Hry takmer matematické

4. kapitola. Rozprávka takmer guliverovská

In: Ján Gatial (author); Tomáš Hecht (author); Milan Hejný (author): Hry takmer matematické. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 53–71.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404083

4. kapitola

ROZPRÁVKA TAKMER GULIVEROVSKÁ

Musím sa priznať, začal svoju pochvalnú reč autor, že ma vaše nápady prekvapili. Nečakal som, že sa takou vervou a dôvtipom pustíte do ťažkej hry NIM VI. Zaslúžite si odmenu. Uvažoval som, čo vám dať. Cukríky som zamietol k vôli zubárom, kolotoč kvôli bruchabôľu a po dlhom uvažovaní som predsa len našiel riešenie — rozprávku. Chcete si ju vypočuť?

Boris: Chceme — som samé ucho.

Anka: Bude tam aj princezná?

Autor: Rozprávka, ktorú sa dozviete je neobyčajná — je to matematická. Odohráva sa v čudnej krajine, vlastne v dvoch krajinách, v Bilande a Trilande. Dávajte dobrý pozor. Veď tie čudá, ktoré Bilanďania a Trilanďania povymýšľali, možno výborne zužitkovať aj u nás. Počítacie stroje, komunikačný systém družíc a mnohé iné zázraky dneška by sa sotva dali vymyslieť bez toho, čo bolo objavené v krajine Biland a Triland. Ba dokonca viac. Objavy, o ktorých sa v rozprávke dozviete, vám pomôžu riešiť napríklad NIM VI so štyrmi, piatimi, päťdesiatpiatimi,... kôpkami.

Anka: Tak už rozprávajte.

Autor: Kde bolo — tam bolo, bol raz jeden Vladko Hráško, ktorý sa vybral do sveta hľadať službu. Išiel deň, dva a na tretí podvečer prišiel do krajiny, kde rástli vysočizné stromy s obrovskými listami. Boli to tak veľké listy, že sa do jediného listu zabalil ako do deky a na druhý sa vyvalil ako na váľandu. Zaspal. Lenže...

Boris: Boli to mäsožravé listy a zbaštili ho.

Autor: Či si len krvižíznivý Boris. Nič také. Listy boli celkom mierumilovné. Príjemne Vladka hriali a Hráškovi sa snívali krásne sníčky. Lenže to netrvalo dlho. Keď bol mesiac na najvyššom bode svojej nočnej púte, zadul silný vietor, čiernym oblakom zatemnil hviezdnu oblohu a hrozný tajfún roztočil všetko, čo mu prišlo do cesty. Vyvracal stromy, strhal strechy z chalúp a uchmatol aj listy s Vladkom. Vladko cítil, ako by ho obrovská sila nadvihla, pod samé nebo zdvihla, pokolotočovala, a potom mäkúčko, priam nežne, ako na páperovom padáku spustila dolu — na zem. Hráško vyskočil. Brieždilo sa. Z jednej strany more, z druhej vysoké kopce a neďaleko prenikali svetlá ľudských obydlí. Bol v Bilande.

Anka: V Bilande? To je nejaký štát?

Autor: Skoro máš pravdu.

Biland je rozprávková krajina, kde žijú „rozumné“ bytosti. Ich spôsob života sa v podstate nelíši od nášho; jediné, v čom sú celkom iní, je spôsob ich peňažnej sústavy. Základnou jednotkou platidiel v tejto krajine je jeden *a*-groš (ako u nás 10 halierov). Za dva *a*-groše je možné vymeniť jeden *b*-groš. Jeden *c*-groš má hodnotu dvoch *b*-grošov. Jeden *d*-groš je možné vymeniť za dva *c*-groše, atď.

Po svojom šťastnom stroskotaní sa Vladko vypravil do mesta. V bruchu mu už poriadne škvrčalo. Potreboval čo najskôr zohnať zamestnanie. Dlho nerozmýšľal a smelo vošiel do veľkej budovy, ktorá upútala jeho pozornosť pekným, krasopisne napísaným nápisom „Brior“. Veľmi sa núkať nemusel. Práve bolo treba pomáhať vykladať z objemného nákladného auta rannú dodávku tovaru. Šikovné počínanie Vladka si všimol aj hlavný skladník.

Za dobrú prácu vyplatil Vladkovi na dlaň celý *e*-groš a ponúkol mu trvalé zamestnanie.

Boris: Koľko je to *e*-groš? Je to viac ako 20 korún?

Autor: No, skús si to sám vypočítať. Predstav si, Boris, že si hladný ako vlk, vo vrecku máš *e*-groš a v bufete čítaš tieto ceny:

Rožok = jeden *a*-groš
Pohár mlieka = jeden *b*-groš
Obložený chlebík = jeden *b*-groš + jeden *a*-groš
Jedna zmrzlina = jeden *c*-groš

Anka: Tá zmrzlina je drahá.

Boris: Prosím ťa, kto bude raňajkovať zmrzlinu? Ja by som si dal dva poháre mlieka a päť chlebíkov.

Anka: To by ti nevystačilo.

Boris: Vystačilo.

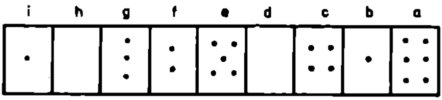
Anka: No schválne. Päť obložených chlebíkov je päť *b*-grošov + päť *a*-grošov. Teda sedem *b*-grošov a jeden *a*-groš. To je tri *c*-groše, jeden *b*-groš, jeden *a*-groš. Teda jeden *d*-groš, jeden *c*-groš, jeden *b*-groš a jeden *a*-groš.

Boris: Tak vidíš, že vystačilo.

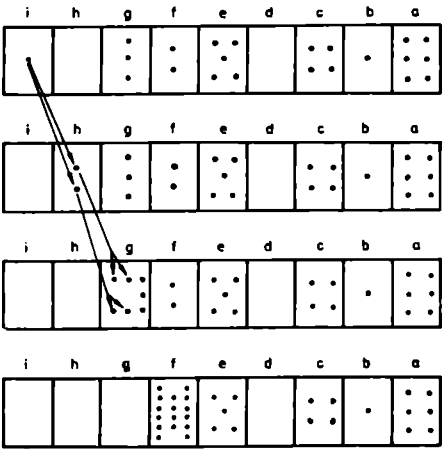
Anka: No ty si chcel ešte dva poháre mlieka. To sú dva *b*-groše, čiže jeden *c*-groš. Dokopy za mlieko a chlebíčky by si teda zaplatil jeden *e*-groš, jeden *b*-groš a jeden *a*-groš. Toľko nemáš.

Boris: Nevadí, dal by som si teda dva poháre mlieka a len štyri chlebíčky.

Autor: Vidím, deti, že vám to bilandské počítanie ide tak dobre ako Vladkovi. Hádam aj lepšie, lebo Vladko kupoval opatrnejšie. Nevedel, či mu peniaze budú stačiť, tak si najprv kúpil len jedno mlieko a dva chlebíčky. Keď platil, tak si všimol, že pokladník má pokladničku s deviatimi priehradkami, pričom každá je označená písmenom od najnižšej hodnoty „*a*“ po najvyššiu hodnotu „*i*“. Hráškovi sa tak pokladnička zapáčila, že si sám urobil podobnú. Namiesto skutočných peňazí presúval v priehradkách kamienky. Vymýšľal si rôzne úlohy, aby sa naučil bilandsky počítať. Napr. pridelil si toľko peňazí, ako je nakreslené na obr. 1, a dal si úlohu: Rozmeniť všetky *g*-groše a *i*-groše na *f*-groše. Riešenie je nakreslené na obr. č. 2. (K pôvodným dvom *f*-grošom pribudlo šesť *f*-grošov výmenou troch *e*-grošov a osem *f*-grošov výmenou jedného *i*-groša.)



Obr. 1



Obr. 2

Anka: To je pekné. To je také počítadlo ako pre kojencov.

Boris: Netreba nič písať, len kamienky prehadzovať. Dajte nám nejakú takú úlohu.

Anka: Radšej hneď dve.

Autor: Tak zaokrúhlime to na štyri.

Úloha 4.1. Koľko získa pokladník *c*-grošov, keď vymení všetky *a*-groše a *b*-groše za *c*-groše?

Úloha 4.2. Koľko získa pokladník *d*-grošov, keď vymení všetky *a*-groše, *b*-groše a *c*-groše za *d*-groše?

Úloha 4.3. Kupujúci Bilandčan platí v obchode za nákup sumu 25 *a*-grošov. Platí jedným *f*-grošom. Ako mu má pokladník vydať, aby použil čo najmenej mincí?

Úloha 4.4. V Bilande máte zaplatiť sumu 50 *a*-grošov tak, aby ste použili čo možno najmenší počet mincí. Ako to urobíte?

Netrvalo dlho a všetky štyri úlohy boli vyriešené. Autor pokračoval v rozprávke:

Bilanďania sú zvláštne bytosti. Navzájom sú neuveriteľne zdvorilí. Dokonca aj pri platení. Keby ste mali zaplatiť sumu jeden *c*-groš, bolo by veľmi nezdvorilé platiť to nie jedným peniazom, ale dvoma *b*-grošami, či dokonca štyrmi *a*-grošami. V každom obchodnom dome, na každej stanici, v každej reštaurácii nájdete veľké automaty na menenie peňazí. Skôr, ako máte nejakú sumu platiť, musíte si v automate zadovážiť príslušné peniaze tak, aby ste pri výplate zo žiadnej hodnoty nedávali viac ako jednu mincu... Napríklad sumu štrnásť *a*-grošov platia jedným *b*-grošom, jedným *c*-grošom a jedným *d*-grošom. Tieto sumy zvláštnym spôsobom zapisujú. Používajú k tomu dve značky: O (koliesko) a I (paličku).

Napríklad naše číslo 45 píšu Bilanďania pomocou vyššie uvedenej pokladničky a spôsobom „koliesko-paličkovým“ takto:

i	h	g	f	e	d	c	b	a
			●		●	●		●

„pokladničkový“ zápis

I ○II ○I „koliesko-paličkový“ zápis

Alebo číslo 80 zapisujú:

i	h	g	f	e	d	c	b	a
		●		●				

„pokladničkový zápis“

I ○I ○ ○ ○ ○ „koliesko-paličkový“ zápis

Vedeli by ste zapísať číslo 121 „pokladničkovým“ a „koliesko-paličkovým“ zápisom?
Anka s Borisom našli riešenie veľmi rýchlo:

i	h	g	f	e	d	c	b	a
		●	●	●	●			●

„pokladničkový zápis“

IIII ○ ○I „koliesko-paličkový“ zápis

Zápis „koliesko-paličkový“ je stručnejší, a preto v Bilande používanejší. Koliesko označuje prázdnu priehradku pokladničky a palička priehradku, v ktorej je jeden peniaz. Je rozhodujúce presne poznať hodnotu každého kolieska či paličky. Takto zapísané číslo čítame sprava doľava. Znak, ktorý je na „najpravejšej“ strane, označuje stav priehradky *a*-grošov, znak pred ním stav priehradky *b*-grošov, atď.

Anka: Jasné, dajte nám zasa zopár úloh!

Autor: Veľmi rád. Prosím:

Úloha 4.5. Zapíšte „koliesko-paličkovým" zápisom čísla 18, 136, 1527, 12746.

Úloha 4.6. Sčítajte čísla IoIIo, IoIoo.

Úloha 4.7. Odčítajte od čísla IIooI číslo IoI.

Ani tieto úlohy nerobili Anke a Borisovi ťažkosti. I keď zápis „koliesko-paličkový" bol náročnejší ako zápis „pokladničkový", zorientovali sa naši mladí priatelia v bilandskom finančníctve veľmi dobre. Ba, čo viac. Keď autor chcel pokračovať v rozprávke, prerušil ho Boris netrpezlivou prosbou.

Boris: Tie rozprávky nemusíte tak zoširoka. Hlavne tie príklady nás zaujímajú.

Anka: Len to nám povedzte, či sa Vladko Hráško v Bilande oženil.

Autor: Akože? Samozrejme, že sa oženil. S tou najkrajšou...

Boris: ...najpôvabnejšou, najmúdrejšou, najporiadnejšou bilandskou Aničkou.

Anka: Nech nie je protivný. Vie, že neznášam, keď ma volajú Anička.

Autor: Veď to on nie o tebe Anka, on to o tej bilandskej. No ale aby sme pokročili ďalej, povedzme si, čo sa dialo po svadbe. Novomanželia sa vrátili do vlasti. Hráško musel svoju nevestu predstaviť rodičom, pri tej príležitosti rozpovedal všetky svoje príhody a skúsenosti. Široké príbuzenstvo s veľkým napätím počúvalo nezvyčajné príhody, ba dokonca sa našiel aj novinár, ktorého bilandské písanie do tej miery zaujalo, že napísal dlhý článok, v ktorom navrhoval zanechať náš spôsob písania čísel a pristúpiť na bilandský. Tak vznikla polemika, ktorá zapríčinila hojné prekladanie bilandskej literatúry (najmä počtárskej) do slovenčiny. Pri prekladoch z bilandštiny do slovenčiny vznikla v tlačiarni ťažkosť, lebo nebolo dosť koliesok a paličiek. Sádzači navrhli tlačiť namiesto koliesok nuly a namiesto paličiek jedničky. Bol to výborný nápad, no nebezpečný. Sledujme pozorne tento bilandský text: Futbalové mužstvo Inter Biland zvíťazilo nad mužstvom Slovan Biland najtesnejším rozdielom 10 : 1". Čitateľovi neoboznámenému s bilandským spôsobom zápisu čísiel by sa tento text javil nezmyselný. My, znalci bilandštiny, vieme, že výsledok v origináli bol I ○ : I, t. j. po slovensky 2 : 1. Uvedená ukážka donútila prekladateľský zväz dôkladne premyslieť symboliku zápisu čísla. Po mnohých diskusiach a úvahách našli tento jednoduchý a účinný spôsob:

101_{II} je číslo „päť" zapísané v bilandštine,
101_{X} je číslo „sto jeden" zapísané v slovenčine.

Nože Boris, Anka, vedeli by ste vyriešiť tieto úlohy?

Úloha 4.8. Zväz prekladateľov preložil z bilandštiny do slovenčiny tieto čísla: 111_{II}, 1100_{II}, 11111_{II}, 1010011_{II}. Nájdite aj vy slovenský preklad týchto čísel.

Úloha 4.9. Preložte zo slovenčiny do bilandštiny tieto čísla: 11110_{X}, 1010_{X}, 214_{X}, 1579_{X}.

Anka: No my sme sa nedozvedeli, ako sa Vladko za ľúbil. Či mal nejakého súpera, či mu zbraňovali.

Autor: No to sa už tak ďaleko vracať nebudeme. Ale vieš čo, porozprávam ti o ich svadobnej ceste. Na tú sa vybrali až potom, keď už Vladko predstavil svoju ženušku v Novej Bani. Na svadobnú cestu sa mladomanželia vybrali z Novej Bane cez Žarnovicu až do krajiny zvanej Triland. Odtiaľto totiž pochádzali Ankini rodičia.

Boris: Ja sa stavím, že se tam inak počíta.

Autor: Trafil si do čierneho. Veru tak. V Bilande sa počíta na dve značky „koliesko a paličku", v Trilande na tri „koliesko, palička, krížik". Základnou jednotkou platidiel v Trilande je jeden *a*-grošek. Za tri *a*-grošky je možné vymeniť jeden *b*-grošek. Jeden *c*-grošek má hodnotu troch *b*-groškov, atď. Tak ako v Bilande, aj v Trilande majú svoje zvyklosti. Platia tak, že z každého druhu peňazí sa používa najviac dvoch mincí. Napríklad sumu 22_X *a*-groškov platia jedným *a*-groškom, jedným *b*-groškom a dvomi *c*-groškami. Ako sme už spomenuli, k zápisu tejto sumy (a každého iného čísla) používajú tri značky: ○ (koliesko), I (paličku) a + (krížik). Koliesko znamená prázdne miesto, palička jeden peniaz a krížik dva peniaze. Teda sumu 22_X *a*-groškov zapisujú takto:

+II

Prvá palička sprava znamená jeden *a*-grošek, druhá palička sprava znamená jeden *b*-grošek a krížik znamená dva *c*-grošky.

Skúsime napríklad trilandským spôsobom zapísať číslo 42_X.

K zápisu čísla nám pomôžu trilandské platidlá. 42 *a*-groškov sa skladá zo žiadneho *a*-groška, z dvoch *b*-groškov, z jedného *c*-groška a z jedného *d*-groška. Teda zápis je tento:

II+○

Pri preklade trilandských textov do slovenčiny sa veľké ťažkosti nevyskytli, lebo sadzači už mali skúsenosti s bilandským textom. Namiesto koliesok tlačili nuly, namiesto paličiek jedničky a namiesto krížikov dvojky. V pravom dolnom rohu čísla napísali rímsku trojku, ktorá znamená, že zápis čísla je trilandský. Teda číslo 42_X zapisujeme v trilandštine takto:

$$1120_{III}$$

Boris: Tak si zasa prosíme nejaké trilandské úlohy. (Pozre na hodinky). Pre pánajána, za desať minút mi začína klavír. Musím frčať. Anka mi to dorozpráva.

Anka: Ja sama nechcem. Radšej budeme pokračovať zajtra. Dobre, tak zajtra.

Autor: Aj tak toho bolo už nadnes mnoho. Tak ahoj, Boris, a pozdrav s. profesora od klavíra. Pá, Anka.

Deti odišli, ale autorova myseľ neutíchla. Jeho hrdinovia Vladko s Aničkou blúdili po Trilande, počítali, prepisovali z trilandštiny do bilandštiny, či do slovenčiny. A tak autor vzal pero, papier, a prihovárajúc sa v mysli svojim mladým priateľom, pokračoval v rozprávaní. Začal dvoma úlohami.

Úloha 4.10. Preložte z trilandštiny do slovenčiny tieto čísla: 111_{III}, 121_{III}, 1201_{III} a 1020112_{III}.

Úloha 4.11. Preložte zo slovenčiny do trilandštiny tieto čísla: 232_X, 7951_X.

Spoločnou vlastnosťou bilandského a trilandského zápisu čísel je, že tá istá značka vyjadruje rozličné hodnoty v závislosti od svojej polohy (pozície). Je samozrejme nepodstatné, že prekladatelia bilandských a trilandských textov do slovenčiny používajú miesto koliesska nulu, miesto paličky jedničku a miesto krížika dvojku.

Urobme analýzu čísla 111_{II} zapísaného v bilandštine. Čítame sprava doľava: Jednička na prvom mieste znamená jedničku aj v slovenčine. Jednička na druhom mieste znamená v slovenčine jednu dvojku, teda dvojnásobok jedničky. Jednička na treťom mieste znamená dvojnásobok dvojky, teda štvorku. Preklad do slovenčiny je už jasný:

$$111_{II} = 4 + 2 + 1 = 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 7_X$$

Urobme teraz analýzu čísla 111_{III} zapísaného v trilandštine. Tiež čítame sprava doľava: Jednička na prvom mieste znamená jedničku aj v slovenčine. Jednička na druhom mieste znamená v slovenčine trojku, teda trojnásobok jedničky. Jednička na treťom mieste znamená v slovenčine trojnásobok trojky, teda deviatku. Zaznamenajme stručne preklad uvažovaného čísla do slovenčiny:

$$111_{III} = 9 + 3 + 1 = 1.3^2 + 1.3^1 + 1.3^0 = 13_X\,.$$

Poznamenajme ešte, že

$$111_X = 1.10^2 + 1.10^1 + 1.10^0\,.$$

Zhŕňme naše úvahy do tohto tvrdenia: Značka v bilandštine postavená vľavo vyjadruje dvakrát väčšiu hodnotu ako tá istá značka stojaca vpravo. Značka v trilandštine postavená vľavo vyjadruje trikrát väčšiu hodnotu ako tá istá značka stojaca vpravo. Značka v slovenčine postavená vľavo vyjadruje desaťkrát väčšiu hodnotu ako tá istá značka stojaca vpravo. Vidíme, že v bilandštine, v trilandštine či v slovenčine vyjadruje tá istá číslica rozličné hodnoty v závislosti od svojej polohy — pozície. Z uvedeného dôvodu menujeme tieto sústavy *pozičné.**) Sústava používaná v Bilande je dvojková, v Trilande trojková a v Československu desiatková.

Úloha 4.12. Zapíšte číslo 1236_{X} v sústave dvojkovej a trojkovej.

Úloha 4.13. Zapíšte čísla 11011_{II}, 12120_{III} v sústave desiatkovej.

Úloha 4.14. Zapíšte číslo 122210_{III} v sústave dvojkovej.

Nakoniec poznamenávame, že môžeme vybudovať podobné číselné sústavy, ako je desiatková, trojková, resp. dvojková. Ich základom môže byť ľubovoľné prirodzené číslo $g \geqq 2$. Takúto číselnú sústavu nazývame g-dickou. Ľubovoľné číslo x je možné v g-dickej sústave vyjadriť v tomto zápise:

$$x = x_n x_{n-1} \ldots x_3 x_2 x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \ldots$$

Je to tzv. g-dický rozvoj. V tomto zápise sa nejedná o násobenie medzi x_n, x_{n-1}, ..., x_3, x_2, x_1, ... Je to len

---

*) Pozičnú sústavu vymysleli Babylončania. Používali šesťdesiatkovú sústavu (značka postavená vľavo vyjadrovala šesťdesiatkrát väčšiu hodnotu ako tá istá značka postavená vpravo). Táto im umožňovala zapísať aj „veľké“ čísla a zásadne ovplyvnila úroveň techniky, poľnohospodárstva a astronomie. Babylonská ríša bol vynikajúci štátny útvar. Vznikol 2000 r. pr. n. l. na území terajšieho Iraku zjednotením dvoch národov, Sumerov a Akkadov. Trvala 15 storočí. Babylonský spôsob zapisovania čísel nebol úplný. Nepoužívali nulu a nevedeli si predstaviť, že čísel je „nekonečne“ mnoho. Nulu sa naučili používať až Indovia. Jeden z najslávnejších gréckych matematikov Archimedes zostavil číselnú sústavu, ktorá naznačovala, že čísel je nekonečne mnoho, a dovoľovala každé číslo pomenovať. Indovia zaviedli spôsob zapisovania čísel, ktorý v podstate používame aj my. Číslice zavedené Indmi menujeme preto arabskými, lebo ich Arabi doniesli do Európy.

postupnosť číslic s tzv. rádovou čiarkou medzi znakmi x_0, x_{-1}. Ak $x_{-1} = x_{-2} = \ldots = 0$, potom je číslo x celé.

Ľubovoľné číslo x, vyjadrené v g-dickej sústave, môžeme v desiatkovej sústave nájsť takto:

$$x = x_n g^n + x_{n-1} g^{n-1} + \ldots + x_0 g^0 + x_{-1} g^{-1} + \ldots$$

Príklad. *Zapíšme číslo* 450_{VI}, *vyjadrené v šestkovej sústave, v sústave desiatkovej.*

Riešenie. Urobme analýzu čísla 450_{VI}: Čítame sprava doľava: Nula na prvom mieste znamená nulu aj v desiatkovej sústave. Päťka na druhom mieste znamená 5 šestiek (5 prvých mocnín šestky). Štvorka na treťom mieste znamená štyri druhé mocniny šestky. Preklad do desiatkovej sústavy vyzerá teda takto:

$$450_{\mathrm{VI}} = 4 \,.\, 6^2 + 5 \,.\, 6^1 + 0 \,.\, 6^0 = 144 + 30 = 174_{\mathrm{X}} \,.$$

Úloha 4.15. Zapíšte číslo 231_{IV}, vyjadrené v štvorkovej sústave, v sústave desiatkovej.

Venujme teraz viac pozornosti dvojkovej sústave, ktorá v súvislosti s prudkým rozvojom výpočtovej techniky sa používa čoraz častejšie. I keď je vyjadrenie čísla v dvojkovej sústave veľmi dlhé, výhodu má v tom, že na jeho zapísanie potrebujeme len dva symboly. Ak zvolíme na základ veľké číslo, tak záznam čísla je kratší, no potrebujeme mnoho základných symbolov. Nepovažujeme za potrebné zvlášť komentovať tú skutočnosť, že číslice 0, 1 majú v dvojkovej sústave iný zmysel ako v sústave desiatkovej.

Uveďme teraz podrobný postup prevodu čísel vyjadrených v desiatkovej sústave do dvojkovej sústavy a naopak:

a) K prevodu čísla 27_X do dvojkovej sústavy použijeme (z predchádzajúceho textu vám je to už určite známe) postupnosť mocnín so základom 2, teda $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ a $2^4 = 16$. Platí: $16 < 27 < 32$. Vydeľte číslom 16 číslo 27:

$$\begin{array}{l} 27 : 16 = 1 \\ 11 \end{array}$$

Zvyšok je 11. Tento delíme číslom 8:

$$\begin{array}{l} 11 : \ 8 = 1 \\ \ \ 3 \end{array}$$

Zvyšok je 3. Ten delíme číslom 4:

$$\begin{array}{l} 3 : \ 4 = 0 \\ 3 \end{array}$$

Zvyšok je 3. Ten delíme číslom 2:

$$\begin{array}{l} 3 : \ 2 = 1 \\ 1 \end{array}$$

Zvyšok je 1. Ten delíme číslom 1:

$$1 : \ 1 = 1$$

Schéma výpočtu má tvar:

Delenec (Zvyšok)	Deliteľ	Čiastočný podiel
27	16	1
11	8	1
3	4	0
3	2	1
1	1	1

Z delenia vyplýva:

$$27_{X} = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 11011_{II}.$$

b) Preveďme číslo 1010_{II} do desiatkovej sústavy:

$$1010_{II} = 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 10_{X}.$$

Základné operácie s číslami v dvojkovej sústave robíme presne tak isto ako v sústave desiatkovej. Čitateľovi navrhujeme tento postup: Ak by mal spočítať, odpočítať, vynásobiť alebo vydeliť nejaké dve čísla vyjadrené v dvojkovej sústave, prevedie ich do sústavy desiatkovej, urobí požadovanú operáciu a výsledok prevedie znovu do dvojkovej sústavy. Podobne pracuje aj počítač: Údaje prevedie z desiatkovej do dvojkovej sústavy, v nej úlohu vyrieši a výsledok prevedie znovu do desiatkovej sústavy.

Proces spočitovania, odpočitovania, násobenia a delenia je možné podobným spôsobom zmechanizovať ako v desiatkovej sústave.

Príklad. *Sčítajme čísla* 1010_{II} *a* 111_{II}.

Riešenie. Čísla vyjadrené v dvojkovej sústave podpíšeme pod sebe tak, aby rovnaké mocniny dvojky boli pod sebou. Začíname sčitovať po stĺpcoch sprava doľava týmto spôsobom: Súčet čísel stojacich v tom istom stĺpci delíme dvoma. Zvyšok delenia podpíšeme pod daný stĺpec a výsledok delenia pripočítame k súčtu nasledujúceho stĺpca. Teda

$$\begin{array}{r} 1010_{II} \\ 111_{II} \\ \hline 10001_{II} \end{array}$$

Úloha 4.17. Sčítajte čísla 11111_{II} a 10101_{II}.
Úloha 4.18. Odčítajte od čísla 10011_{II} číslo 1001_{II}.
Úloha 4.19. Vynásobte čísla 11001_{II}, 1111_{II}.
Úloha 4.20. Deľte číslo 10011010_{II} číslom 10110_{II}.

Vráťme sa teraz ku hre VI(a,b,c). Pri hľadaní jej stratégie sme zistili, že pozície (n,n,0), (0,n,n) a (n,0,n) sú kritické a že pri ich hľadaní sa ako periódy vyskytujú mocniny dvojky. Táto skutočnosť má úzky súvis s dvojkovou sústavou, ako to ilustruje nasledujúci príklad.

Príklad partie VI(9,14,15):
$(9,14,15) \xrightarrow{A} (9,14,7) \xrightarrow{B} (9,9,7) \xrightarrow{A} (9,9,0) \xrightarrow{B} (9,5,0) \xrightarrow{A}$
$\longrightarrow (5,5,0) \xrightarrow{B} (2,5,0) \xrightarrow{A} (2,2,0) \xrightarrow{B} (2,1,0) \xrightarrow{A} (1,1,0) \xrightarrow{B}$
$\longrightarrow (0,1,0) \xrightarrow{A} (0,0,0)$. Teda Anička vyhrala.
Vyjadrime čísla 9, 14 a 15 v dvojkovej sústave:

$$9_X = 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0,$$
$$14_X = 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0,$$
$$15_X = 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0.$$

Teda $9_X = 1001_{II}$, $14_X = 1110_{II}$, $15_X = 1111_{II}$. Zapíšme teraz znaky vyjadrujúce čísla 9_X, 14_X, 15_X v dvojkovej sústave do stĺpcov zdola nahor:

9	14	15
1	0	1
0	1	1
0	1	1
1	1	1

Prepíšeme priebeh hry týmto spôsobom:

9	14	15
1	0	1
0	1	1
0	1	1
1	1	1

$\xrightarrow{A}$

9	14	7
1	0	1
0	1	1
0	1	1
1	1	0

$\xrightarrow{B}$

9	9	7
1	1	1
0	0	1
0	0	1
1	1	0

$\xrightarrow{A}$

$\xrightarrow{A}$

9	9	0
1	1	0
0	0	0
0	0	0
1	1	0

$\xrightarrow{B}$

9	5	0
1	1	0
0	0	0
0	1	0
1	0	0

$\xrightarrow{A}$

5	5	0
1	1	0
0	0	0
1	1	0
0	0	0

$\xrightarrow{B}$

$\xrightarrow{B}$

2	5	0
0	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$\xrightarrow{A}$

2	2	0
0	0	0
1	1	0
0	0	0
0	0	0

$\xrightarrow{B}$

2	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	0
0	0	0

$\xrightarrow{A}$

$\xrightarrow{A}$

1	1	0
1	1	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

$\xrightarrow{B}$

0	1	0
0	1	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

$\xrightarrow{A}$

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

Vidíme, že v každom riadku kritických situácií je párny počet jedničiek, alebo žiadne jedničky. Aničke sa podarilo Borisa doviesť do pozície $(n,n,0)$, teda vyhrala.

Dvojkovú sústavu je možné využiť na jednoduché riešenie stratégie hry NIM VI, hrané s ľubovoľným počtom kôpok — aj túto hru NIM budeme označovať symbolom VI. Stratégiu najlepšie pochopíme na príklade.

Príklad partie NIM VI(3,6,4,11,10).

Najprv každé z uvedených čísel prepíšeme v dvojkovej sústave: $3_X = 11_{II}$, $6_X = 110_{II}$, $5_X = 101_{II}$, $11_X = 1011_{II}$, $10_X = 1010_{II}$. Tieto čísla prehľadne zapíšeme pod seba do tabuľky.

X	II			
3			1	1
6		1	1	0
5		1	0	1
11	1	0	1	1
10	1	0	1	0

Teraz zistíme, či v niektorom stĺpci je nepárny počet symbolov „1“. Keby bolo všade „pár“, tak sme v kritickej pozícii a nemôžeme vyhrať. V našom prípade je jeden stĺpec (posledný), v ktorom je „nepár“. Berieme tak, aby vznikol všade „pár“ 1.; berieme 1 kameň buď z kopy 3, alebo z kopy 5, alebo z kopy 11. Napríklad zoberieme z kopy 11. Vznikla pozícia (3,6,5,10,10). Súper ťahá napr. na (3_X 6_X, 5_X, 10_X, 3_X).

Opätovne urobíme tabuľkový rozpis pomocou dvojkovej sústavy:

X	II			
3			1	1
6		1	1	0
5		1	0	1
10	1	0	1	0
3			1	1

Tentoraz je „nepár“ vo dvoch stĺpcoch. Berieme tak, aby opäť bol všade „pár“. Teda z kopy, na ktorej je 10_X kameňov, berieme 7. Vznikne pozícia $(3_X, 6_X, 5_X, 3_X, 3_X)$. Rovnakým spôsobom pokračujeme ďalej. Vždy zoberieme tak, aby pozícia po našom ťahu mala v každom stĺpci párny počet jednotiek. Partia môže byť dohratá napr. takto (zápis iba v desiatkovej sústave):

$(3,6,5,3,3) \xrightarrow{\text{on}} (3,4,5,3,3) \xrightarrow{\text{ja}} (3,4,5,1,3) \xrightarrow{\text{on}} (3,0,5,1,3) \xrightarrow{\text{ja}}$
$\rightarrow (3,0,1,1,3) \xrightarrow{\text{on}} (2,0,1,1,3) \xrightarrow{\text{ja}} (2,0,1,1,2) \xrightarrow{\text{on}} (2,0,1,0,2) \xrightarrow{\text{ja}}$
$\rightarrow (2,0,0,0,2) \xrightarrow{\text{on}} (2,0,0,0,1) \xrightarrow{\text{ja}} (1,0,0,0,1) \xrightarrow{\text{on}} (0,0,0,0,1) \xrightarrow{\text{ja}}$
$\rightarrow (0,0,0,0,0)$.