6. kapitola

VÝPOČET ZMIEŠANÝCH STRATÉGIÍ

6.1. Historický úvod. New Očová bola jedným z tých malebných mestečiek ležiacich na úpätí Skalistých hôr, ktoré zlatými písmenami písali dobrodružnú kapitolu novovekej histórie, kapitolu zvanú Divoký Západ. Komuže vďačí New Očová za svoju slávu? Predovšetkým dvom ostrým chlapcom: šerifovi Joe Bačovi (výška 187, váha s koltami 84 kg, oči modré, kadencia streľby 131 rán za minútu) a vyvrheľovi spoločnosti, lupičovi a zabijákovi Billy Weekendovi, ktorého priezvisko odrážalo základnú zvrátenosť Billyho povahy — pracoval výlučne v nedeľu a celých 6 pracovných dní oddychoval.

Dnešná nedeľa nebola pre Billyho úspešná. Namiesto vreca zlata našiel v Mikiho banke šerifa a jeho pomocníka Jimmyho Dunča so štyrmi vrchovato nabitými tridsaťosmičkami, pripravenými v každom okamžiku prehovoriť rečou olova. Preto teraz smutný a bezkoltý sedí v šerifovej miestnosti a skúša sa ostrovtipom svojho rozumu vysekať zo šlamastiky.

Viete čo, šerif, dám vám návrh — pustite ma! zahájil Billy. Pustite ma a tých 5000 dolárov, čo by ste od štátu za moju hlavu získali, vám vyplatím sám, dodal lupič a rozviedol, nebudete tratiť ani cent a naviac nebudete ani musieť písať hlásenie o zadržaní lupiča. Šerif chvíľu úpenlivo uvažoval a potom povedal „Sedí vec“. Po tomto konštruktívnom návrhu šerif dostal 5 tisícoviek a lupič slobodu. Jediný, komu sa to nepáčilo, bol pomocník Jimmy Dunčo.

Ja vám, šéfe, nerozumiem! Čo to bol za nápad púšťať Weekenda! Veď sám dobre viete, že budúcu nedeľu ho tu máme opäť.

Somár si ty, somár! otcovsky ohodnotil svojho pomocníka šerif a pokračoval. — Veď o to práve ide. Billy Weekend príde a s ním ďalších päť tisícoviek do našej pokladnice.

Ho, ho! a ako viete, do ktorej banky pôjde? My budeme striehnuť u Mikiho, a on vyrabuje Dorseta.

Pozri, Jimmy, skús prekonať možnosti svojho mozgu a pochopiť túto úvahu.

6.2. Úvaha šerifa Joe Baču. V meste máme dve banky. V Mikiho banke je stále 5000 dolárov a u Dorseta 2000 dolárov. Na stráženie týchto bánk máme 3 varianty:

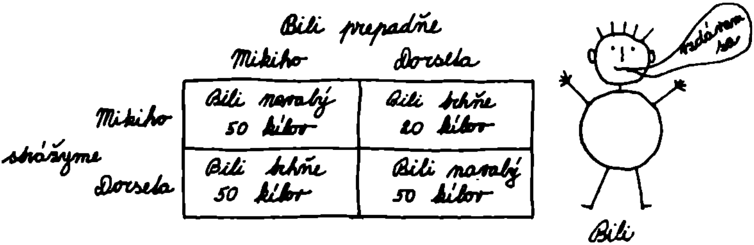
1. varianta — obaja budeme strážiť Mikiho banku,
2. varianta — obaja budeme strážiť banku Dorseta,
3. varianta — rozdelíme sa a každý z nás stráži jednu banku.

Ak Billy prepadne banku, ktorú strážime dvaja, ako dnes, zarobíme na ňom 5000. Ak Billy prepadne nestráženú banku, zarobí buď päť, alebo dva tisíc. V prípade, že budeme strážiť každý jednu banku (3. varianta), Billy ufláchne, ale bez koristi.

Weekend je správny protivník. S ním človek vie, na čom je. Je presný ako hodinky, vždy v nedeľu sa zjaví v niektorej z našich bánk. O tom, v ktorej, rozhodne pomocou dolárovej mince. Je teda 50%ná pravdepodobnosť, že navštívi Mikiho a 50%ná pravdepodobnosť, že sa zjaví u Dorseta. My chceme Billyho ožobráčiť. Preto 3. variantu budeme používať zriedkavo — dajme tomu len v mesiaci, v ktorom je 5 nedieľ, tú piatu nedeľu.

Inak stále budeme voliť 1. alebo 2. variantu. Budeme sa medzi nimi rozhodovať tiež hádzaním dolárovej mince.

Jimmy Dunčo pochopil geniálny zámer svojho šéfa: rovnaké dolárové mince budú rovnako padať a Billy bude bez šancí. Pousiloval sa šéfa oboznámiť s touto svojou jasnozrivosťou.



Obr. 1

Po tejto poznámke sa šerif súcitne pozrel na svojho podriadeného a pevne si zaumienil nepremeškať prvú príležitosť k vyslaniu Jimmyho na doškoľovací kurz. S povzdychom pokračoval vo vysvetľovaní, už viac menej iba pre seba.

Vezmime pre jednoduchosť mesiac, v ktorom sú 4 nedele. Priemerne to bude vychádzať tak, že dvakrát budeme strážiť u Mikiho, dvakrát u Dorseta a aj Bily po dva razy navštívi každú z bánk.

Vidiac sústredenú pozornosť v Jimmyho očiach, urobil šerif ešte jeden pokus prebudiť driemajúcu inteligenciu svojho podriadeného. Názorne, podľa Komenského, nakreslil obrázok (originál obrázku sa zachoval a predkladáme ho čitateľom).

A ktorý z týchto štyroch prípadov bude najčastejší, šéfe? opýtal sa Dunčo.

Vidím, že sa ti mozog roztvára, pochvalne povedal šerif a skúsenou rukou vybral z knižnice útlu knižku, do ktorej chvíľu sústredene hľadel. Potom rozhodne povedal: V priemere každá zo štyroch možností sa bude vyskytovať rovnako často. Tomu sa dá veriť — a na potvrdenie svojho presvedčenia energicky položil na policajtský stôl knižku B. Riečana *O pravdepodobnosti* (ŠMM — zv. 37).

Ak teda tomu šéfe rozumiem, tak čo mesiac 3000 dolárov čistého pribudne do našej pokladnice. Billy síce vyrabuje z bánk 7000, ale na túto dosku tu položí 10 000.

Vidím, že ti to páli, skutočne náš priemerný zárobok by sa mal pohybovať okolo tých 3000 mesačne. Ak to aj občas nevyjde, tak v ročnom priemere by to tých 36 000 hodiť malo.

6.3. Šerif špekuluje. Život ukázal, že šerifovo štúdium teórie pravdepodobnosti nebolo zbytočné. Úspechy podnietili chuť do hlbších teoretických analýz, ktoré vyústili do myšlienky: Keď budem častejšie strážiť Mikiho banku ako Dorsetovu, zvýšim tým solventnosť svojho podniku. Šerifove špekulácie prekontroluje čitateľ v nasledujúcich úlohách.

Úloha 6.1. Namiesto hádzania mince rozhodoval šerif o strážení bánk pomocou balíčka mariášových kariet. V nedeľu ráno vytiahol 1 kartu. Keď to bola sedma, išli strážiť k Dorsetovi, v ostatných prípadoch k Mikimu. Vypočítajte, koľko zarobí šerif priemerne za mesiac (4 týždne), ak Billy stále používa rozhodovanie pomocou doláru.

Úloha 6.2. Billy postrehol zmenu stratégie šerifa a zmenil svoju stratégiu — tiež použil balíčku kariet: ak v nedeľu ráno vytiahol eso, išiel k Mikimu, ak vytiahol inú kartu, išiel k Dorsetovi. Vypočítajte priemerný mesačný obrat obchodu šerif — Billy.

Úloha 6.3. Odvetná Billyho stratégia šerifa znechutila a zasiala do jeho mysle podozrenie, či pomocník Dunčo nepaktuje tajne s Billym. Preto sa rozhodol okamžite zmeniť stratégiu a strážiť dvakrát tak často Mikiho ako Dorseta. Náhodný výber robil pomocou hracej kocky. Zistite priemerný mesačný zárobok šerifa v prípade, že Billy rabuje banky Mikiho a Dorseta v pomere:
a) 1 : 1, b) 1 : 2, c) 2 : 3, d) $a : b$.

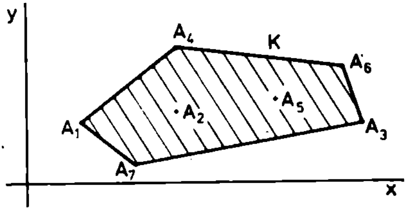
Úloha 6.4. Predchádzajúcu úlohu, prípad d), riešte v tom prípade, keď šerif bude strážiť banku Mikiho a Dorseta v pomere a) 3 : 2, b) 5 : 3.

Problém. Z predchádzajúcich výsledkov sme videli, ako šerif hľadal čo najlepšiu svoju stratégiu stráženia bánk. Za svoj najväčší úspech považoval stratégiu uvedenú v úlohe 6.4 a pri tejto mal zaručený priemerný mesačný zisk aspoň 3200 dolárov. Na túto skutočnosť by nemalo vplyv ani to, keby pomocník Dunčo prezradil Billymu pomer, v ktorom strážia jednotlivé banky. Jedna otázka zostala nevyjasnená. Existuje pomer stráženia bánk Mikiho a Dorseta, pri ktorom zaručený priemerný mesačný zisk bude väčší ako 3200 dolárov?

6.4. Lineárne programovanie kontra Billy. Posledný problém by sa šerifovi sotva podarilo vyriešiť bez výdatnej pomoci seržanta Jimmyho Dunča, úspešného čerstvého absolventa kurzu lineárneho programovania. Hľa, aké múdrosti doniesol Jimmy zo školenia. Najprv kúsok „čistej teórie".

Nech je daná lineárna funkcia $f(x, y) = ax + by + c$

dvoch premenných x a y a usporiadané dvojice $(x_1, y_1) = A_1$, $(x_2, y_2) = A_2, \ldots, (x_n, y_n) = A_n$ reálnych čísel. Označme K najmenšiu konvexnú množinu, ktorá obsahuje body $A_1, A_2, \ldots, A_n$. K voláme konvexný obal množiny $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$



Obr. 2

Tvrdíme, že

$$\max_{(x,y)\in K} f(x, y) = \max_{(x,y)\in \mathscr{A}} f(x, y),$$

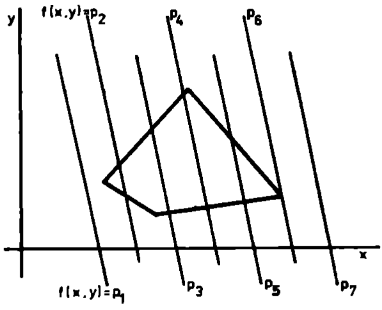
podobne

$$\min_{(x,y)\in K} f(x, y) = \min_{(x,y)\in \mathscr{A}} f(x, y) .$$

Stačí si totiž uvedomiť, že grafmi funkcií $ax + by + c = p$, kde a, b, c sa vopred dané konštanty a p parameter, je sústava navzájom rovnobežných priamok (pozri obr. 3) $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6 < \ldots$, pričom „usporiadanie týchto priamok v rovine je podľa parametra p". Keď nás zaujíma $\max\limits_{(x,y)\in K} f(x, y)$ alebo $\min\limits_{(x,y)\in K} f(x, y)$, tak stačí nájsť bod množiny K, ktorý leží na „najkrajnejšej" priamke spomínanej sústavy priamok. Takýto bod je zaručene vrcholom mnohouholníka K, čo sme chceli ukázať.

A teraz aplikácia na náš prípad. Matica hry

$$\begin{array}{lcc} & & \text{min} \\ M_A = & \begin{pmatrix} 5000 & -2000 \\ -5000 & 5000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{r} -2000 \\ -5000 \\ 0 \end{array} \\ \text{max} & \begin{array}{cc} 5000 & 5000 \end{array} & \end{array}$$



Obr. 3

Vyskúšame, či hra má sedlový bod. Minimum „maxím" je 5000, maximum „miním" je 0, tak hra nemá sedlový bod. V tomto prípade obe strany budú striedať jednotlivé „čisté" stratégie — budú voliť zmiešané stratégie. Otázka je, ako často má šerif — hráč A — použiť svoju 1. stratégiu, 2. stratégiu, 3. stratégiu, inými slovami, udať usporiadanú trojicu nezáporných reálnych čísel (p_1, p_2, p_3), kde p_i značí pravdepodobnosť voľby i-tej stratégie, tak aby zaručená stredná hodnota jeho výhry bola čo najväčšia. Pod zaručenou strednou hodnotou rozumieme minimálnu hodnotu strednej hodnoty výhry, pričom minimum uvažujeme cez všetky stratégie Billyho — hráča B. Billy musí tiež striedať svoje stratégie a stojí pred tou istou otázkou — má nájsť usporiadanú dvojicu nezáporných reálnych čísel q_1 a q_2 tak, aby $q_1 + q_2 = 1$ (q_i značí pravdepodobnosť voľby i-tej stratégie) a aby maximálna možná stredná hodnota výhry hráča A bola čo najmenšia. (Maximum sa tu berie cez všetky možné stratégie hráča A.)

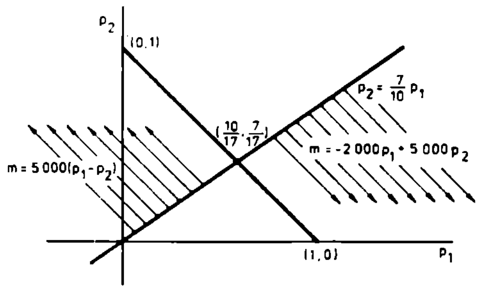
Keď si hráč A zvolí zmiešanú stratégiu (p_1, p_2, p_3) a hráč B stratégiu 1, tak stredná hodnota výhry hráča A je $5000p_1 — 5000p_2 + 0p_3$.

Ak si v tých istých podmienkach zvolí hráč B stratégiu 2, potom stredná hodnota výhry hráča A je $—2000p_1 + 5000p_2 + 0p_3$.

Stojíme pred nasledujúcou otázkou: nájsť usporiadanú trojicu (p_1, p_2, p_3) nezáporných reálnych čísel, pre ktorú $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, tak aby číslo

$$m = \min\{5000p_1 — 5000p_2 + 0p_3,\ —2000p_1 + 5000p_2 + 0p_3\}$$

bolo čo najväčšie. Ak dosadíme $1 — p_1 — p_2$ za p_3, môžeme úlohu preformulovať takto: Nájsť usporiadanú dvojicu reálnych čísel z množiny X tak, aby číslo m



Obr. 4

bolo čo najväčšie, kde $X = \{(p_1, p_2) \in R^2 \mid p_1 + p_2 \leqq 1, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0\}$.

Toto je už úloha lineárneho programovania. Ťažkosť spočíva len v tom, že my by sme si mali všímať čísla, ktoré je minimom funkčných hodnôt dvoch lineárnych funkcií. Preto si najprv rozdelíme rovinu na dve polroviny — v jednej z nich bude platiť $5000p_1 - 5000p_2 \leqq \leqq -2000p_1 + 5000p_2$, v druhej $5000p_1 - 5000p_2 \leqq \leqq -2000p_1 + 5000p_2$ (pozri obr. 4).

Rovnica $5000p_1 - 5000p_2 = -2000p_1 + 5000p_2$ je ekvivalentná s rovnicou $p_2 = 7/10p_1$.

Množina X je graficky trojuholník s vrcholmi (0,0), (0,1), (1,0). Trojuholník X je rozdelený priamkou $p_2 = = 7/10p_1$ na dva menšie trojuholníky (stotožňujeme usporiadané dvojice reálnych čísel s ich obrazmi v rovine).

V trojuholníku X_1 s vrcholmi (0,0), (1,0), $\left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}\right)$ platí

$$m = -2000p_1 + 5000p_2\,,$$

v trojuholníku X_2 s vrcholmi (0,0), (0,1), $\left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}\right)$ zasa platí

$$m = 5000p_1 - 5000p_2\,.$$

Treba teda vybrať väčšie z čísel

$$\max_{(p_1, p_2) \in X_1} (-2000p_1 + 5000p_2)$$

a

$$\max_{(p_1, p_2) \in X_2} (5000p_1 - 5000p_2)\,.$$

Teda podľa Jimmyho výkladu stačí preskúmať vrcholy trojuholníkov X_1 a X_2 — robíme to v nasledujúcej tabuľke:

p_1	0	0	1	$\frac{10}{17}$
p_2	0	1	0	$\frac{7}{17}$
m	0	—5000	—2000	$\frac{15000}{17}$

Vidíme, že najväčšia stredná hodnota „zaručenej" výhry hráča A je 15000/17 = 882,4 dolárov. Dosiahne ju vtedy, keď 1. stratégiu si zvolí s pravdepodobnosťou 10/17, druhú s pravdepodobnosťou 7/17 a tretiu s pravdepodobnosťou 0.

Všimnime si teraz hráča B. Nech s pravdepodobnosťou q_1, resp. q_2 si volí 1. resp. 2. stratégiu. Stredná hodnota výhry hráča A závisí teraz od toho, akú stratégiu si zvolí hráč A.

Ak A si zvolí 1. stratégiu, tak stredná hodnota jeho výhry je:

$$5000q_1 - 2000q_2 = 7000q_1 - 2000 \text{ (vzhľadom k } q_1 + q_2 = 1).$$

Ak A si zvolil 2. stratégiu, tak stredná hodnota jeho výhry je

$$-5000q_1 + 5000q_2 = -10000q_1 + 5000,$$

napokon pri 3. stratégii je stredná hodnota výhry 0. B si bude voliť q_1 tak, aby číslo M

$$M = \max\{7000q_1 - 2000, \quad -10000q_1 + 5000, 0\}$$

bolo čo najmenšie.

Ľahko nahliadneme, že pre $q_1 \in \left\langle 0, \frac{7}{17} \right\rangle$ je

$$M = -10000q_1 + 5000$$

a pre $q_1 \in \left\langle \frac{7}{17}, 1 \right\rangle$ platí

$$M = 7000q_1 - 2000.$$

Preto ak chceme minimalizovať M, tak si stačí všimnúť body $q_1 = 0$, $q_1 = 1$ a $q_1 = 7/17$ (Jimmyho kurz!). Dostávame tabuľku:

q_1	0	7/17	1
M	5000	$\frac{15000}{17}$	5000

Záver. Hráč B si má voliť 1. stratégiu s pravdepodobnosťou 7/17, 2. stratégiu s pravdepodobnosťou 10/17. Pri tomto výbere maximálna možná stredná hodnota výhry hráča A je 15000/17 dolárov.

Poznámka. Vidíme, že ak A si zvolí zmiešanú stratégiu $\left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}, 0\right)$, tak A bude vyhrávať priemerne aspoň 15000/17 dolárov. Naopak, ak B si zvolí zmiešanú stratégiu (7/17, 10/17), tak A bude vyhrávať (priemerne) najviac 15000/17 dolárov. Toto nie je náhoda, ale dôsledok vety J. von Neumanna o maticových hrách, podľa ktorej vždy existuje dvojica zmiešaných stratégií s vlastnosťou sedlového bodu. Dá sa tiež dokázať, že našou metódou vypočítaná dvojica stratégií je vždy sedlovým bodom.

Úloha 6.5. Čo sa stane, ak šerif sa bude pridržiavať stratégie $\left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}, 0\right)$ a Billy sa odchýli od stratégie $\left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17}\right)$?

Úloha 6.6. Čo sa stane, ak Billy sa bude pridržiavať stratégie $\left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17}\right)$ a šerif bude používať stratégiu (p_1, p_2, p_3), kde $p_3 > 0$?

Úloha 6.7. Riešte predchádzajúcu úlohu za predpokladu, že v 1. banke je 10 000, v 2. banke 20 000 dolárov!

6.5. Hodnota hry. Príklad. *Anička a Boris hrajú nasledovnú hru: Boris si dá do hrsti 1, 2 alebo 3 guľôčky. Anička má za úlohu uhádnuť, koľko guličiek má Boris v hrsti. Ak uhádne, guličky sú jej, ak nie, tak guličky zostávajú Borisovi. Hra sa 33krát opakuje. Koľko guličiek si má vopred pýtať Boris od Aničky za možnosť hádania, aby hra bola spravodlivá? (Hru považujeme za spravodlivú, ak je rovnaká šanca vyhrať ako prehrať. Ak by Boris nepýtal od Aničky nič za možnosť hádania, mohla by vyhrať iba Anička.)*

Riešenie. Je intuitívne jasné, že pre Borisa je „nebezpečné" dávať do hrsti 3 guličky, lebo v prípade, že Anička uhádne, stojí to Borisa veľa — 3 guličky. (Lenže ak by si Boris nikdy nevzal do ruky 3 guličky, Aničke by sa lepšie hádalo.)

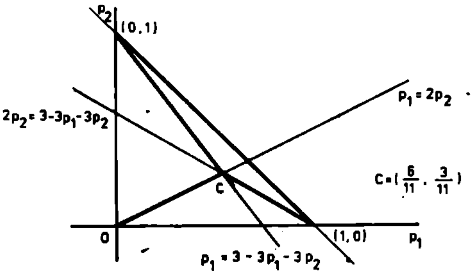
Napíšme si maticu hry:

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Borisova j-tá stratégia je dať do hrsti j guličiek, Aničkina i-tá stratégia je hádať, že Boris má v ruke práve i guličiek. Matica nemá sedlový bod. Postupujeme ako v predošlom prípade. Nech Anička si zvolí zmiešanú stratégiu $(p_1, p_2, p_3 = 1 - p_1 - p_2)$. Minimálna stredná hodnota Aničkinej výhry je

$$m = \min \{p_1, 2p_2, 3 - 3p_1 - 3p_2\} .$$

Anička sa snaží voliť čísla p_1, p_2 tak, aby číslo m bolo čo najväčšie. Ďalšie úvahy sledujeme na obr. 5.



Obr. 5

Bod (p_1, p_2) treba voliť z trojuholníka T s vrcholmi (0,0), (1,0), (0,1). Tento trojuholník je rozdelený tromi polpriamkami, vychádzajúcimi z bodu C, na tri malé trojuholníky.

V trojuholníku T_1 s vrcholmi (0, 0), $\left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right)$, (0, 1)

$$m = p_1 ,$$

v trojuholníku T_2 s vrcholmi (0, 0), $\left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right)$, (1, 0)

$$m = 2p_2 ,$$

v trojuholníku T_3 s vrcholmi $(1, 0)$, $\left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right)$, $(0, 1)$

$$m = 3p_3 = 3(1 - p_1 - p_2)\,.$$

Anička volí svoju zmiešanú stratégiu tak, aby číslo m bolo čo najväčšie. Za tým účelom vypočítame hodnotu m vo vrcholoch trojuholníkov T_1, T_2, T_3;

vrchol	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$\left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right)$
m	0	0	0	$\left(\frac{6}{11}\right)$

Číslo m je maximálne, keď $p_1 = \frac{6}{11}$, $p_2 = \frac{3}{11}$ a $p_3 = = \frac{2}{11}$. V tomto prípade $m = \frac{6}{11}$, t. j. Anička bude v priemere vyhrávať od Borisa $\frac{6}{11}$ guľôčky (je zaujímavé, že nezávisle od toho, koľko guličiek si dáva do hrsti Boris).

Spravme podobný výpočet pre Borisa. Ak si Boris zvolí zmiešanú stratégiu (q_1, q_2, q_3), tak maximálna možná stredná hodnota výhry Aničky je:

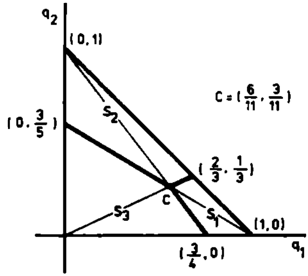
$$M = \max\,\{q_1, 2q_2, 3q_3 = 3 - 3q_1 - 3q_2\}\,.$$

Ďalšie úvahy sledujme pomocou obrázku 6.

Boris sa snaží voliť usporiadanú dvojicu q_1, q_2 z trojuholníka T (a dopočítať q_3) tak, aby číslo M bolo čo najmenšie. Rozdelíme trojuholník T na 3 štvoruholníky. V štvoruholníku S_1 platí $M = q_1$, v štvoruholníku S_2 platí $M = 2q_2$, v štvoruholníku S_3 platí $M = 3q_3 =$

$= 3 - 3q_1 - 3q_2$. Presne tak ako predtým stačí vypočítať hodnotu M vo vrcholoch štvoruholníkov:

vrchol	$(0, 0)$	$\left(0, \frac{3}{5}\right)$	$(0, 1)$	$\left(\frac{3}{4}, 0\right)$	$(1, 0)$	$\left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right)$,	$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
M	3	1,2	2	0,75	1	$0{,}\overline{54}$	$0{,}\overline{66}$



Obr. 6

Číslo M je najmenšie, keď $q_1 = \frac{6}{11}$, $q_2 = \frac{3}{11}$, $q_3 = \frac{2}{11}$. Vtedy $M = 0{,}54$.

Záver. Pre Aničku je najvýhodnejšie, keď bude hádať, že Boris dal do ruky 1, 2 alebo 3 guličky v pomere 6 : 3 : : 2. Vtedy bude jej stredná hodnota výhry aspoň $0{,}\overline{54}$ guličky na jedno hádanie. Pre Borisa bude najvýhodnejšie dávať do hrsti 1, 2 alebo 3 guličky tiež v pomere 6 : 3 : 2. Vtedy bude Boris prehrávať priemerne najviac $0{,}\overline{54}$ guličky na jedno hádanie. Teda hra bude spravodlivá, ak Anička dá Borisovi za 33 hádaní vopred $33 \cdot \frac{6}{11} =$ $= 18$ guličiek.

Hodnota hry je rozhranie, ak by Boris pýtal viac za hádanie, dlhodobe by vyhrával Boris, ak menej, tak bude vyhrávať Anička. Hodnota našej hry je $0,\overline{54}$ guličiek. Na prvý pohľad by sa zdalo, že za možnosť hádania by sa oplatilo zaplatiť viac!

Poznámka. Keby Boris dával do hrsti 1, 2 a 3 guličky s rovnakou pravdepodobnosťou a Anička hovorila 1, 2 a 3 tiež rovnako často (má však aj lepší spôsob hádania — pozri úlohu 6.8), tak by za 33 hádaní uhádla asi 11krát a v priemere by zarobila po 2 guličky, t. j. 22 guličiek. Teda Borisova stratégia prináša zisk 4 guličky na 33 hádaní.

Úloha 6.8. Akú stratégiu hádania si má voliť Anička, keď Boris dáva do ruky 1, 2 a 3 guličky s rovnakou pravdepodobnosťou? Koľko guličiek vyhrá priemerne na jednu hru, ak bude optimálne hádať?

6.6. Nová metóda výpočtu zmiešaných stratégií. Metóda výpočtu zmiešaných stratégií uvedená v odsekoch 6.4 a 6.5 je vhodná len v prípade, že máme k dispozícii najviac 3 čisté stratégie. Teraz ukážeme jednu rýchlu metódu, ktorá v niektorých špeciálnych prípadoch pomôže nájsť optimálnu zmiešanú stratégiu nezávisle na tom, z koľkých čistých stratégií vyberáme.

Príklad. *Zmeňme pravidlá predchádzajúcej hry: Boris môže dať do klobúka* 1, 2, 3, ..., *n guľôčok (n je vopred zadané číslo). Anička má uhádnuť, koľko guličiek je v klobúku. Ak uhádne, guličky sú jej, ak nie, zostanú Borisovi. Treba vypočítať hodnotu hry.*

Riešenie. Nech si Anička volí zmiešanú stratégiu (p_1, p_2, ..., p_n), (p_i je pravdepodobnosť, že Anička povie:

v klobúku je i guličiek). Jej zaručená stredná hodnota výhry je potom

$$m = \min\{p_1, 2p_2, 3p_3, \ldots, np_n\}.$$

Anička sa snaží voliť usporiadanú n-ticu nezáporných čísel $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ s vlastnosťou $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ tak, aby číslo m bolo čo najväčšie. Voľme čísla $p_1, p_2 \ldots, p_n$ tak, aby

$$p_1 = 2p_2 = 3p_3 = \ldots = np_n. \tag{1}$$

$$\sum_{i=n}^{n} p_i = 1 \tag{2}$$

Ak by sme volili $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{1}{3}$, $\ldots$, $p_n = \frac{1}{n}$, tak by sme síce splnili podmienku (1), ale nie (2). Stačí však tieto čísla predeliť číslom $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ a dostaneme čísla, ktoré spĺňajú podmienku (1) i (2).

Teda volíme

$$p_1 = \frac{1}{s_n}, \quad p_2 = \frac{1}{2s_n}, \quad p_3 = \frac{1}{3s_n}, \ldots, p_n = \frac{1}{ns_n}.$$

Úloha 6.9. Overte, že $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Tvrdíme, že číslo m je najväčšie práve pre túto usporiadanú n-ticu reálnych čísel:

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\frac{1}{s_n}, \frac{1}{2s_n}, \ldots, \frac{1}{ns_n}\right).$$

Pre túto usporiadanú n-ticu $m = \frac{1}{s_n}$. Naozaj, ak $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ je iná usporiadaná n-tica s vlastnosťou (2), potom pre aspoň jedno číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$r_i \leqq \frac{1}{is_n} \quad \left(\text{nemôže byť pre všetky } i : r > \frac{1}{is_n}\right).$$

Pre toto i je $ir_i \leqq \frac{1}{s_n}$, teda $m = \min\{r_1, 2r_2, 3r_3, \ldots, nr_n\} \leqq \frac{1}{s_n}$, čo sme chceli ukázať.

Úloha 6.10. Nájdite optimálnu zmiešanú stratégiu Borisa v tejto hre!

Nasledujúca tabuľka udáva hodnotu hry pre rôzne n:

n	2	3	4	5	6
hodnota hry	0,667	0,545	0,480	0,438	0,408

n	7	10	30	50
hodnota hry	0,386	0,341	0,250	0,222

Dá sa ukázať, že pri dostatočne veľkom n je s_n väčšie ako ľubovoľné vopred zadané číslo (presnejšie $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$), teda hodnota hry, čo je $\frac{1}{s_n}$ pre rastúce n klesá k 0 (pozri napr. J. Jarník: *Posloupnosti a řady,* str. 74. ŠMM zv. 43). Platí tento odhad:

$$\frac{1}{1 + \ln n} \leqq \frac{1}{s_n} \leqq \frac{1}{\ln n},$$

kde $\ln n$ je logaritmus čísla n pri základe e $= 2{,}718\ldots$.

Pozmeňme pravidlá predchádzajúcej hry takto: Ak Anička uhádne, koľko guličiek dal Boris do klobúku, tak dostane od Borisa k^2 guličiek, kde k je „uhádnutý" počet guličiek v klobúku (ak neuhádne, samozrejme nedostane od Borisa nič).

Úloha 6.11. Nájdite teraz optimálne stratégie Borisa a Aničky!

Úloha 6.12. Vypočítajte hodnotu hry v závislosti na n. Ukážte, že pre každé n je väčšia než 0,5 (pozri ŠMM, zv. 43, str. 73).