^a,\quad g(t)=0.$$

Všechna řešení rovnice (16) jsou tedy tvořena funkcemi

$$f(x)=\left|\frac{c+x}{c-x}\right|^a,\ f(x)=0\,,$$

kde a je libovolné reálné číslo.

c) Řešme funkcionální rovnici

(17) $$f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)\,.\,f(y)\,.$$

Předpokládáme-li, že $f(x)$ je nějaké řešení této rovnice, můžeme ji přepsat následujícím způsobem:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(\sqrt{x^2}) . f(\sqrt{y^2}) .$$

(Výraz $\sqrt{y^2}$ zde chápeme nikoliv jako $|y|$, jak to bývá obvyklé, nýbrž jako y.) Položíme-li nyní pro $t \geqq 0$

$$g(t) = f(\sqrt{t}) ,$$

máme rovnici

$$g(u^2 + v^2) = f(\sqrt{u^2 + v^2}) =$$
$$= f(\sqrt{u^2}) . f(\sqrt{v^2}) = g(u^2) . g(v^2) .$$

Odtud plyne, že je

$$g(t) = 0 \quad \text{nebo} \quad g(t) = a^{t^2} ,$$

kde a je libovolné kladné číslo.

Pak však jsou řešeními výše uvedené funkcionální rovnice funkce tvaru

$$f(x) = a^{x^2} \quad \text{a} \quad f(x) = 0.$$

8. JEŠTĚ DVĚ FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Budeme nyní řešit dvě funkcionální rovnice, které se, třebaže vypadají v jistém smyslu komplikovaněji než dosud uvažované rovnice, dají též řešit pomocí Cauchyho metody.

a) Určeme všechny funkce $f(x)$, které jsou spojité na celé číselné ose a řeší funkcionální rovnici

(18) $$f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y)).$$

Předpokládejme, že $f(x)$ je některá z těchto funkcí. Položíme-li pak v (18) $x = y = 0$, dostáváme vztah $2f(0) = 4f(0)$, z něhož plyne, že musí být $f(0) = 0$.

Podobně dostaneme z rovnice (18) postupně vztahy

$$\begin{aligned} f(2x) &= 4f(x) - f(x - x) = 4f(x), \\ f(3x) &= 2f(2x) + 2f(x) - f(2x - x) = \\ &= 8f(x) + 2f(x) - f(x) = 9f(x). \end{aligned}$$

Budiž nyní n přirozené číslo, $n > 2$, a předpokládejme, že pro všechna přirozená čísla m, $2 \leqq m \leqq n$, platí

$$f(mx) = m^2 f(x).$$

Pak je

$$\begin{aligned} f((n + 1)x) &= f(nx + x) = 2f(nx) + 2f(x) - \\ - f((n - 1)x) &= 2n^2 f(x) + 2f(x) - (n - 1)^2 f(x) = \\ &= (n^2 + 2n + 1)f(x) = (n + 1)^2 f(x); \end{aligned}$$

to však znamená, že rovnost

$$f(nx) = n^2 f(x)$$

je splněna pro všechna reálná čísla x a pro každé přirozené číslo n. Označme písmenem c hodnotu funkce $f(x)$ pro $x = 1$, tj. $c = f(1)$. Z uvedené rovnosti pak plyne, že jsou-li m a n libovolná přirozená čísla, je

$$f(n) = cn^2$$

a

$$f\left(n \frac{m}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 f(1).$$

Jinými slovy:

$$f(x) = cx^2 \tag{19}$$

pro každou kladnou racionální hodnotu proměnné x.

Položíme-li nyní znovu v (18) $y = -x$, dostáváme

$$f(0) + f(2x) = 2f(x) + 2f(-x),$$

čili

$$f(x) = f(-x),$$

což ukazuje, že rovnost (19) platí pro libovolné racionální hodnoty proměnné x. Využijeme-li nakonec toho, že funkce $f(x)$ je spojitá a že množina racionálních čísel je hustá, dostáváme jako výsledek, že (19) platí pro každé reálné x.

Z identity

$$c(x + y)^2 + c(x - y)^2 = 2(cx^2 + cy^2)$$

pak naopak definitivně plyne, že všechna řešení funkcionální rovnice (18), která jsou definována a spojitá pro všechna x, mají tvar

$$f(x) = cx^2,$$

kde c je libovolná reálná konstanta.

b) Budiž $a > 0$, $a \neq 1$ pevné reálné číslo. Určeme všechny funkce $f(x)$, které jsou definovány a spojité na celé číselné ose a které vyhovují funkcionální rovnici

$$f(x + y) = a^{xy} f(x)\, f(y). \tag{20}$$

Budiž tedy $f(x)$ některá z těchto funkcí. Postupně pak dostáváme:

$$f(2x) = f(x + x) = a^{x^2}[f(x)]^2 = a^{\frac{2^2 - 2}{2}x^2}[f(x)]^2\,;$$

$$f(3x) = f(2x + x) = a^{2x^2} f(2x)\, f(x) =$$

$$= a^{2x^2} a^{x^2} [f(x)]^2 f(x) = a^{3x^2}[f(x)]^3 =$$

$$= a^{\frac{3^2 - 3}{2}x^2}[f(x)]^2\,;$$

$$f(4x) = f(3x + x) = a^{3x^2}f(3x)\,f(x) = a^{6x^2}[f(x)]^4 =$$
$$= a^{\frac{16-4}{2}x^2}[f(x)]^4 = a^{\frac{4^2-4}{2}x^2}[f(x)]^4\,.$$

Předpokládejme, že pro každé přirozené číslo n platí

$$f(nx) = a^{\frac{n^2-n}{2}x^2}[f(x)]^n\,. \tag{21}$$

Pak je

$$f((n + 1)x) = f(nx + x) = a^{nx^2}f(nx)\,f(x) =$$
$$= a^{\left(\frac{n^2-n}{2}+n\right)x^2}[f(x)]^{n+1} = a^{\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}x^2}[f(x)]^{n+1}\,,$$

a odtud indukcí plyne, že rovnost (21) je splněna pro všechna přirozená čísla n a pro všechna reálná čísla x.

Z (21) nyní dostáváme, že pro libovolná dvě přirozená čísla m a n v důsledku rovnosti

$$f(n) = a^{\frac{n^2-n}{2}}[f(1)]^n$$

platí

$$f\left(n\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m^2-m}{2}}[f(1)]^m = a^{\frac{n^2-n}{2}\cdot\frac{m^2}{n^2}}\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n\,,$$

tj.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{\frac{m^2}{n^2}-\frac{m}{n}}{2}}\,[f\,(1)]^{\frac{m}{n}}\,.$$

Na druhé straně je

$$f(1) = f\left(2\,.\,\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{4}}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \geqq 0\,.$$

Budeme-li předpokládat, že je $f(1) = 0$, dostáváme pro každé reálné číslo x vztah

$$f(x) = f((x-1)+1) = a^{x-1} f(x-1) f(1) = 0,$$

tj. dostáváme triviální řešení $f(x) = 0$.

Nechť je tedy $f(1) > 0$. Položíme-li

$$c = -\frac{1}{2} + \log_a f(1) ,$$

bude $f(1) = a^{c+\frac{1}{2}}$ a

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{\frac{m^2}{n^2} - \frac{m}{n}}{2}} \left(a^{c+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{n^2} + c\cdot\frac{m}{n}},$$

neboli

$$f(x) = a^{\frac{x^2}{2} + cx} \tag{22}$$

pro každou kladnou racionální hodnotu proměnné x.

Podobně je z rovnice (20) vidět, že je

$$f(1) = f(1+0) = f(1).f(0),$$

neboli $f(0) = 1$. Pak platí

$$1 = f(0) = f(x-x) = a^{-x^2} f(x) f(-x).$$

Jinými slovy: je

$$f(-x) = a^{x^2}.a^{-\frac{x^2}{2} - cx} = a^{\frac{(-x)^2}{2} + c(-x)},$$

což znamená, že rovnost (22) platí pro všechny racionální hodnoty proměnné x; odtud už plyne, že tato rovnost platí pro libovolnou reálnou hodnotu proměnné x.

Z identity

$$a^{\frac{(x+y)^2}{2} + c(x+y)} = a^{xy} \cdot a^{\frac{x^2}{2} + cx} \cdot a^{\frac{y^2}{2} + cy}$$

naopak s definitivní platností plyne, ze všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(x + y) = a^{xy} f(x)\, f(y)$$

jsou tvořena funkcemi

$$f(x) = 0 \quad \text{a} \quad f(x) = a^{\frac{x^2}{2} + cx},$$

kde c je libovolné reálné číslo.

9. DYADICKÁ RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Budiž n libovolné celé číslo a m libovolné přirozené číslo nebo nula. Každé číslo tvaru $n/2^m$ nazýváme *dyadickým racionálním číslem.*

Věta. *Množina T dyadických racionálních čísel je hustá množina.*

Důkaz. Budiž $\Delta = (\alpha, \beta)$ libovolný interval na číselné ose. Budeme zkoumat následující tři možnosti:

1. $0 \leqq \alpha < \beta$. Označme písmenem ε délku intervalu Δ, tj. $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$. Protože $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{2^k} = 0$, je zřejmé, že existuje přirozené číslo m, pro něž je $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Utvořme číselnou posloupnost

$$\frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}, \frac{3}{2^m}, \ldots, \frac{n}{2^m}, \ldots .$$

Ta zřejmě neomezeně roste, a proto existuje přirozené číslo n tak, že platí $\frac{n-1}{2^m} \leqq \alpha < \frac{n}{2^m}$. Kdyby přitom bylo $\beta \leqq \frac{n}{2^m}$, došli bychom ke sporu: $\varepsilon = \beta - \alpha \leqq \frac{n}{2^m} - \frac{n-1}{2^m} = \frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Musí tedy být $\alpha < \frac{n}{2^m} < \beta$, a to znamená, že interval Δ obsahuje dyadické racionální číslo.

2. $\alpha < \beta \leqq 0$. Označíme-li znovu písmenem ε délku intervalu Δ, zvolíme-li přirozené číslo m tak, aby bylo $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$, a budeme-li uvažovat posloupnost

$$\frac{-1}{2^m}, \frac{-2}{2^m}, \frac{-3}{2^m}, \ldots, \frac{-n}{2^m}, \ldots,$$

vidíme, že interval Δ obsahuje dyadické racionální číslo.

3. $\alpha < 0 < \beta$. Na základě toho, co jsme právě dokázali, obsahuje každý z intervalů $(0, \beta)$ a $(\alpha, 0)$ dyadické racionální číslo. Tudíž obsahuje takové číslo i samotný interval Δ.

A tak vidíme, že každý interval na číselné ose, který nezdegeneruje v jediný bod, obsahuje prvek množiny T. To však znamená, že T je hustá množina.

Věta je dokázána.

Důsledek. *Je-li a libovolné nenulové reálné číslo, pak je množina*

$$S = \left\{ \frac{an}{2^m} \,\middle|\, m \geqq 0, n \text{ jsou celá čísla} \right\}$$

hustá.

Důkaz. Předpokládejme pro určitost, že je $a > 0$. (Případ $a < 0$ se vyšetřuje analogicky.) Budiž $\Delta = (\alpha, \beta)$ libovolný interval na číselné ose. Pak podle právě dokázané věty existují celá čísla n a $m \geqq 0$ tak, že platí

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{n}{2^m} < \frac{\beta}{a}\,.$$

Odtud plyne, že je $\alpha < \dfrac{an}{2^m} < \beta$, tj. interval Δ obsahuje číslo z množiny S.

Důsledek je dokázán.

10. LOBAČEVSKÉHO FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Určíme nyní všechny funkce, které jsou definovány a spojité na celé číselné ose a které vyhovují funkcionální rovnici

$$f(x + y) \cdot f(x - y) = [f(x)]^2. \tag{23}$$

Tuto rovnici řešil poprvé N. I. Lobačevskij při vyšetřování některých problémů neeuklidovské geometrie.

Je zřejmé, že každá konstantní funkce je řešením rovnice (23). Předpokládejme nyní, že $f(x)$ je nekonstantní spojitá funkce, která vyhovuje rovnici (23), označme a hodnotu funkce $f(x)$ v bodě 0 a předpokládejme, že je $a > 0$. (Je-li $a = 0$, dostáváme řešení $f(x) = 0$, a případ $a < 0$ se vyšetřuje analogicky jako případ $a > 0$.)

Pro každé x bude platit

$$f(x) \cdot f(0) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2.$$

Je tedy $f(x) \geqq 0$ pro všechna x a kromě toho platí

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{f(x) \cdot f(0)}\,.$$

Označíme-li $b = f(1)$, dostáváme:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{ab} = a\sqrt{\frac{b}{a}} = a\,c^{\frac{1}{2}}\,,$$

$$f\left(\frac{1}{2^2}\right) = \sqrt{a\,f\left(\frac{1}{2}\right)} = a\,c^{\frac{1}{2^2}},$$

kde jsme použili označení $\frac{b}{a} = c$.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké přirozené číslo m platí

$$f\left(\frac{1}{2^m}\right) = a\,c^{\frac{1}{2^m}}\,.$$

Pak je

$$f\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) = \sqrt{a\,f\left(\frac{1}{2^m}\right)} = a^{\frac{1}{2}}\left(a\,c^{\frac{1}{2^m}}\right)^{\frac{1}{2}} = a\,c^{\frac{1}{2^{m+1}}}$$

a odtud plyne indukcí, že pro každé přirozené číslo m platí rovnost

$$f\left(\frac{1}{2^m}\right) = a\,c^{\frac{1}{2^m}}\,.$$

Budiž nyní n libovolné přirozené číslo, a předpokládejme, že platí

$$f\left(\frac{k}{2^m}\right) = a\,c^{\frac{k}{2^m}}$$

pro každé přirozené číslo m a pro každé přirozené číslo $k \leqq n$. Položíme-li ve funkcionální rovnici (23) $x = \frac{n}{2^m}$ a $y = \frac{1}{2^m}$, dostáváme

$$f\left(\frac{n+1}{2^m}\right) f\left(\frac{n-1}{2^m}\right) = \left[f\left(\frac{n}{2^m}\right)\right]^2,$$

tj.

$$f\left(\frac{n+1}{2^m}\right) = \frac{a^2 c^{\frac{2n}{2^m}}}{a c^{\frac{(n-1)}{2^m}}} = a c^{\frac{(n+1)}{2^m}},$$

a odtud je pomocí indukce vidět, že pro každé kladné dyadické racionální číslo x platí

$$f(x) = ac^x. \tag{24}$$

Položíme-li pak v (23) $x = 0$, dostáváme

$$f(y) . f(-y) = [f(0)]^2 = a^2,$$

neboli

$$f(-y) = \frac{a^2}{f(y)},$$

a odtud plyne, že rovnost (24) platí pro libovolné dyadické racionální hodnoty proměnné x. A vezmeme-li nakonec v úvahu, že $f(x)$ je spojitá funkce a že množina dyadických racionálních čísel je hustá, dostáváme tento výsledek: Řešeními Lobačevského funkcionální rovnice mohou být nejvýše funkce

$$f(x) = 0 \quad \text{a} \quad f(x) = ac^x,$$

kde c je libovolné kladné číslo.

Naopak se můžeme bezprostředně přesvědčit o tom, že tyto funkce Lobačevského rovnici také skutečně řeší.

11. D'ALEMBERTOVA FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Při zkoumání jistých problémů z mechaniky dospěl francouzský matematik d'Alembert k funkcionální rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\,f(y). \tag{25}$$

Budeme tuto rovnici řešit, přičemž budeme hledat jen taková její řešení $f(x)$, jež jsou definována a spojitá pro všechna x a navíc splňují podmínku $|f(x)| \leqq 1$.

Jedním takovým řešením je zřejmě konstantní nulová funkce. Předpokládejme nyní, že $f(x)$ je nějaké nekonstantní řešení rovnice (25). Především z této rovnice pro $y = 0$ dostáváme, že je

$$2f(x) = 2f(0)\,f(x)$$

pro každé x, a to znamená, že je $f(0) = 1$. Pro $x = 0$ dostáváme

$$f(y) + f(-y) = 2f(y),$$

tj.

$$f(y) = f(-y),$$

a odtud je vidět, že funkce $f(x)$ je sudá.

Pro $x = y$ máme

$$f(2x) + f(0) = 2f^2(x),$$

čili

$$f^2(x) = \frac{f(2x) + 1}{2}.$$

Funkce $f(x)$ je spojitá, nekonstantní, splňuje podmínku $|f(x)| \leqq 1$, je sudá a platí $f(0) = 1 > 0$. Odtud plyne, že existuje číslo $a > 0$, pro které je $1 > f(a) > 0$. Pak však existuje číslo c, $0 < c < \frac{\pi}{2}$, pro něž platí $f(a) = \cos c$. Dokážeme, že je

$$f\left(\frac{n}{2^m}a\right) = \cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{n}{2^m}\,a\right) \tag{26}$$

pro všechny dvojice přirozených čísel n a m. Důkaz této skutečnosti provedeme pomocí „dvojnásobné" indukce podle n a m.

Nechť je nejprve $n = 1$. Indukcí podle m dokážeme, že platí

$$f\left(\frac{1}{2^m}\,a\right) = \cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2^m}\,a\right). \tag{27}$$

Skutečně: Pro $m = 1$ máme

$$\left[f\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 = \frac{f(a) + 1}{2},$$

a tedy

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos c + 1}{2}} = \cos\frac{c}{2} = \cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2}a\right).$$

Předpokládejme, že rovnost (27) platí pro nějaké přirozené číslo m. Pak je

$$f\left(\frac{a}{2^{m+1}}\right) = \sqrt{\frac{f\left(\frac{a}{2^m}\right) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2^m}a\right) + 1}{2}} =$$

$$= \cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2^{m+1}}\,a\right),$$

a rovnost (27) tedy platí i pro $m + 1$.

Dokázali jsme tak, že rovnost (26) platí pro $n = 1$ a pro libovolné m. Nyní předpokládejme, že platí pro každé přirozené číslo m a pro každé přirozené číslo $n \leqq N$ (N je pevné přirozené číslo). Využijeme-li pak rovnosti

$$f((N+1)\,x) = 2f(Nx)\,f(x) - f((N-1)x),$$

dostáváme

$$f\left(\frac{N+1}{2^m}\,a\right) = 2f\left(\frac{N}{2^m}\,a\right) f\left(\frac{1}{2^m}\,a\right) - f\left(\frac{N-1}{2^m}\,a\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N}{2^m}\,a\right)\cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{2^m}\,a\right) - \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N-1}{2^m}\,a\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N+1}{2^m}\,a\right) + \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N-1}{2^m}\,a\right) -$$

$$- \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N-1}{2^m}\,a\right) = \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N+1}{2^m}\,a\right).$$

Odtud už plyne, že je

$$f(x) = \cos\frac{c}{a}\,x$$

pro každé x tvaru $\frac{n}{2^m}\,a$ (n a m jsou přirozená čísla).

Na druhé straně jsme už zjistili, že funkce $f(x)$ je sudá, a proto platí poslední rovnost i pro libovolné hodnoty x tvaru $\frac{n}{2^m}\,a$, kde n a $m \geqq 0$ jsou celá čísla.

Už dříve jsme dokázali, že množina

$$S = \left\{\frac{n}{2^m}\,a \;\middle|\; m \geqq 0,\ n \text{ jsou celá čísla}\right\}$$

je hustá. Tím tedy nakonec dostáváme, že pokud spojitá funkce $f(x)$ vyhovuje podmínkám

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\,f(y); \qquad |f(x)|\leqq 1,$$

je nutně tvaru

$$f(x)=\cos Ax,$$

kde A je libovolné reálné číslo.

Naopak se lze bezprostředně přesvědčit o tom, že každá taková funkce skutečně vyhovuje oběma výše uvedeným podmínkám.

Tím je d'Alembertova rovnice řešena.

12. JEŠTĚ JEDNA METODA ŘEŠENÍ FUNKCIONÁLNÍCH ROVNIC

Nakonec se ještě krátce zastavíme u další metody řešení funkcionálních rovnic; tato metoda je v jistém smyslu modifikací substituční metody.

Nechť jsou $G(x)$, $F(x)$ a $H(x)$ tři dané funkce jedné proměnné. Pak lze funkcionální rovnici

$$f(G(x))=H(x)+F(x)\,.\,f(x)$$

řešit tímto postupem:

1. Najdeme jedno její řešení $\varphi(x)$ (často se to děje tak, že je „uhádneme").

2. Předpokládáme, že $f(x)$ je libovolné řešení výše uvedené rovnice, a položíme $\psi(x)=f(x)-\varphi(x)$.
Je zřejmé, že funkce $f(x)$ bude řešením dané funkcio-

nální rovnice tehdy a jen tehdy, bude-li $\psi(x)$ řešením funkcionální rovnice

$$\psi(G(x)) = F(x) \,.\, \psi(x).$$

3. Vyřešíme tuto poslední rovnici a najdeme funkci $\psi(x)$; tím určíme i funkci $f(x)$.

Nebudeme se pouštět do dalších podrobností a všimneme si několika příkladů.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x) + \frac{1}{\sin x} = f\left(\frac{x}{2}\right). \tag{28}$$

Z vlastností trigonometrických funkcí plynou rovnosti

$$\cot\!g\, x + \frac{1}{\sin x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2\cos^2 \dfrac{x}{2}}{2\cos \dfrac{x}{2} \,.\, \sin \dfrac{x}{2}} =$$

$$= \cot\!g\, \frac{x}{2},$$

které ukazují, že jedním z řešení funkcionální rovnice (28) je funkce $\cot\!g\, x$.

Budiž nyní $f(x)$ libovolné řešení této rovnice a položme $\psi(x) = f(x) - \cot\!g\, x$. Pak bude funkce $\psi(x)$ řešením rovnice

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

a tedy je $\psi(x) = \text{const.}$

A tak jsou všechna řešení funkcionální rovnice (28) tvořena funkcemi

$$f(x) = \operatorname{cotg} x + c\,,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

Právě popsanou metodu lze použít i u „složitějších" funkcionálních rovnic.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) - \\ &- 4\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\sin\frac{x}{2}\,.\,\sin\frac{y}{2} - 1\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Protože platí

$$\cos x + \cos y - 4\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\sin\frac{x}{2}\,.\,\sin\frac{y}{2} - 1 =$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\cos\frac{x-y}{2} - 4\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\sin\frac{x}{2}\,.$$

$$.\,\sin\frac{y}{2} - 1 = 2\cos\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\,.\,\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\,.\right.$$

$$\left..\,\sin\frac{y}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\,.\,\sin\frac{y}{2}\right) - 1 = 2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1 =$$

$$= \cos(x+y)\,,$$

je jedním řešením rovnice (29) funkce $\cos x$.

Předpokládejme nyní, že $f(x)$ je libovolné řešení rovnice (29), a položme $\psi(x) = f(x) - \cos x$. Pak funkce $f(x)$ splňuje danou funkcionální rovnici tehdy a jen tehdy, splňuje-li funkce $\psi(x)$ funkcionální rovnici

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y).$$

Řešeními této poslední rovnice jsou všechny funkce tvaru $\psi(x) = cx$, kde c je libovolné reálné číslo, a proto jsou všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - 4 \cos \frac{x + y}{2} \,.\, \sin \frac{x}{2} \,.\, \sin \frac{y}{2} - 1$$

tvaru

$$f(x) = \cos x + cx,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

c) Řešme funkcionální rovnici

$$(30) \quad f(x + y) = f(x) . f(y) + xy - xf(y) - yf(x) + x + \\ + y \,.$$

Není těžké ověřit, že jedním řešením této rovnice je funkce $f(x) = x$. Proto bude funkce $f(x)$ řešením rovnice (30) tehdy a jen tehdy, řeší-li funkce $\psi(x) = f(x) - x$ funkcionální rovnici

$$\psi(x + y) = \psi(x) . \psi(y).$$

Jak jsme už viděli, mají všechna řešení této poslední rovnice tvar

$$\psi(x) = a^x,$$

kde a je libovolné nezáporné reálné číslo.

Řešeními funkcionální rovnice (30) jsou tedy všechny funkce tvaru

$$f(x) = x + a^x,$$

kde a je libovolné nezáporné reálné číslo.