3. kapitola. Další příklady množin bodů v prostoru

3. kapitola

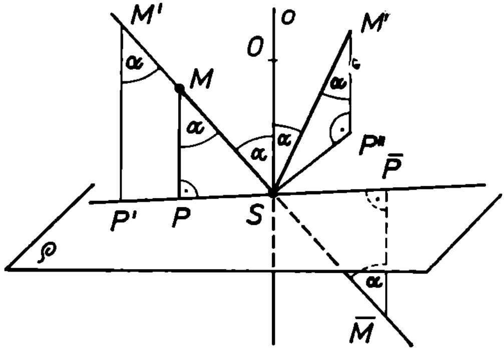
DALŠÍ PŘÍKLADY MNOŽIN BODŮ V PROSTORU

1. Je dána rovina ϱ a v ní bod S. Určete m. v. b., které mají stálý poměr vzdáleností od roviny ϱ a od bodu S, rovný danému kladnému číslu $\lambda < 1$.

Řešení. Nechť pro bod M platí vztah

$$|MP| : |MS| = \lambda, \tag{1}$$

kde bod P je pata kolmice sestrojené bodem M k rovině ϱ. Protože je $\lambda < 1$, je $P \neq S$ (obr. 5). Bod M tedy náleží hledané m. v. b. a zřejmě i každý další bod M' přímky MS až na bod S patří této m. b. To vyplývá



Obr. 5

z vlastnosti podobných pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle MSP \sim \triangle M'SP'.$$

V nich označme α velikost úhlu při vrcholu M, resp. M', což je vzhledem k vztahu (1) známé číslo, neboť $\cos \alpha = \lambda$. Sestrojíme-li bodem S přímku $o \perp \varrho$, pak je i $|\sphericalangle OSM| = \alpha$ (bod $O \neq S$ je vhodně zvolený bod na přímce o). To znamená: Každý bod M, který má vlastnost požadovanou v úloze, náleží rotační kuželové ploše K o vrcholu v bodě S a o ose kolmé k rovině ϱ; úhly tvořících přímek plochy K vzniklé rotací kolem přímky o svírají s osou plochy úhly velikosti α, přičemž $\cos \alpha = \lambda$.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod $M'' \neq S$ na kuželové ploše K, pak má bod M'' vlastnost předepsanou v úloze a patří naší m. b. To vyplývá z pravoúhlého trojúhelníku $M''SP''$ (viz obr. 5), v němž je velikost úhlu $\sphericalangle P''M''S$ rovna α, a v němž tedy platí $|M''P''| : |M''S| = \lambda$. Platí proto: *M. v. b., které mají daný poměr λ vzdáleností od roviny ϱ a od jejího bodu S, je rotační plocha kuželová K s vyloučením jejího vrcholu S.*

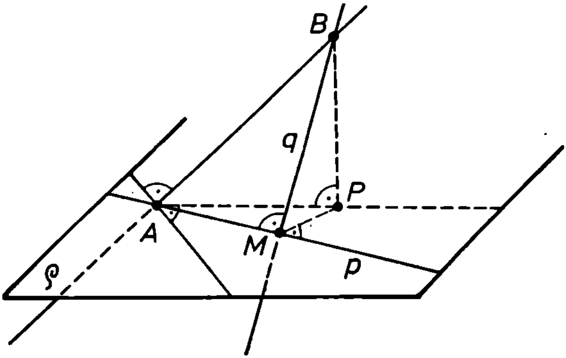
Má-li mít úloha řešení, musí být $0 < \lambda < 1$, což odpovídá tomu, že ze všech úseček, které spojují bod M (neležící na přímce o) s body roviny ϱ, je délka $|MP|$ kolmice k rovině nejkratší.

Úloha 10. Jak by vypadala m. v. b. v předcházejícím příkladě, kdyby dané číslo $\lambda = 1$? [Přímka o s vyloučením bodu S.]

2. Je dána rovina ϱ, v ní bod A a mimo ni bod B. Určete m. v. b., které jsou patou kolmice vedené bodem B k přímce, jež prochází bodem A a leží v rovině ϱ.

Řešení. Hledaná m. v. b. obsahuje zřejmě jen body, které leží v rovině ϱ.

Předpokládejme nejprve, že kolmice vedená bodem B k rovině ϱ protíná rovinu v bodě $P \neq A$ (obr. 6). Bod P je jeden bod naší m. b., neboť je patou kolmice vedené



Obr. 6

bodem B k přímce AP. Rovněž bod A patří do naší m. b., protože je patou kolmice vedené bodem B k přímce, která leží v rovině ϱ, prochází bodem A a je kolmá na přímku AP. Zvolme dále v rovině ϱ libovolnou přímku p procházející bodem A, různou od přímky AP. Označme M patu kolmice q vedené bodem B k přímce p. Snadno dokážeme, že přímka PM je kolmá k přímce p. Je totiž $p \perp BM$ a $p \perp BP$, protože $BP \perp \varrho$. Odtud vyplývá, že je přímka p kolmá ke všem přímkám roviny BMP, a tedy $p \perp PM$. Proto body M leží v rovině ϱ na Thaletově kružnici k sestrojené nad průměrem AP.

Zvolíme-li obráceně libovolný bod M($M \neq A$, $M \neq P$(na kružnici k, pak platí $AM \perp PM$ (bod M leží na k),

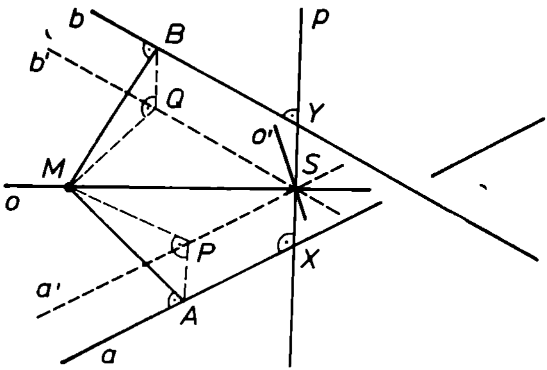
$AM \perp BP$ (protože je $BP \perp \varrho$), a tedy i AM je kolmá k rovině BPM, a proto je $AM \perp BM$.

Protože také body A, P kružnice k patří do hledané m. b., dokázali jsme, že *hledanou m. b. je Thaletova kružnice k.*

Ve zvláštním případě, který jsme zpočátku vyloučili, kdyby splynul bod P s daným bodem A, tj. kdyby byla přímka AB kolmá k dané rovině ϱ, pak by hledanou m. b. byl zřejmě pouze bod A.

Úloha 11. Je dána přímka p a mimo ni bod A. Určete množinu pat kolmic vedených bodem A ke všem rovinám svazku rovin o ose v přímce p. [Thaletova kružnice nad průměrem AP, která leží v rovině $\sigma \perp p$, σ, prochází bodem A a $P \equiv \sigma . p$.]

3. Je dána rovina σ a dvě mimoběžné přímky a, b, které jsou rovnoběžné s rovinou σ a jež mají od roviny σ



Obr. 7

stejnou vzdálenost. Určete v rovině σ množinu středů všech kulových ploch, které se dotýkají daných přímek a, b.

Řešení. Jestliže je bod M (obr. 7) roviny σ středem kulové plochy $\varkappa$, která se dotýká přímek a, b v bodech A, B, pak je přímka MA kolmá k přímce a, přímka MB je kolmá k přímce b a je $|MA| = |MB|$. Označme a', b' pravoúhlé průměty přímek a, b do roviny σ a P, resp. Q patu kolmice vedené bodem A k přímce a', resp. bodem B k přímce b'. Protože je $|AP| = |BQ|$ a úhly APM, BQM jsou pravé, jsou pravoúhlé trojúhelníky MAP, MBQ shodné (mají shodné přepony $|MA| = |MB|$ a shodné odvěsny $|AP| = |BQ|$). Proto je $|MP| = |MQ|$. Leží tedy bod M nutně na ose o úhlu přímek a', b'.

Obráceně, zvolíme-li na jedné z os $o \perp o'$ přímek a', b' libovolný bod M, pak ze shodných trojúhelníků MAP, MBQ snadno dokážeme, že bod M má od přímek a, b stejně velké vzdálenosti, a lze tedy sestrojit plochu kulovou se středem v bodě M, která se dotýká přímek a, b. To zřejmě platí i v případě, kdy za bod M zvolíme průsečík os o, o'.

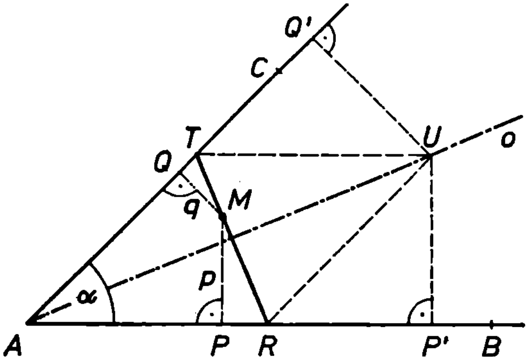
Tím jsme dokázali, že *množinou středů kulových ploch naší úlohy je sjednocení os o, o' přímek a', b'.*

4. Je dán klín K o úhlu velikosti α, $0 < \alpha < 180°$, a kladné číslo s. Určete m. v. b., které náležejí klínu K a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu je konstantní, rovný s.

Řešení. Nechť bod M vyhovuje podmínce naší úlohy, tj. pro jeho vzdálenosti $|MP| = v_1$, $|MQ| = v_2$ od rovin stěn klínu K, kde P, Q jsou paty kolmic p, q vedených bodem M ke stěnám klínu, platí vztah

$$(1) \qquad v_1 + v_2 = s.$$

Protože přímky p, q jsou kolmé k hraně a klínu K, určují rovinu ω kolmou k přímce a. Průnikem roviny ω a klínu K je úhel. Řešme proto nejdříve planimetrickou úlohu: V daném úhlu určit m. v. b., jejichž součet vzdáleností od ramen úhlu se rovná danému číslu s.



Obr. 8

Nechť je dán úhel BAC velikosti α a nechť bod M tohoto úhlu splňuje podmínku úlohy, tj. součet vzdáleností bodu M od přímek AB, AC se rovná s (obr. 8). Označme P, Q paty kolmic vedených bodem M k přímkám AB, AC. Veďme bodem M mezi rameny úhlu BAC úsečku kolmou k jeho ose, její koncové body označme R na AB a T na AC. V pravoúhlých trojúhelnících MRP a MTQ platí $|\sphericalangle RMP| = |\sphericalangle TMQ| = \frac{1}{2}\alpha$ (ramena těchto ostrých úhlů jsou kolmá na ramena ostrých úhlů

UAB, UAC velikosti $\frac{1}{2}\alpha$, kde U je bod úhlu BAC, který leží zároveň na jeho ose), takže je

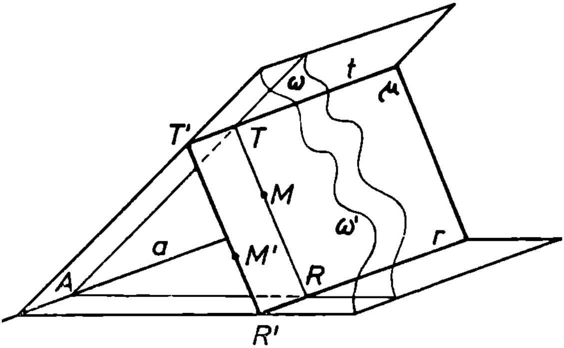
$$v_1 = |MR| \cos \frac{\alpha}{2}, \qquad v_2 = |MT| \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Tyto vztahy platí i v případě, kdy bod M splývá s některým z bodů R, T. V každém případě platí

$$|RT| = |MR| + |MT| = (v_1 + v_2) \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{s}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

velikost úsečky RT je tedy jednoznačně dána velikostí úhlu α a daným číslem s. Můžeme ji proto lehce sestrojit, například jako úhlopříčku kosočtverce $ARUT$, jehož vrchol U protilehlý k vrcholu A dostaneme jako bod ležící uvnitř úhlu BAC, jehož vzdálenosti od přímek AB a AC jsou rovny s. Z naší úvahy vyplývá: a) Platí-li o bodu M vztah (1), pak leží bod M na úsečce RT, b) leží-li bod M na úsečce RT, potom o jeho vzdálenostech v_1, v_2 od přímek AB, AC platí vztah (1). Je tedy hledanou m. v. b. úsečka RT. Podobná úloha je řešena též v 15. svazku Školy mladých matematiků, v knížce: *M. Koman*, Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, Praha 1966.

Nyní už snadno přejdeme k řešení naší prostorové úlohy, a to pomocí shodného zobrazení, v tomto případě pomocí rovnoběžného posunutí úsečky RT ve směru přímky a. Proložíme přímkou RT rovinu μ rovnoběžnou s přímkou a. Rovina μ protne roviny stěn klínu K (obr. 9) v přímkách $r \parallel t \parallel a$, které určují pás $P = (r, t)$. Zvolíme-li nyní libovolný bod M', jehož vzdálenosti od stěn klínu vyhovují podmínce naší úlohy, lze jím proložit rovinu $\omega' \perp a$ a v ní bodem M' úsečku $R'T'$ tak, že $R'T'TR$ je rovnoběžník. Úsečka $R'T'$, vzniklá zmíněným posunutím z úsečky RT, tvoří v rovině ω' m. v. b., které



Obr. 9

mají vlastnost požadovanou v naší úloze, a náleží, a s ní i zvolený bod M', zřejmě uvažovanému pásu P.

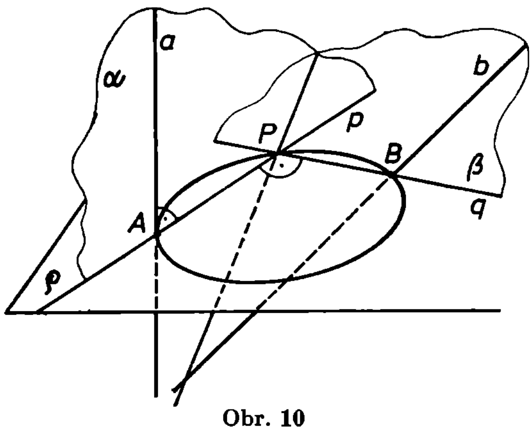
Obráceně: Každý bod M' pásu P má vlastnost požadovanou v naší úloze. Vznikl totiž z určitého bodu M úsečky RT zmíněným posunutím.

Proto nakonec platí: *M. v. b., které náležejí klínu* K *a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu* K *je roven danému číslu* s, *je přímý pás* P *roviny* μ *určený přímkami* r, t.

Úloha 12. Určete m. v. b., jejichž součet vzdáleností od daných dvou různoběžných rovin je konstantní, rovný danému kladnému číslu s. [Jsou to čtyři přímé pásy tvořící stěny přímé hranolové plochy s pravoúhelníkem jako řídicím mnohoúhelníkem a s osou rovnoběžnou s průsečnicí daných rovin.]

5. Jsou dány dvě různé přímky a, b a rovina ϱ, která je kolmá k přímce a. Každé rovině β svazku rovin o ose b přiřaďme ve svazku rovin o ose a rovinu α, která je kolmá k rovině β. Určete m. v. b. společných rovinám ϱ, α, β. Rozlište různé polohy přímky b vzhledem k rovině ϱ. (Můžeme také říci, že hledáme v rovině ϱ m. v. b., kterými je možno proložit dvě kolmé roviny, z nichž jedna prochází přímkou a a druhá přímkou b.)

Řešení. Případ [1]. Nechť je přímka b různoběžná s rovinou ϱ a průsečíky A, B přímek a, b s rovinou ϱ jsou různé (obr. 10). Průsečnice rovin α s rovinou ϱ tvoří svazek přímek v rovině ϱ o středu A. Stejně tak průsečnice všech rovin β s rovinou ϱ tvoří svazek přímek v rovině ϱ se středem B. Nechť je rovina β určena přímkou b a přímkou q z uvažovaného svazku a podobně



Obr. 10

nechť je příslušná rovina α kolmá k rovině β určena přímkou a a přímkou p ze svazku přímek o středu A, ležícím v rovině ϱ. Hledaná množina bodů naší úlohy je tedy množinou všech společných bodů dvojic přímek p, q.

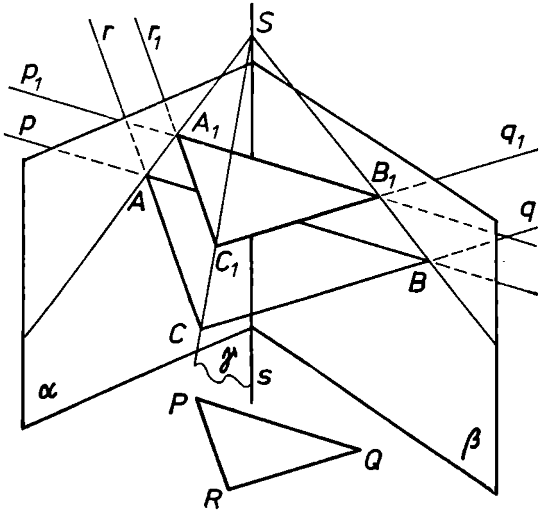
Rovina α obsahuje přímku a a přímku p. Příslušná rovina β kolmá k rovině α obsahuje jistou přímku c, která prochází bodem B a je kolmá k rovině α. Proto je přímka c kolmá k přímce a; leží tedy přímka c v rovině ϱ, a tak $c \equiv q$. Protože je však přímka c kolmá i k přímce p roviny α, je $q \perp p$. *Hledané body $P \equiv p \, . \, q$ vyplní proto v rovině ϱ Thaletovu kružnici m sestrojenou nad průměrem AB.*

Případ [2]. Přímka b je různoběžná s rovinou ϱ a protíná ji v bodě $B \equiv A$. Tu má každá dvojice rovin α, β s rovinou ϱ společný právě jen bod A. *Hledanou m. v. b. je tedy pouze bod A.*

Případ [3]. a) Přímka b je rovnoběžná s rovinou ϱ, ale neleží v ní. V tomto případě je přímka a kolmá k přímce b, takže ke všem rovinám β svazku o ose b je kolmá jediná rovina α, která obsahuje přímku a. Tato rovina α je kolmá k přímce b. *M. v. b. společných rovinám ϱ, α, β je přímka $m \equiv \varrho \, . \, \alpha$.* b) Kdyby přímka b ležela v rovině ϱ, byla by *hledanou m. v. b. celá rovina ϱ.*

6. Jsou dány dvě různé roviny α, β a trojúhelník PQR, přičemž žádná jeho strana není rovnoběžná ani s rovinou α, ani s rovinou β. Určete množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC, jejichž vrchol A leží v rovině α, vrchol B v rovině β a platí $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$.

Řešení. Případ [1]: Nechť jsou dané roviny α, β různoběžné (průsečnici označíme s). Zvolme přímku $p_1 \parallel PQ$ a ta nechť protíná rovinu α, resp. β, v bodě A_1, resp. B_1, přitom nechť je $A_1 \neq B_1$ (stačí zvolit p_1 tak, aby neprotínala přímku s). Potom veďme bodem B_1 přímku $q_1 \parallel QR$ a bodem A_1 přímku $r_1 \parallel RP$ (obr. 11). Vznikne trojúhelník $A_1B_1C_1$, jehož rovina je rovnoběžná s ro-



Obr. 11

vinou PQR. Jeho vrchol C_1 je jedním bodem hledané m. b. naší úlohy. Bod C_1 není bodem přímky s, neboť ani úsečka PR, ani úsečka QR nejsou rovnoběžné s rovinami α, β. Bod C_1 s přímkou s určují rovinu γ, o níž dokážeme, že je s vyloučením bodů přímky s hledanou množinou všech vrcholů C.

a) Nejprve dokážeme, že každá přímka $p \parallel PQ$ bez společného bodu s přímkou s vede k bodu C, který leží v rovině γ, ne však na přímce s. Nechť tedy přímka p různá od p_1 protíná rovinu α, resp. β, v bodě A, resp. B, a rovina (p, p_1) přímku s v bodě S. Potom přímka $r \parallel r_1$ vedená bodem A a přímka $q \parallel q_1$ vedená bodem B určují dvě roviny (r, S), (q, S) s průsečnicí SC_1; na přímce SC_1 leží i bod C jakožto společný bod tří rovin (r, S), (q, S), (p, p_1). Leží tedy bod C v rovině γ. K stejnému výsledku bychom dospěli v případě, kdyby byla rovina (p, p_1) rovnoběžná s přímkou s.

b) Obráceně: Zvolme v rovině γ libovolný bod $C(C \not\equiv \not\equiv C_1)$, který neleží na přímce s. Nechť přímka CC_1 protne přímku s v bodě S. Snadno dokážeme obráceným postupem úvahy provedené v a), že lze pro bod C sestrojit $\triangle ABC$ se stranou $CA \parallel RP$ a $CB \parallel RQ$ s vrcholy A, resp. B, v rovině α, resp. β. Úvahu možno sledovat na obr. 11.

Bod C nemůžeme volit na přímce s, neboť by pak přímky CA, CB měly ležet v rovině α, resp. β, protože bod A má být v rovině α a bod B v rovině β, takže by úsečky $RP(\parallel CA)$, $RQ(\parallel CB)$ byly rovnoběžné s rovinou α, resp. β, což odporuje textu naší úlohy.

Všimněme si ještě, že náš předpoklad o existenci bodu S ležícího na přímce s není pro důkaz podstatný, neboť kdyby byla přímka CC_1 rovnoběžná s přímkou s, přešla by jehlanová plocha $SA_1B_1C_1$ v plochu hranolovou obsahující body A_1, B_1, C_1 s tvořícími přímkami směru s.

Případ [2]: Jsou-li dané roviny rovnoběžné, tj. $\alpha \parallel \beta$, pak zcela obdobnou cestou dokážeme, že množinou všech vrcholů C je rovina $\gamma \parallel \alpha \parallel \beta$, kterou určíme jedním bodem C_1, jenž sestrojíme jako v případě [1]. Příslušnou úvahu ponecháme čtenáři.

Poznámka. Trojúhelníky $A_1B_1C_1$, ABC tvoří v prostoru dvojice trojúhelníků stejnolehlých o středu stejnolehlosti v bodě S v případě [1]. V případě [2] jsou všechny trojúhelníky ABC shodné.

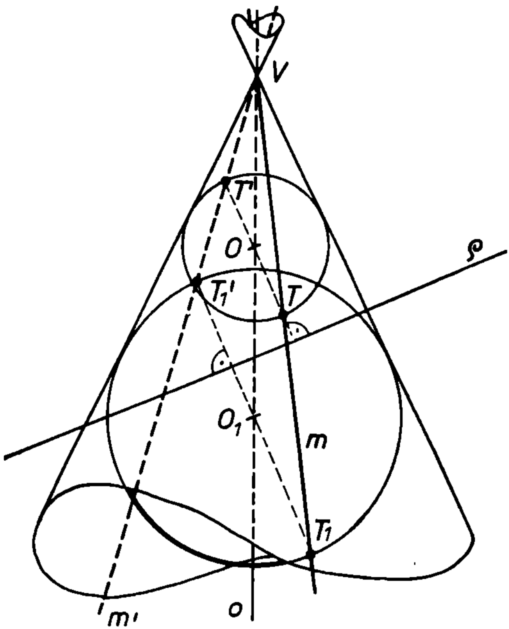
Úloha 13. Je dána přímka a, rovina β neobsahující přímku a a trojúhelník PQR, jehož žádná strana není rovnoběžná ani s přímkou a, ani s rovinou β. Určete množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC, jestliže vrchol A každého z nich leží na přímce a, vrchol B v rovině β a o jeho stranách platí: $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$. [Jestliže: a) přímka a a rovina β jsou různoběžné, potom je množinou všech vrcholů C přímka procházející bodem $P \equiv a.\beta$ s vyloučením bodu P; b) jestliže přímka a je rovnoběžná s β (nejsou však podle textu úlohy incidentní), je množinou všech vrcholů C přímka rovnoběžná s přímkou a, určená jedním bodem C_1, který splňuje podmínky úlohy a který snadno sestrojíme.]

7. Je dána rotační kuželová plocha K a rovina ϱ. Určete množinu všech bodů dotyku, v nichž se libovolné kulové plochy $\varkappa$ vepsané do kuželové plochy K dotýká tečná rovina rovnoběžná s rovinou ϱ.

Řešení. Každé dvě kulové plochy vepsané ploše K jsou, jak známo, navzájem stejnolehlé (homotetické) v stejnolehlosti (homotetii) S se středem stejnolehlosti ve vrcholu V plochy K. Středy O všech kulových ploch vepsaných ploše K vyplňují osu o plochy K až na bod V a hledané dotykové body leží na kolmicích vedených body přímky o k rovině ϱ.

Rozeznávejme dva případy: Případ [1]. Nechť daná rovina není kolmá k ose o plochy K. Dotykové body T, T', v nichž se kulové plochy $\varkappa$ vepsané kuželové ploše K dotýkají roviny rovnoběžné s rovinou ϱ, jsou diametrálně protilehlými body plochy $\varkappa$. Jejich spojnice je kolmá na rovinu ϱ a určuje spolu s osou o rovinu σ kolmou na rovinu ϱ. Zvolíme-li jinou kulovou plochu $\varkappa_1$ vepsanou ploše K, budou příslušné body dotyku T_1, T'_1

odpovídat bodům T, T' ve stejnolehlosti S, a budou tedy ležet na přímkách $m \equiv VT$, $m' \equiv VT'$ (obr. 12).



Obr. 12

Obráceně, zvolíme-li na přímce m libovolný bod T_1 nebo na přímce m' bod T_1' různé od V, lze sestrojit plochu $\varkappa_1$ se středem O_1 (nebo $\varkappa_1'$ se středem O_1'), vedeme-li v rovině σ přímku $T_1O_1 \perp \varrho$ (nebo $T_1'O_1' \perp \varrho$). Ze stejnolehlosti plochy $\varkappa$ a $\varkappa_1$ nebo $\varkappa$ a $\varkappa_1'$ vyplývá, že plochy $\varkappa_1$ a $\varkappa_1'$ jsou vepsány do plochy K a že body T_1 a T_1' jsou body hledané množiny.

Proto platí: *Hledanou množinou bodů je sjednocení přímek m, m' s vyloučením jejich společného bodu V.*

Případ [2]. Je-li ve zvláštním případě daná rovina ϱ kolmá k přímce o, pak přímky m, m' splývají s *přímkou o, která je po vyloučení bodu V hledanou množinou bodů.*

Úloha 14. Je dána rovina α, v ní bod A a rovina ϱ. Jsou sestrojeny kulové plochy $\varkappa$, které se dotýkají roviny α v bodě A. Určete množinu bodů dotyku tečných rovin všech ploch $\varkappa$, které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ. [Jsou-li roviny α, ϱ různoběžné, pak dvě navzájem kolmé přímky procházející bodem A, z nichž je bod A vyňat, a ležící v rovině, která je kolmá k průsečnici rovin α a ϱ. Ve zvláštním případě obě výsledné přímky splývají.]

8. Je dána rovina ϱ a uvnitř jednoho z poloprostorů s hraniční rovinou ϱ jsou dány body A, B různě vzdálené od roviny ϱ. Určete množinu středů všech kulových ploch $\varkappa$, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí body A, B (jinak formulováno: hledáme množinu všech bodů, jejichž vzdálenosti od roviny ϱ a bodů A, B jsou si rovny).

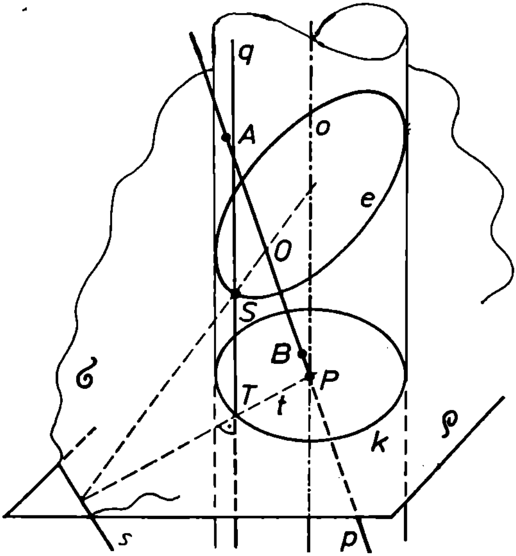
Řešení. Nechť přímka $p \equiv AB$ protíná rovinu ϱ v bodě P. Použijeme mocnosti bodu P ke kulovým plochám $\varkappa$, které procházejí body A, B. Označíme-li ještě T bod dotyku takové plochy s rovinou ϱ, platí vztah (viz kapitola 2, poznámka):

(1) $$|PA| . |PB| = |PT|^2.$$

Tímto vztahem je délka $|PT|$ jednoznačně určena. Body dotyku uvažovaných kulových ploch s rovinou ϱ leží tedy na kružnici $k \equiv (P, t)$, kde $t^2 = |PA| . |PB|$.

Nechť je bod S středem jedné z uvažovaných kulových ploch $\varkappa$. Potom a) musí být splněn vztah

$|SA| = |SB|$, b) musí pata T kolmice vedené bodem S k rovině ϱ ležet na kružnici k (viz obr. 13). Vztah a) vyžaduje, aby bod S ležel v rovině $\sigma \perp p$, v rovině sou-



Obr. 13

měrnosti bodů A, B. Aby byl splněn i požadavek b), musí bod S ležet na rotační válcové ploše V s řídicí kružnicí k. Je tedy nutné, aby bod S ležel na průniku $e \equiv \sigma . V$, kterým je, jak známo, elipsa. Ve zvláštím případě, když je přímka p kolmá k rovině ϱ, je tato elipsa kružnicí.

Ještě dokážeme, že všechny body elipsy e leží v poloprostoru (ϱ, A):

Podle vztahu (1) platí

$$|PT| = \sqrt{|PA|.|PB|}.$$

Označme O střed úsečky AB; pak je

$$|PO| = (|PA| + |PB|) : 2.$$

Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem nezáporných čísel (viz například *A. Kufner*: Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků, sv. 39, Praha 1975) plyne s ohledem na různost $|PA|$, $|PB|$ nerovnost

$$\sqrt{|PA|.|PB|} < (|PA| + |PB|) : 2,$$

tj. $|PO| > |PT|$. Protože rovina $\sigma \perp AB$ prochází bodem O, platí o vzdálenosti d její průsečnice s s rovinou ϱ od bodu P tím spíše $d > |PT|$, takže přímka s leží ve vnější oblasti kružnice k a tím leží všechny body elipsy e v poloprostoru (ϱ, A).

Obráceně, zvolíme-li na elipse e libovolný bod S, je bod S bodem roviny σ, v níž elipsa e leží, takže platí vztah $|SA| = |SB|$. Vedeme-li dále bodem S přímku $q \perp \varrho$, leží přímka q na ploše V a protíná kružnici k v bodě, který označíme T. Sestrojíme nyní kulovou plochu $\varkappa$ o středu S, která prochází body A, B, a má tedy poloměr $r = |SA| = |SB|$. Mocnost M bodu P ke kulové ploše $\varkappa$ je rovna

$$(1) \qquad |PA|.|PB| = |PT|^2,$$

protože $|PT| = t$ je poloměr kružnice k.

Mocnost M můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$M = (|PS| + r)(|PS| - r) = |PS|^2 - r^2,$$

takže je $|PS|^2 - r^2 = |PT|^2$.

Ale v pravoúhlém trojúhelníku STP (viz obr. 13) platí

$$|PT|^2 = |PS|^2 - |ST|^2,$$

takže z posledních dvou rovnic dostáváme

$$|PS|^2 - |ST|^2 = |PS|^2 - r^2$$

a odtud

$$|ST| = r = |SA| = |SB|.$$

To znamená, že se kulová plocha $\varkappa$ dotýká roviny ϱ, a že tedy patří mezi uvažované kulové plochy. Bod S je středem kulové plochy daných vlastností, a patří tudíž do hledané množiny bodů.

Závěr. Množinou středů všech kulových ploch $\varkappa$, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí body A, B (přímka AB není rovnoběžná s rovinou ϱ), je elipsa, která je ve zvláštním případě, je-li $AB \perp \varrho$, kružnicí.

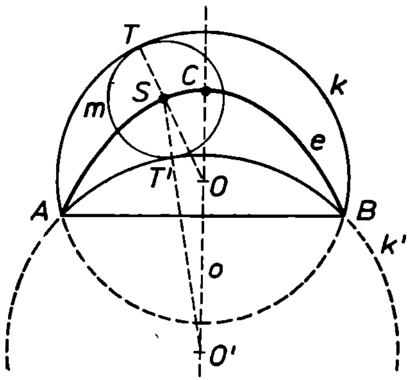
Poznámka. K řešení naší úlohy jsme mohli také použít, kromě roviny σ, rotačního paraboloidu P s ohniskem A a s řídicí rovinou ϱ (viz úloha 2, kap. 2). Protože je možno každou rovinu, která není rovnoběžná s osou paraboloidu, považovat za rovinu souměrnosti ohniska A paraboloidu P a určitého bodu B, pro který není spojnice AB rovnoběžná s řídicí rovinou paraboloidu, je průnik této roviny s plochou P množinou středů všech kulových ploch naší úlohy. Podle dříve uvedeného řešení dospíváme tak k známé geometrické větě o průniku e roviny σ, která není kolmá k rovině ϱ, s rotačním paraboloidem:

Elipsy ležící na rotačním paraboloidu promítají se kolmo na roviny kolmé k ose paraboloidu do kružnic (v našem případě elipsa e do kružnice k).

Úloha 15. Je dána rovina ϱ, přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod $A \not\equiv \varrho . p$. Určete množinu středů všech kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A. [Elipsa, ve zvláštním případě kružnice.]

9. Je dána plocha P skládající se z dvou kulových vrchlíků o společné hraně: První vrchlík je částí kulové plochy $K(O, r)$ a má výšku $v > r$, druhý vrchlík leží uvnitř prvního vrchlíku, je částí kulové plochy $K'(O', r')$ a má výšku $v' < r'$. Určete množinu středů všech kulových ploch, které jsou vepsány do plochy P.

Řešení. Nechť bod S je středem kulové plochy $\varkappa(S, x)$, která je vepsána do plochy P. Označme T dotykový bod plochy $\varkappa$ s plochou K a T' dotykový bod plochy $\varkappa$ s plochou K' (obr. 14). Potom leží bod T na přímce OS a bod T' na přímce $O'S$. Leží tedy body T, T', S v rovině ω, která obsahuje i body O, O'. Rovina ω prochází



Obr. 14

proto osou OO' rotační plochy P a určuje na ploše P její poledník (k, k'), omezený oblouky kružnic $k(O, r)$, $k'(O', r')$ o společné tětivě AB. Na ploše $\varkappa$ určuje rovina ω její hlavní kružnici $m(S, x)$.

Nyní lze naši prostorovou úlohu převést na úlohu planimetrickou v rovině ω: Hledejme množinu středů všech kružnic m, které jsou vepsány rovinnému útvaru (k, k').

Podle obr. 14 platí tyto vztahy:

$$|OS| = |OT| - |ST| = r - x,$$

$$|O'S| = |O'T'| + |T'S| = r' + x.$$

Proto je $|OS| + |O'S| = r + r' > |OO'|$, což znamená, že součet vzdáleností bodu S od daných bodů O, O' je konstantní. Odtud vyplývá, že bod S leží na oblouku ACB elipsy e, která má ohniska v bodech O, O' a která prochází body A, B. Tím je elipsa e určena.

Obráceně platí, že každý bod S, který leží na oblouku ACB elipsy e, je středem kružnice m, kterou lze vepsat do útvaru (k, k'), což vyplývá z předchozích úvah.

Rotací roviny ω a oblouku ACB kolem osy $o \equiv OO'$ vytvoří oblouk ACB plochu E, a to část rotačního protáhlého elipsoidu s ohnisky v bodech O, O', omezenou kruhovou hranou, která je společnou hranou daných vrchlíků. *Plocha E s vyloučením bodů své kruhové hrany je pak množinou středů všech kulových ploch vepsaných do plochy P.*

Úloha 16. Je dáno těleso T, které je průnikem dvou koulí $K(O, r)$, $K'(O', r')$ různých poloměrů, pro které platí $|r - r'| < |OO'| < r + r'$. Určete množinu středů všech kulových ploch, které jsou vepsány do tělesa T. [Část rotačního hyperboloidu dvoudílného, jehož ohniska jsou v bodech O, O'.]

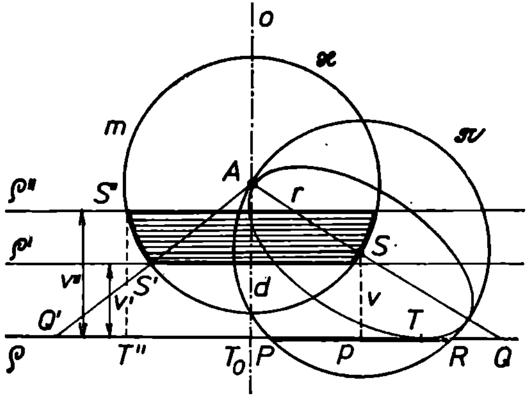
Úloha 17. Je dána polosféra na kulové ploše $\varkappa_1 \equiv (O, r)$ sestrojená nad rovinou ϱ rovníku plochy $\varkappa_1$ a uvnitř kulová plocha $\varkappa_2 \equiv \left(O', \frac{1}{2} r\right)$, které se dotýká plocha $\varkappa_1$ i rovina ϱ. Určete množinu středů všech kulových ploch, které se dotýkají $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a ϱ. [Kružnice v rovině rovnoběžné s ϱ o středu na úsečce OO' a poloměru $r\sqrt{2}/2$.]

10. Je dána rovina ϱ a bod A, který má od roviny ϱ vzdálenost d $(0 < d \leqq 2r)$. Určete množinu středů všech kružnic k daného poloměru $r > 0$, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí bodem A.

Řešení. Rovina ϱ se dotýká kružnice k, má-li s ní společný právě jeden bod. Potom je průsečnice roviny kružnice s rovinou ϱ tečnou této kružnice.

Střed S každé kružnice k o poloměru r, která prochází daným bodem A, má od bodu A vzdálenost $|SA| = r$. Body hledané množiny bodů, pokud není prázdná, leží tedy nutně na kulové ploše $\varkappa$ se středem A a s poloměrem velikosti r. Sestrojíme-li jeden bod S naší množiny, pak všechny body vzniklé z bodu S otočením kolem přímky o, která prochází bodem A a je kolmá k rovině ϱ, patří také do hledané množiny. Přímka o je totiž nejen osou plochy $\varkappa$, ale i roviny ϱ. Body odvozené z bodu S touto rotací vyplní na ploše $\varkappa$ kružnici ležící v rovině rovnoběžné s rovinou ϱ. Stačí tedy vyhledat body S na poledníku m (obr. 15a) plochy $\varkappa$, který tvoří obrys pravoúhlého průměru plochy $\varkappa$ do roviny proložené přímkou o. Z nich dostaneme potom všechny ostatní body hledané množiny bodů otočením kolem přímky o.

Nechť bod S zvolený na poledníku m plochy $\varkappa$ je bodem hledané množiny bodů. Pak je přímka SA průměrem kružnice k o středu S. Všechny kružnice o středu S a poloměru rovném r vyplní kulovou plochu $\pi(S, r)$. Z nich vedou k řešení dané úlohy ty kružnice na ploše π, jež se dotýkají průsečnice své roviny σ s rovinou ϱ. Rovina σ protne tedy rovinu ϱ v tečně kulové plochy π.



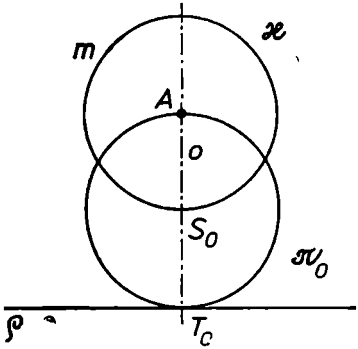
Obr. 15a

Aby bylo možno tento požadavek splnit, je třeba a stačí, aby a) kulová plocha π měla s rovinou ϱ alespoň společný bod a aby současně b) průsečík Q přímky AS s rovinou ϱ, jímž jde průsečnice hledané roviny σ s rovinou ϱ, neležel uvnitř koule omezené plochou π. Poznamenejme, že v případě, kdy bod Q neexistuje, tj. v případě, kdy je $AS \parallel \varrho$, je průsečnice roviny hledané kružnice s rovinou ϱ rovnoběžná s přímkou AS.

Je tedy zřejmě nutné, aby o vzdálenosti v bodu S od roviny ϱ platilo:

Jednak a) $v \leqq r$ a dále b) $v \geqq \frac{1}{2} d$ (neboť musí platit

$|SQ| \geqq |SA|$, tj. $|SQ| \geqq \frac{1}{2}|AQ|$, a proto $v \geqq \frac{1}{2} d \big)$. Body S nemohou podle toho ležet vně kulového pásu omezeného rovinami $\varrho' \parallel \varrho$, $\varrho'' \parallel \varrho$, přičemž roviny ϱ', resp. ϱ'', ležící v poloprostoru (ϱ, A), mají od roviny ϱ vzdálenosti $\frac{1}{2} d$, resp. r.



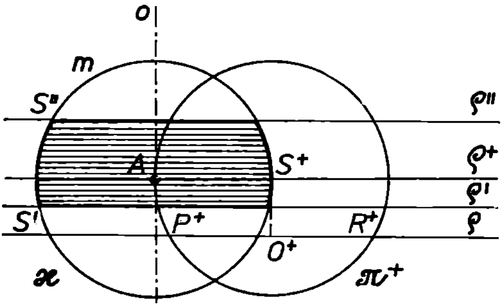
Obr. 15b

Odtud ihned vyplývá:

a) *Množinou všech středů naší úlohy je jediný bod* S_0 *plochy* $\varkappa$ *v případě, kdy je* $d = 2r$ (obr. 15b). Všechny kružnice $k(S_0, r)$, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ v společném bodě $T_0(AT_0 \perp \varrho)$, vyhovují požadavkům úlohy, a žádné jiné.

b) Jestliže je $d < 2r$, je třeba body S hledat jenom na té části poledníku m plochy $\varkappa$, která náleží kulovému pásu určenému rovinami ϱ', ϱ''. A skutečně, zvolíme-li na oblouku m libovolný bod S uvnitř kulového pásu

(ϱ', ϱ''), tj. ve vzdálenosti v od roviny ϱ, o níž platí $\frac{1}{2}d < v < r$, potom plocha $\pi(S, r)$ protne rovinu ϱ v kružnici p. Dále: z bodu Q, který leží v tomto případě vně plochy π, a tedy i vně kružnice p, lze vést k p dvě tečny t_1, t_2 — dvě průsečnice rovin σ_1 a σ_2 s rovinou ϱ; v rovině $\sigma_1 \equiv (A, t_1)$ a $\sigma_2 \equiv (A, t_2)$ lze sestrojit dvě kružnice k_1 a k_2, které procházejí bodem A, mají polo-



Obr. 15c

měr velikosti r a dotýkají se roviny ϱ, jak žádá naše úloha.

Zvolíme-li dále bod S' v rovině ϱ', tj. ve vzdálenosti $v' = \frac{1}{2}d$ od roviny ϱ, potom příslušný bod Q' padne na kružnici p' a tečna v něm sestrojená k p' je průsečnicí roviny jediné kružnice k', která vyhovuje podmínkám úlohy. Její rovina je kolmá k rovině poledníku m.

Konečně, zvolíme-li bod S'' v rovině ϱ'', tj. ve vzdálenosti $v'' = r$ od roviny ϱ, pak plocha $\pi''(S'', r)$ se dotýká roviny ϱ v bodě T''. Rovina $\sigma_2 \equiv (AS''T'')$ je totožná s rovinou poledníku m a v té také leží kružnice k'', jež splňuje podmínky úlohy.

Podle toho každý bod oblouku $\widehat{S'S''}$ patří do hledané množiny bodů. *Otočením oblouku $\widehat{S'S''}$ kolem osy o vznikne kulový pás (ϱ', ϱ'') omezený kružnicemi plochy $\varkappa$, které leží v rovinách ϱ', ϱ''; ten je hledanou množinou středů všech kružnic daných vlastností.*

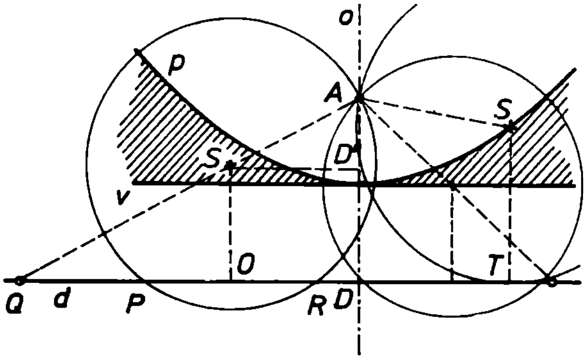
Poznámka. Na obr. 15c je znázorněn případ b) z předcházející diskuse, při kterém však obsahuje naše hledaná množina bodů také rovník plochy $\varkappa$ v rovině ϱ^+. Pro každý bod S^+ rovníku dostaneme dvě kružnice, k_1^+, k_2^+, neboť sestrojíme-li plochu $\pi^+(S^+, r)$, potom π^+ nutně protne rovinu ϱ v kružnici p^+ o středu O^+ (její obraz na obr. 15c je úsečka P^+R^+). Její dvě tečny rovnoběžné s přímkou AS určují s bodem A roviny kružnic k_1^+, k_2^+, které splňují podmínky naší úlohy.

11. Je dána rovina ϱ a bod A, jehož vzdálenost od roviny ϱ je $d > 0$. Určete množinu středů všech kružnic, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ.

Řešení. Víme, že rovina ϱ a bod A určují plochu P rotačního paraboloidu jako množiny středů všech kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí bodem A. Přitom je bod A ohniskem a rovina ϱ řídicí rovinou paraboloidu P (viz úlohu 2, kap. 2). Libovolná rovina μ proložená bodem A kolmo k rovině ϱ má s plochou P společnou parabolu p, která má ohnisko v bodě A a za řídicí přímku průsečnici d roviny μ s rovinou ϱ (obr. 16). Parabola p tvoří jeden poledník plochy P.

Protože daný útvar, tj. rovina ϱ a bod A, se nemění při otáčení kolem přímky o vedené bodem A kolmo k rovině ϱ, je i hledaná množina bodů rotačním útvarem s osou o.

Najdeme-li tedy v rovině μ středy S všech kružnic k, které vyhovují podmínkám naší úlohy, pak body vzniklé



Obr. 16

otočením všech bodů S kolem přímky o vyplní hledanou množinu středů. Hledejme proto zatím jenom body S v rovině paraboly p.

a) Každý bod S, který leží na parabole p, náleží hledané množině středů, neboť je středem kružnice $k(S, |SA|)$, která leží v rovině paraboly p a dotýká se řídicí přímky d, a proto i roviny ϱ v bodě T na přímce d, jak plyne z definice paraboly.

b) Body S zvolené ve vnitřní oblasti paraboly p mají tu vlastnost, že jejich vzdálenost od přímky d je větší než délka úsečky SA, takže příslušná kulová plocha $\pi(S, |SA|)$ nemá s rovinou ϱ žádný společný bod, což znamená, že body S nepatří do hledané množiny.

c) Zvolíme-li dále bod S ve vnější oblasti paraboly p, a jak hned ukážeme, pouze v oblasti ω roviny μ, ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v, náleží bod S naší množině. Každý bod S ležící uvnitř oblasti ω má, jak známo, tu vlastnost, že jeho vzdálenost od přímky d je menší než délka úsečky SA. Proto protne kulová plocha $\pi(S, |SA|)$ rovinu ϱ v kružnici, kterou označíme q, její střed O (na obr. 16 je zobrazena kružnice q jako úsečka PR). Přímka AS, pokud není rovnoběžná s přímkou d, protne rovinu ϱ a přímku d v bodě Q, který padne do vnější oblasti kružnice q. Je totiž $|SQ| > |SA|$, neboť je $|D'D| > |AD'|$, a tedy bod Q leží vně plochy π. Z bodu Q lze pak vést ke kružnici q dvě tečny t, t' s dotykovými body T, T'. Potom je už možné sestrojit kružnice $k(S, |SA|)$ a $k'(S, |SA|)$ v rovinách $\sigma \equiv (S, t)$ a $\sigma' \equiv (S, t')$, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ a její přímky t, resp. t', v bodě T, resp. T'. Kružnice k, k' splňují podmínky naší úlohy, takže bod S náleží hledané množině středů kružnic.

Ještě poznamenejme, že v případě, kdyby bylo $AS \parallel d$, byly by příslušné tečny t, t' rovnoběžné s přímkou AS.

d) Rovněž body S přímky v náležejí naší m. b. Odůvodnění je stejné jako v případě c), jen s tím rozdílem, že v tomto případě padne příslušný bod $Q \equiv SA \,.\, d$ na kružnici $q \equiv \pi \,.\, \varrho$, kde π je kulová plocha $\pi(S, |SA|)$.

e) Zvolíme-li konečně bod S uvnitř poloroviny vyťaté přímkou v, která obsahuje přímku d, nevede bod S k řešení naší úlohy. Důkaz už ponecháme čtenáři.

V odstavcích a) až e) jsme uvažovali o všech bodech roviny μ, takže je naše úloha úplně vyřešena. Odtud vyplývá tento závěr:

Množinou středů všech kružnic, které procházejí daným

bodem A a které se dotýkají dané roviny ϱ, je část poloprostoru (ϱ', A), vyťatého vrcholovou tečnou rovinou ϱ' paraboloidu P, vzniklá z něho vyloučením všech bodů, které leží ve vnitřní oblasti rotačního paraboloidu P.

Body této množiny dostaneme z bodů rovinné oblasti ω, ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v, rotací oblasti ω kolem přímky o, která je osou souměrnosti oblasti ω.

12. Jsou dány dvě různé rovnoběžné roviny $\varrho \parallel \sigma$ a přímka p, která neleží v žádné z nich. Určete množinu středů a) všech kulových ploch, b) všech kružnic, které se dotýkají rovin ϱ, σ a přímky p.

Řešení. a) Kulové plochy $\varkappa$, které se dotýkají dvou rovnoběžných rovin ϱ, σ, jejichž vzdálenost je $v > 0$, tj. jsou vepsány do rovinové vrstvy o výšce v, mají průměr rovný $v = 2r$, kde r je poloměr ploch $\varkappa$. Středy ploch $\varkappa$ vyplňují rovinu $\omega \parallel \varrho$, rovinu souměrnosti dané vrstvy.

Je-li přímka p tečnou kulové plochy $\varkappa$, která má poloměr r, potom má střed S plochy $\varkappa$ od přímky p vzdálenost r. Středy S všech ploch $\varkappa(r)$, které se dotýkají přímky p, vyplní rotační válcovou plochu V o ose v přímce p a poloměru řídicí kružnice r.

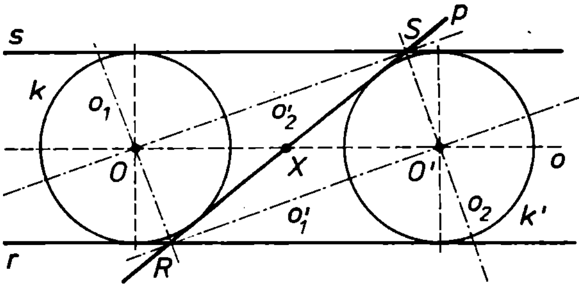
Odtud plyne, že střed S kulové plochy $\varkappa$, která se dotýká rovin ϱ, σ a přímky p, leží v průniku e roviny ω a plochy V. Obráceně, zvolíme-li v průniku e libovolný bod S, potom je jeho vzdálenost od rovin ϱ, σ i od přímky p rovna r; lze tedy opsat okolo bodu S kulovou plochu $\varkappa$, která se dotýká rovin ϱ a σ i přímky p. Proto je *m. v. b. S průnik $e \equiv \omega . V$, a to*:

[1] *elipsa nebo kružnice v případě, že je daná přímka p různoběžná s rovinou ϱ i σ,*

[2] *dvě přímky (náležející ploše V) ležící v rovině ω*

případě, že je přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ a σ a leží uvnitř rovinové vrstvy (ϱ, σ).

[3] *Úloha nemá řešení, leží-li přímka p ∥ ϱ vně rovinové vrstvy (ϱ, σ). Případ, kdy p leží v rovině ϱ nebo σ, je v textu úlohy vyloučen.*



Obr. 17

b) Případ [1]. Nechť je přímka p různoběžná s rovinou ϱ, a tedy i s rovinou σ. Je-li přímka p tečnou kružnice k, o níž předpokládáme, že vyhovuje naší úloze, leží k v rovině α proložené přímkou p. Má-li se dále kružnice k dotýkat rovin ϱ a σ, musí rovina α obsahovat dvě tečny kružnice k, které tvoří průsečnice $r \equiv \alpha.\varrho$ a $s \equiv \alpha.\sigma$; přitom zřejmě platí, že je $r \parallel s$ (obr. 17). Proto je kružnice k vepsána do rovnoběžného pásu (r, s) roviny α a dotýká se přímky p. Jsou tedy v rovině α dvě kružnice $k(O, u)$ a $k'(O', u)$, které vyhovují podmínkám úlohy. Jejich poloměr je $u = d/2$, kde d značí vzdálenost přímek r, s.

Protože osy úhlů přímek r, p a s, p jsou dvojice kolmých přímek o_1, o_1' a o_2, o_2' a přitom je $o_1 \parallel o_2$ a $o_1' \parallel o_2'$, jsou pravoúhlé trojúhelníky ROS, $SO'R$ shodné (s pravými úhly ve vrcholech O a O'). Označíme-li velikost jejich společné přepony $|RS| = q$, platí o jejich těžnicích OX a $O'X$ vztah

$$|OX| = |O'X| = |RS|/2 = q/2,$$

což je úsečka dané velikosti. A to platí analogicky pro všechny roviny α svazku rovin o ose v přímce p. Leží tedy body O, O' na kružnici $m(X, q/2)$, která leží v rovině $\omega \parallel \varrho$, v rovině souměrnosti dané vrstvy (ϱ, σ).

Obráceně, zvolíme-li na kružnici m libovolný bod O, lze v rovině (O, p) vždy sestrojit kružnici k, která vyhovuje podmínkám úlohy. *Proto je množinou středů všech kružnic, které se dotýkají daných rovin ϱ, σ a přímky p, právě popsaná kružnice m.*

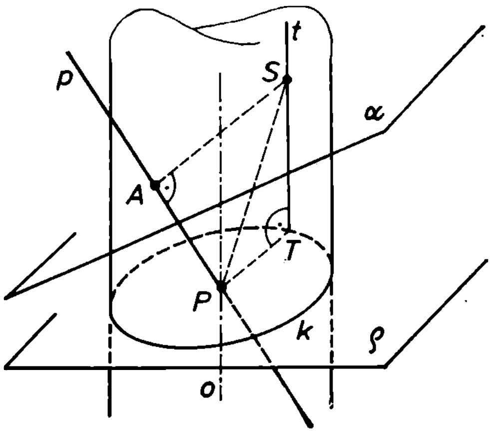
Případ [2]. *Je-li daná přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ a s rovinou σ, ale neleží v žádné z nich, nemá úloha řešení.*

Úloha 18. Jsou dány dvě rovnoběžné a různé roviny ϱ, σ a přímka p, která leží v jedné z nich. Určete množinu středů a) všech kulových ploch, b) všech kružnic, které se dotýkají rovin ϱ, σ a přímky p. [a) Přímka $m \parallel p$, která je průsečnicí dvou rovin: roviny $\omega \parallel \varrho$ souměrnosti vrstvy (ϱ, σ) a roviny γ, proložené přímkou p tak, že je $\gamma \perp \omega$, b) rovina ω.]

13. Je dána rovina ϱ, přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod A, který neleží v rovině ϱ. Určete množinu středů a) všech kulových ploch, b) všech kružnic, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A.

Řešení. a) Nechť přímka p protíná rovinu ϱ v bodě P. Označme T dotykový bod roviny ϱ a kulové plochy $\varkappa$, která splňuje podmínky úlohy. Potom jsou si rovny délky úseček PA a PT, tj. délky tečen vedených z bodu P

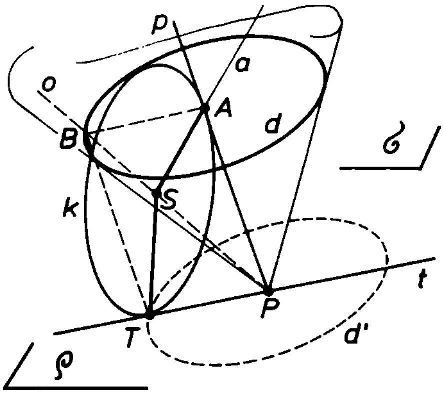
k ploše $\varkappa$, tedy $|PA| = |PT|$. Pro různé plochy $\varkappa$ naší úlohy leží jejich dotykové body T s rovinou ϱ na kružnici $k(P, |PA|)$ a středy S ploch $\varkappa$ na přímkách t vedených body T kolmo k rovině ϱ (obr. 18). Přímky t vytvoří tedy rotační válcovou plochu V o ose $o \perp \varrho$ procházející bodem P; kružnice k je její řídicí kružnicí.



Obr. 18

Dále víme, že množinou středů všech kulových ploch, které se dotýkají přímky p v bodě A, je rovina α vedená bodem A kolmo k přímce p. Proto leží středy ploch $\varkappa$ v průniku e roviny α s plochou V. Obráceně, zvolíme-li na e libovolný bod S, lze z bodu S opsat kulovou plochu $\varkappa(S, r)$, která se dotýká přímky p v jejím bodě A, a jak hned dokážeme, i roviny ϱ v určitém bodě T.

Bod S leží totiž jednak v rovině α, jednak na ploše V, jejíž povrchová přímka $t \perp \varrho$ prochází zvoleným bodem S a protíná rovinu ϱ v bodě T; přitom platí rovnost $|PT| = |PA|$. Proto jsou pravoúhlé trojúhelníky PSA a PST shodné (mají společnou přeponu PS a shodné odvěsny PT, PA), takže je také $|SA| = |ST| = r$. Proto je bod T bodem dotyku kulové plochy se středem v bodě S a roviny ϱ, která se také dotýká v bodě A přímky p.



Obr. 19

Je tedy množinou středů všech kulových ploch, které splňují podmínky naší úlohy, elipsa, která je v případě $p \perp \varrho$ *kružnicí.*

b) Kružnice k, která vyhovuje podmínkám úlohy, leží v určité rovině α proložené přímkou p, jíž se kružnice k dotýká v bodě A; kružnice k se dotýká také přímky $t \equiv \alpha . \varrho$ v bodě T. Střed S kružnice k leží proto na ose o úhlu APT a dále na přímce a roviny α, vedené bodem A kolmo k přímce p (obr. 19). Bude účelné sestrojit v rovině α přímku o jako úhlopříčku PB rovnoběžníku $PABT$, který je kosočtvercem (případně čtvercem), neboť platí rovnost $|PA| = |PT|$ (délky tečen vedených z bodu P ke kružnici k jsou stejně dlouhé).

Protože je $|AB| = |PT| = |AP|$, leží body B na kružnici $d(A, |AP|)$, která leží v rovině $\sigma \parallel \varrho$. Přímky PB, tj. osy úhlů APT, vytvoří kuželovou plochu K, která má vrchol v bodě P a řídicí kružnici d. Protože dále přímky a jako kolmice sestrojené k přímce p v bodě A leží v rovině $\omega \perp p$, leží body S na průniku m roviny ω s plochou K.

K tomu ještě připomeňme, že body T leží v rovině ϱ na kružnici $d'(P, |PA|)$, shodné s kružnicí d.

Obráceně, zvolíme-li v průniku m libovolný bod S, lze kolem bodu S opsat kružnici $k(S)$, která se dotýká přímky p v bodě A a roviny ϱ v určitém bodě T. To dokážeme takto: Bodem S prochází na kuželové ploše K povrchová přímka PS, která určuje na kružnici d bod B. Rovina $\alpha \equiv (p, S)$ protíná rovinu σ v přímce AB a rovinu ϱ v přímce $PT \parallel AB$, kde bod T je bodem kružnice d'. Úhlopříčka vzniklého kosočtverce $BAPT$ je přímka PB, která obsahuje bod S. Přímka $SA \equiv \alpha . \omega$ je kolmá k přímce p. Ze souměrnosti kosočtverce $BAPT$ podle jeho úhlopříčky PS vyplývá, že je úsečka ST kolmá k PT a $|ST| = |SA|$ je poloměr hledané kružnice k.

Odtud vyplývá: *Množinou středů všech kružnic, které splňují podmínky úlohy, je průnik $m \equiv \omega . K$, tj. buď elipsa, nebo ve zvláštním případě, je-li přímka p kolmá k rovině ϱ, kružnice.*

Průnikem m je totiž vždy elipsa, případně kružnice, protože všechny přímky PB kuželové plochy K svírají s přímkou PA úhel menší než úhel pravý, přičemž rovina průniku je kolmá k přímce PA, takže protíná všechny přímky kuželové plochy K.

Úloha 19. Je dána rovina ϱ, přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ (neleží však v ϱ) a na přímce p bod A. Určete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají přímky p v bodě A a roviny ϱ. [Přímka $m \equiv \omega . \sigma$, průsečnice roviny ω vedené bodem A kolmo k přímce p a roviny $\sigma \parallel \varrho$, přičemž rovina σ má od přímky p i od roviny ϱ stejně velké vzdálenosti.]

14. Je dána kulová plocha $\varkappa(S, r)$ a vně plochy $\varkappa$ bod V. Do plochy $\varkappa$ jsou vepsány komolé kužele K tak, že bod V je společným vrcholem úplných kuželů, příslušných kuželům K. Určete m. v. b., které náležejí obvodu středního řezu M některého z uvažovaných komolých kuželů K.

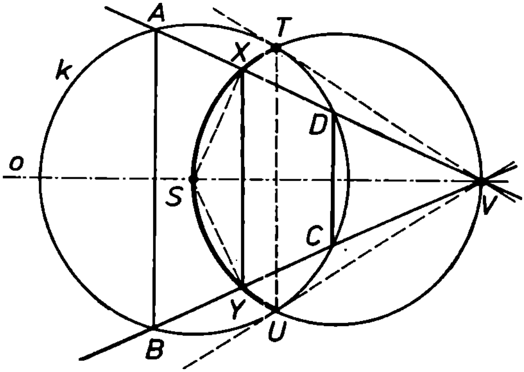
Poznámka. Ke každému komolému kuželi lze sestrojit příslušný kužel doplňkový, který spolu s ním tvoří příslušný kužel úplný. Z tohoto kužele vznikne obráceně daný komolý kužel řezem, který leží ve vhodné rovině rovnoběžné s rovinou podstavy úplného kužele.

Řešení úlohy. Komolý kužel K vepsaný do plochy $\varkappa$ je nutně rotační, neboť obvody jeho podstav leží na ploše $\varkappa$; jsou to tedy kružnice v rovnoběžných rovinách, takže přímka o, která obsahuje středy těchto podstav, prochází středem S plochy $\varkappa$ a je osou komolého kužele K i plochy $\varkappa$. Osa o prochází zřejmě i bodem V.

Zvolme libovolnou rovinu ω obsahující přímku o. Řez vzniklý na našem útvaru rovinou ω je znázorněn na obr. 20. Na ploše $\varkappa$ je to kružnice $k(S, r)$ a na kuželi K rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jehož ramena se v prodloužení protínají v bodě V. Náš prostorový útvar vznikne otáčením uvažovaného řezu ležícího v rovině ω

kolem přímky o, takže se vyšetřování hledaných obvodů M převede na planimetrickou úlohu v rovině ω.

Střední řez M na kuželi K protíná rovinu ω v úsečce XY, která tvoří střední příčku lichoběžníku $ABCD$. Její krajní body X, Y, jakožto středy úseček AD a BC,



Obr. 20

leží na kruhovém oblouku $\widehat{TSU}$, který leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem SV, neboť je $SX \perp AD$ a $SY \perp BC$.

Obráceně: Zvolíme-li libovolný vnitřní bod X oblouku $\widehat{TSU}$ (kromě bodu S), lze jím sestrojit tětivu XY v oblouku $\widehat{TSU}$, kolmou k přímce o; úsečka XY určuje střední příčku příslušného lichoběžníku $ABCD$, kde body A, D leží na přímce VX a body B, C na přímce VY. Je totiž $SX \perp AD$, a proto platí $|AX| = |XD|$. Z vnitřních bodů oblouku $\widehat{TSU}$ je nutno vyloučit bod S, neboť nedává na oblouku $\widehat{TSU}$ žádnou tětivu. Také krajní body T, U oblouku $\widehat{TSU}$ nevedou ke konstrukci lichoběžníku, protože přímky VT, VU jsou tečnami kružnice k a nevzniknou na nich žádné tětivy kružnice k, jež by měly být rameny lichoběžníku. Tím jsme dokázali planimetrickou větu: *Množinou středů ramen všech rovnoramenných lichoběžníků vepsaných do dané kružnice k, přičemž ramena každého z těchto lichoběžníků se protínají v bodě V z vnější oblasti kružnice k, je kruhový oblouk $\widehat{TSU}$, až na jeho body T, S, U.*

Rotací bodů X, Y kolem přímky o vznikají pak obvody středních řezů M kuželů K. Proto platí: *Obvody středních řezů M komolých kuželů K naší úlohy vyplní kulový vrchlík, který je průnikem vnitřku plochy $\varkappa$ a Thaletovy kulové plochy sestrojené nad průměrem SV s vyloučením jeho hrany a jeho bodu ležícího na jeho ose.* Tím je hledaná m. b. určena.

15. Je dán rotační válec V, jehož podstava má poloměr r a výška válce je v. Určete množinu středů S všech koulí o daném poloměru ϱ, které lze celé umístit do válce V.

Řešení. Předpokládejme, že koule $\varkappa(S, \varrho)$ se středem S je celá umístěna ve válci V. Potom leží bod S uvnitř válce a má od všech bodů jeho povrchu vzdálenost větší nebo rovnou ϱ. Musí tedy bod S splňovat dvě podmínky; označme je A a B:

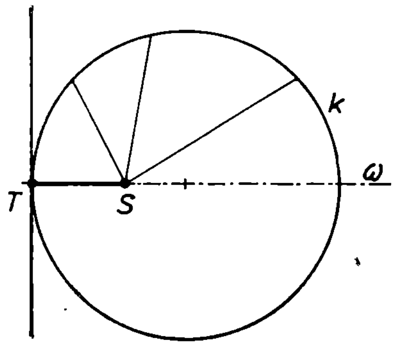
A) Bod S musí být od rovin podstav válce V vzdálen o délku větší nebo rovnou ϱ. Leží proto v průniku P dvou poloprostorů: jednoho opačného k (σ, O), druhého opačného k (σ', O'), kde body O, O' jsou středy podstav daného válce, a to O střed podstavy ležící v rovině π, O' střed podstavy ležící v rovině π'; přitom rovina $\sigma \parallel \pi$

náleží poloprostoru (π, O') a je od roviny π vzdálena o délku rovnou ϱ a rovina $\sigma' \parallel \pi$ patří do poloprostoru (π', O) a její vzdálenost od roviny π' je opět ϱ.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S v útvaru P, lze z bodu S opsat kouli $\varkappa(S, \varrho)$, která nemá společné body s žádnou z rovin π, π', nebo se v krajním případě roviny π nebo π' dotýká. To znamená, že průnik P, pokud není prázdný, tj. pokud $\varrho \leqq v/2$, je množinou středů S všech koulí $\varkappa$, které splňují podmínku A.

B) Bod S musí mít od všech bodů pláště válce V vzdálenost větší nebo rovnou ϱ.

Ptejme se nejdříve na vzdálenosti bodu S, který leží uvnitř válce V, od površek příslušné válcové plochy. Tyto vzdálenosti zjistíme v rovině μ proložené bodem S kolmo k površkám válcové plochy, tj. kolmo k ose o válce V. Jedná se zřejmě o vzdálenosti bodu S od bodů ležících na obvodu k kruhového řezu, který je průnikem válce V a roviny μ (obr. 21a). Kdyby bod S ležel na ose OO' válce V, měl by od všech površek válce stejnou



Obr. 21a

vzdálenost r. Leží-li bod S mimo úsečku OO', má právě jeden bod T kružnice k od bodu S nejmenší vzdálenost. Úsečka ST délky $d < r$ je obsažena v rovině $\omega \equiv (S, o)$. Úsečka ST je také nejkratší úsečkou ze všech úseček, které spojují bod S a libovolný bod pláště válce. Její velikost nazveme vzdáleností bodu S od pláště válce.

Rovnoběžným posunutím bodu S ve směru přímky o tak, aby zůstal ve válci V, nebo otočením bodu S kolem přímky o se jeho vzdálenost d od pláště válce nemění. Body tak vzniklé vyplní plášť rotačního válce o ose OO' a poloměru $r - d$. Každý bod tohoto válce má od pláště válce V vzdálenost větší nebo rovnou d a současně menší nebo rovnou r.

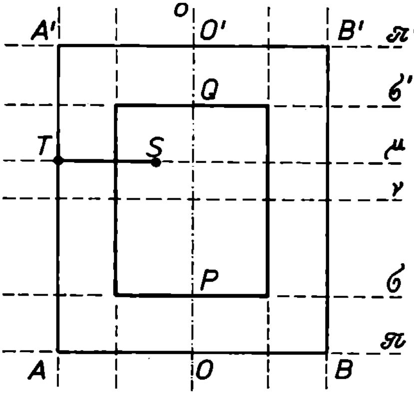
Podmínce B) je tedy možno vyhovět jenom tehdy, když je daný poloměr ϱ menší nebo roven r, takže bod S patří buď rotačnímu válci V' o ose OO' a poloměru $r - \varrho$, když je $\varrho < r$, nebo patří úsečce OO' v případě $r = \varrho$.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S tak, aby patřil do válce V' (případně úsečce OO'), má podle předchozí úvahy od všech bodů pláště válce V vzdálenost větší nebo rovnou ϱ a lze z něho opsat kouli $\varkappa(S, \varrho)$, která nemá s pláštěm válce V žádný společný bod, nebo se v krajním případě pláště válce V dotýká. Dospěli jsme tak k množině středů všech koulí, které splňují podmínku B).

V průniku obou množin P a V', odvozených v odstavcích A, B, dostáváme už řešení naší úlohy, aniž je třeba pro důkaz tohoto řešení ještě úvahu obracet. Množinou hledaných středů všech koulí $\varkappa$ naší úlohy je průnik útvarů P a V'.

Závěr: a) *Je-li $\varrho < r$ a také $\varrho < v/2$, je hledanou množinou středů všech koulí $\varkappa$ válec* (na obr. 21b je vyznačen jeho osový řez) *souosý a soustředěný s válcem V; jeho podstavy mají poloměr $r - \varrho$ a jeho výška je $v - 2\varrho$.*

b) *Je-li* $\varrho < r$ *a* $\varrho = v/2$ *(možné, jen když je* $v < 2r$*), je hledanou množinou středů koulí kruh, a to průnik roviny* ν*, která je rovinou souměrnosti rovinové vrstvy* (π, π')*, a válce* V'*. Tento kruh má střed na přímce* o *a poloměr* $r - \varrho$.



Obr. 21b

c) *Je-li* $\varrho = r$ *a* $\varrho < v/2$ *(možné, jen když je* $v > 2r$*), je hledanou množinou středů úsečka* PQ *ležící na ose* o *válce* V (viz obr. 21b).

d) *Je-li* $\varrho = r$ *a také* $\varrho = v/2$*, je hledanou množinou pouze jeden bod, a to střed válce* V*. Je to střed koule vepsané rovnostrannému válci* V*.*

e) *Je-li* $\varrho > r$ *nebo* $\varrho > v/2$*, nemá naše úloha řešení.*

Úloha 20. Určete množinu středů všech koulí o daném poloměru ϱ, které lze celé umístit do kvádru o daných rozměrech $a \geqq b \geqq c$. [Kvádr, který má týž střed jako daný kvádr, stěny rovnoběžné se stěnami daného kvádru a rozměry $a - 2\varrho$, $b - 2\varrho$, $c - 2\varrho$.]

Úloha 21. Je dán rotační kužel K, jehož podstava má poloměr $r > 0$ a jehož výška je $v > 0$. Určete množinu středů všech koulí daného poloměru $\varrho > 0$, které lze celé umístit do kužele K. [Rotační kužel souosý s daným kuželem a jemu podobný, případně jediný bod v případě $\varrho(r + \sqrt{r^2 + v^2}) = rv$.]