Hry takmer matematické

2. kapitola. Hľadači stratégie

In: Ján Gatial (author); Tomáš Hecht (author); Milan Hejný (author): Hry takmer matematické. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 14–37.

2. kapitola

HĽADAČI STRATÉGIE

Borisov návod na hľadanie stratégie bude potrebné preveriť v praxi. Skúsime to s celou sériou nových hier NIM.

2.1. Séria hier NIM III $(a,b;k)$. Doteraz sme vždy dávali pravidlá jedinej hry. Teraz opíšeme pravidlá pre celú sériu hier. Dané sú dve kopy kameňov: na prvej je a kameňov, na druhej b kameňov. Hráč na ťahu si môže vybrať jednu z troch možností: zoberie

1. z prvej kopy ľubovoľný počet kameňov,
2. z druhej kopy ľubovoľný počet kameňov,
3. z oboch kôp zoberie po p kameňoch, pričom $p \leqq k$.

Príklad partie III(5,6;1). $(5,6) \xrightarrow{A} (5,3) \xrightarrow{B} (4,2) \xrightarrow{A} (1,2) \xrightarrow{B} (1,1) \xrightarrow{A} (0,0)$, zvíťazila Anička, lebo ona vzala posledný kameň.

Príklad partie III(7,11;4). $(7,11) \xrightarrow{A} (4,8) \xrightarrow{B} (4,6) \xrightarrow{A} (4,4) \xrightarrow{B} (0,0)$, zvíťazil Boris.

Príklad partie III(27,16;3). $(27,16) \xrightarrow{A} (16,16) \xrightarrow{B} (16,13) \xrightarrow{A} (10,13) \xrightarrow{B} (10,12) \xrightarrow{A} (9,11) \xrightarrow{B} (6,8) \xrightarrow{A} (6,7) \xrightarrow{B} (6,6) \xrightarrow{A} (4,4) \xrightarrow{B} (4,3) \xrightarrow{A} (2,1) \xrightarrow{B} (1,1) \xrightarrow{A} (0,0)$, zvíťazila Anička.

2.2. Tabuľka — pomocník. Pustíme sa do hľadania stratégií hier NIM III. Pre začiatok si zoberieme iba jednu z nich, napríklad hru III(5,6;1), ktorú sme videli už v prvej z troch partií.

Podľa Borisovho návodu bude potrebné najprv vypísať množinu všetkých možných pozícií hry. To sa dá urobiť pomocou prehľadnej tabuľky (pozri obrázok 1). Z nej okamžite vidieť, že pozícií je presne $6 \times 7 = 42$.

0,6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6
0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
0,4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4
0,3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3
0,2	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2
0,1	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1
0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

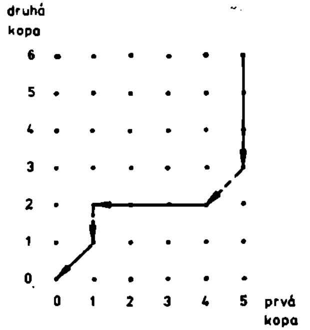
Obr. 1

Tabuľku možno použiť aj na hľadanie stratégie alebo na záznam partie. Pritom netreba všetky políčka tabuľky vypisovať, stačí napísať čísla po okraji tak, ako je uvedené na obrázku 2, na ktorom je šípkami zaznamenaný priebeh partie z prvého príkladu odseku 2.1. Šípky sú troch druhov: 1. sprava naľavo, 2. zhora nadol a 3. šikmo doľava nadol, podľa toho, či berieme 1. z prvej kopy, 2. z druhej kopy, 3. z oboch kôp.
Každá šípka začína v poli, ktoré prislúcha pozícii, z ktorého príslušný ťah začínal, a končí v poli, kde ťah končil. Pritom ťahy Anky sú značené plnou šípkou, ťahy Borisa bodkovanou.

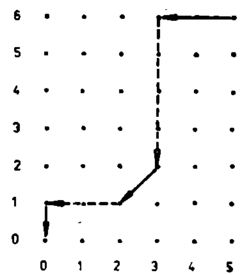
Úloha 2.1. Tabuľkovým spôsobom zapíšte partiu hry III(5,6;1): $(5,6) \xrightarrow{A} (4,5) \xrightarrow{B} (2,5) \xrightarrow{A} (2,4) \xrightarrow{B} (2,2) \xrightarrow{A}$ $\longrightarrow (1,2) \xrightarrow{B} (1,0) \xrightarrow{A} (0,0)$.

Úloha 2.2. Na obrázku 3 je tabuľkovým spôsobom zaznamenaná partia hry III(5,6;1). Zapíšte túto partiu obyčajne, ako sú písané napríklad partie z odseku 2.1.

2.3. Statégia hry III(5,6;1). Spôsob, ktorým budeme hľadať kritické pozície, môžeme nazvať „račí“, lebo



Obr. 2



Obr. 3

pôjdeme od konca. Celý postup je prehľadne zachytený na tabuľkách obrázku 4. Políčka kritických pozícií budeme označovať kolieskom ○ , políčka nekritických pozícií krížikom × a neprebádané políčka označíme bodkou ● .

Predovšetkým vieme, že políčko (0,0) je kritické, lebo v podmienkach NIM je pravidlo „kto berie posledný kameň, vyhráva“. Teda každé políčko, z ktorého sa do kritického políčka (0,0) môžeme dostať jediným ťahom, je nekritické. To sú všetky políčka dolného riadku, krajného ľavého stĺpca a pole (1,1), spolu 12 polí. Situácia je znázornená na obrázku 4a. Všimnime si teraz pole (2,1). Akýmkoľvek ťahom sa z tohto poľa dostaneme iba na pole označené ×, teda na pole nekritické. Preto pole (2,1) je kritické. Podobne i pole (1,2). Na tieto dve polia teda nakreslíme ○ a značku × dokreslíme do každého poľa, z ktorého sa jediným ťahom dostaneme do (2,1) či (1,2). Takých polí je 15. Vzniklá situácia je zobrazená na obrázku 4b. Neprebádaných ostalo už iba 12 polí. Z nich ľavé dolné — (3,3) — je zrejme kritické, pretože z neho sa dá ťahať výlučne na nekritické polia.

6	×	·	·	·	·	·
5	×	·	·	·	·	·
4	×	·	·	·	·	·
3	×	·	·	·	·	·
2	×	·	·	·	·	·
1	×	×	·	·	·	·
0	○	×	×	×	×	×
	0	1	2	3	4	5

Obr. 4a

×	×	×	·	·	·
×	×	×	·	·	·
×	×	×	·	·	·
×	×	×	·	·	·
×	○	×	×	×	×
×	×	○	×	×	×
○	×	×	×	×	×
0	1	2	3	4	5

Obr. 4b

×	×	×	×	·	·
×	×	×	×	·	·
×	×	×	×	×	·
×	×	×	○	×	×
×	○	×	×	×	×
×	×	○	×	×	×
○	×	×	×	×	×
0	1	2	3	4	5

Obr. 4c

×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	○	×
×	×	×	×	×	○
×	×	×	○	×	×
×	○	×	×	×	×
×	×	○	×	×	×
○	×	×	×	×	×
0	1	2	3	4	5

Obr. 4d

Nakreslime teda do poľa (3,3) značku ○, a do ďalších šiestich polí, z ktorých sa do (3,3) možno dostať jediným ťahom, napíšeme značku ×. Získame situáciu z obrázku 4c. Konečne vidíme, že polia (5,4) a (4,5) sú obe kritické a ostávajúce tri polia potom nekritické. Tak sme získali výslednú tabuľku 4d, ktorú pomenujeme tabuľkou stratégie hry NIMI II(5,6;1).

Pomocou tabuľky 4d ľahko vyhráme (ak budeme hrať začínajúceho hráča) každú partiu. V prvom ťahu zahráme buď na (5,4), alebo na (4,5). Potom v každom ďalšom ťahu zahráme tak, aby náš ťah končil v políčku označenom kolieskom ○, teda v kritickej pozícii.

— To je skvelé, potešila sa objavu Anka, a dodala — teraz mám dojem, že takouto tabuľkovou metódou budem vedieť nájsť stratégiu každej hry NIM.

— Viete čo, skúste nám dať nejaké úlohy, aby sme si tento nový objav preverili vlastnými silami — požiadal Boris.

— Prečo nie, súhlasí autor.

Úloha 2.3. Nájdite víťazný ťah v hre III(5,6;1) v pozícii a) (2,6), b) (5,5), c) (2,3).

Úloha 2.4. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(9,7;1) a napíšte prvý ťah partie (samozrejme, že ten vyhrávajúci!).

Úloha 2.5. Anička tvrdí, že v partii hry III(9,7;1) zvíťazí najpozdejšie za 10 ťahov. Boris tvrdí, že vydrží vzdorovať 10 ťahov a prehrá najskôr až jedenástym ťahom. Kto má pravdu?

Úloha 2.6. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(5,6;2).

Úloha 2.7. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(9,7;2).

Úloha 2.8. Koľko (minimálne) ťahov potrebuje Anička k tomu, aby v hre III(9,7;2) porazila vzdorovitého Borisa, ktorý oddiaľuje svoj koniec, ako sa len dá.

Úloha 2.9. Nakreslite tabuľku stratégie hry a) III(3,3;3), b) III(3,5;3), c) III(6,5;3), d) III(9,9;3), e) III(14,14;3).

Úloha 2.10. Vypíšte všetky víťazné ťahy v hre III(14,14;3) v pozícii a) (5,6), b) (5,5), c) (10,13), d) (14,12).

Úloha 2.11. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(20, 20;4).

Úloha 2.12. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(20, 15;∞).

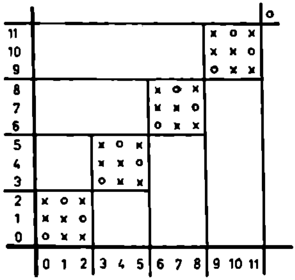
2.4. Stratégia veľkých hier. Boris vyriešil všetky úlohy a prišiel za Ankou predviesť svoju mužskú dokonalosť.

Boris: Anička, povedz si hociktorú hru NIM a ja ju vyhrám aj proti počítaču, ak mi ovšem nedáš začať v kritickej pozícii.

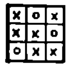
Anka: Tak ma skús nabiť v hre III(611,612;2).

B: Momentík, chvíľočku strpenia, len čo si vyrobím tabuľku stratégie.

A: Koľko hodín chceš maľovať na štvorčekových plachtách obdĺžnik 611 × 612?



Obr. 5



Obr. 6

B: (sklamane) Ty si ale protiva!

A: Nemal si sa vystatovať!

B: Moment! Ja to predsa skúsim! Boris po chvíli ukázal Anke obrázok 5.

B: Nepotrebujem veľký obdĺžnik. Už z tohoto vidím, že kolieska sú rozmiestnené len pozdĺž diagonály. Vyrobím si takúto tapetu (obrázok 6) a ženiem ju hore diagonálou, ako bača ovce hore grúňom!

A: No dobre, tak mi povedz prvý ťah v partii III(611, 612;2)!

B: Strpenie, hneď to bude.

Boris po chvíli počítania vyrobil tento papierik:

diagonála	(0,0), (3,3), (6,6), ...	t.j.	$(3n, 3n)$
pod diagonálou	(2,1), (5,4), (8,7), ...	t.j.	$(3n + 2, 3n + 1)$
nad diagonálou	(1,2), (4,5), (7,8), ...	t.j.	$(3n + 1, 3n + 2)$
$611 = 3.203 + 2$, $612 = 3.204$			

B: Aha! Už to viem! Môj prvý ťah je (611,612) → → (611,610), teda beriem z druhej kopy dva kamene a ty si v kritickej pozícii!

A: Dokáž!

B: Veď to máš tu pred nosom. Pozri $611 = 3.203 + 2$, $610 = 3.203 + 1$.

A: Áno, to súhlasí.

B: Podľa tohoto riadku (Boris ukázal na druhý riadok lístka, označeného na začiatku „pod diagonálou") dvojica (611,610) sem patrí, lebo je presne tohoto tvaru, ak za n položíš 203. Teda je kritická.

A: (uznanlivo) To sa ti podarilo!

B: A nielen to, teraz už ľahko napíšem stratégiu pre hociktorú hru NIM typu III(a,b;2).

A: Ty píš stratégiu a mňa tiež niečo napadlo, len si to potrebujem preveriť.

Chvíľu bolo ticho, obaja počítali, písali. Potom skoro súčasne zvolali „hotovo" a vymenili si výsledky svojej práce. Boris napísal stratégiu hry a Anka našla elegantný zápis množiny kritických pozícií. Autor obidve myšlienky trochu kozmeticky upravil a ponúka ich čitateľovi.

Stratégia hry III(a,b;2). Som na ťahu v pozícii (p,q), pričom $p \leq q$. Vypočítam si najprv číslo $i = \text{zv}(p : 3)$ a potom idem do pozície, ktorá je opísaná v príslušnom okienku tabuľky

<table>
<tr><th></th><th>$i = 0$</th><th>$i = 1$</th><th>$i = 2$</th></tr>
<tr><td>$p = q$</td><td>prehrám</td><td>$(p - 1, p - 1)$</td><td>$(p - 2, p - 2)$</td></tr>
<tr><td>$p + 1 = q$</td><td rowspan="2">(p, p)</td><td>prehrám</td><td rowspan="2">$(p, p - 1)$</td></tr>
<tr><td>$p + 1 < q$</td><td>$(p, p + 1)$</td></tr>
</table>

Symbolom zv(p : 3) označujeme zvyšok pri delení p : 3.
Množina kritických pozícií hry III(a,b;2). Označme túto množinu K. Potom

$$(p,q) \in K \Leftrightarrow |p - q| < 2 \text{ a } \mathrm{zv}[(p + q) : 3] = 0 .$$

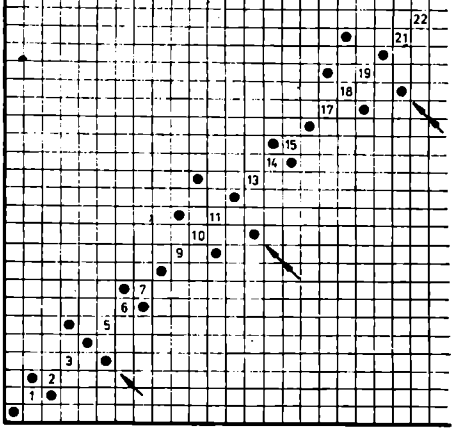
Podmienka zv[(p + q) : 3] = 0 hovorí, že číslo $p + q$ sa dá deliť číslom 3 bez zvyšku.

Úloha 2.13. Pre každú z nasledujúcich pozícií hry III(a,b;2) zistite podľa Ankinho kritéria, či je kritická. Pre nekritické pozície nájdite podľa Borisovho návodu víťazný ťah: (35,35), (37,35), (52,50), (111,121), (454,545) (759,760), (760,759), (1984,1985).

Úloha 2.14. Nájdite stratégiu hry III(611,612;1).

2.5. Funguje fígeľ s tapetou pre každý NIM-III? Fígeľ s tapetou, ktorý tak báječne pomohol rozriešiť hľadanie stratégie NIM III(∗,∗;2), by sa mohol vyskúšať aj v iných prípadoch. Boris navrhol skúsiť NIM III(∗,∗;3). Anka súhlasila. Začali každý osobitne pre uvedenú hru NIM kresliť tabuľku stratégie. Prácu končili — výsledky si porovnali a boli rovnaké. Anka celú tabuľku pekne prekreslila a vznikol obrázok 7.

Po chvíli tichého pozerania na obrázok 7 Boris ukázal na trojicu bodiek (jednoduchá šípka) a povedal, že táto sa už neopakuje.



Obr. 7

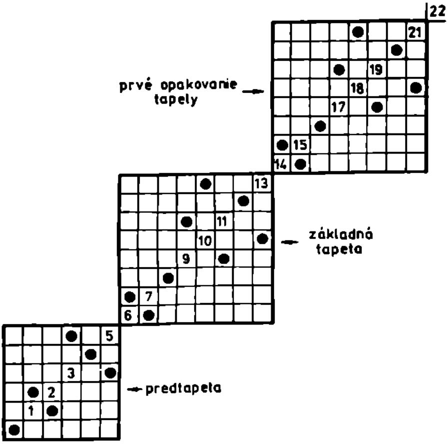
Anka: Možno sme urobili tabuľku krátku, možno, že k opakovaniu dôjde až od 25 či tridsiatky.

Boris: Nemyslím. Pozri sem! Porovnaj tieto dve miesta (ukázal na miesta označené dvojšípkou)! Tieto sú rovnaké, tie sa budú opakovať.

A: Máš pravdu. Keď to takto vyznačíme (nakreslila do obrázku 7 pár čiar, takže vznikol obrázok 8), vidíme veci jasne.

B: Znova sa tu periodicky opakuje „tapeta", ale táto nezačína na kraji. Najprv treba odstrihnúť akúsi „predtapetu" — od (0,0) po (5,5) — a potom už ide základná „tapeta" (6,6) — (13,13), ktorá sa bude periodicky opakovať.

A: Teda aj aritmetický zápis množiny všetkých kritických pozícií môžeme už teraz urobiť ľahko. Nepodarí sa



Obr. 8

mi nájsť síce tak elegantný zápis, ako pri NIM III(*,*;2), ale ani tento zápis nebude veľmi zlý.

B: Vieš čo, netreba vypisovať všetky kritické pozície. Keď napíšeš napríklad (3,5), netreba písať aj (5,3).

A: Dobre, budeme teda písať iba tie kritické pozície (p,q), pre ktoré je $p \leqq q$. Potom množina K všetkých kritických pozícií (p,q); $p \leqq q$ hry III(*,*;3) je daná v tomto zozname:

(0,0), (1,2), (3,5), (4,4)	— Z „predtapety"
$(6 + 8n, 7 + 8n)$, $(8(n + 1), 8(n + 1))$, $(9 + 8n, 11 + 8n)$ $(10 + 8n, 13 + 8n)$, $(12 + 8n, 12 + 8n)$	— Z n-tého opakovania zákl. „tapety"

B: Aj tento zápis je ešte pridlhý. Stačilo by to snáď písať takto (ani tie „tapety“ nebudeme už dávať do úvodzoviek):

(0,0), (1,2), (3,5), (4,4)		predtapeta
(6,7), (8,8), (9,11) (10,13), (12,12)	+ perioda 8	ďalšie tapety

A: Dobre, môžeme to tak zapísať, ale nevieme, čo to tvoje „+ perioda 8“ značí.

Úloha 2.15. Načrtnite tabuľku stratégie NIM III (*,*;4) a Borisovým spôsobom zapíšte množinu všetkých kritických pozícií hry.

Úloha 2.16. Na základe výsledkov úlohy 2.15 napíšte prvý ťah hráča v hre a) III(87,101;4), b) III(211,196;4), c) III(321,322;4).

Úloha 2.17. Načrtnite tabuľku stratégie hry NIM III (*,*;5) a Borisovým spôsobom zapíšte množinu všetkých kritických pozícií hry.

Anka s Borisom zvládli ešte stratégiu ďalších dvoch hier NIM: III(*,*;6) a III(*,*;7). Bolo to ale dlhé počítanie, preto ani čitateľa príliš nenútime do posledných úloh tohoto odseku. Ak si však čitateľ verí, ak vie pedantne a presne riešiť, tak k výsledku určite dôjde.

Úloha 2.18. Načrtnite tabuľku stratégie pre NIM III(*,*;6).

Úloha 2.19. Načrtnite tabuľku stratégie pre NIM III(*,*;7).

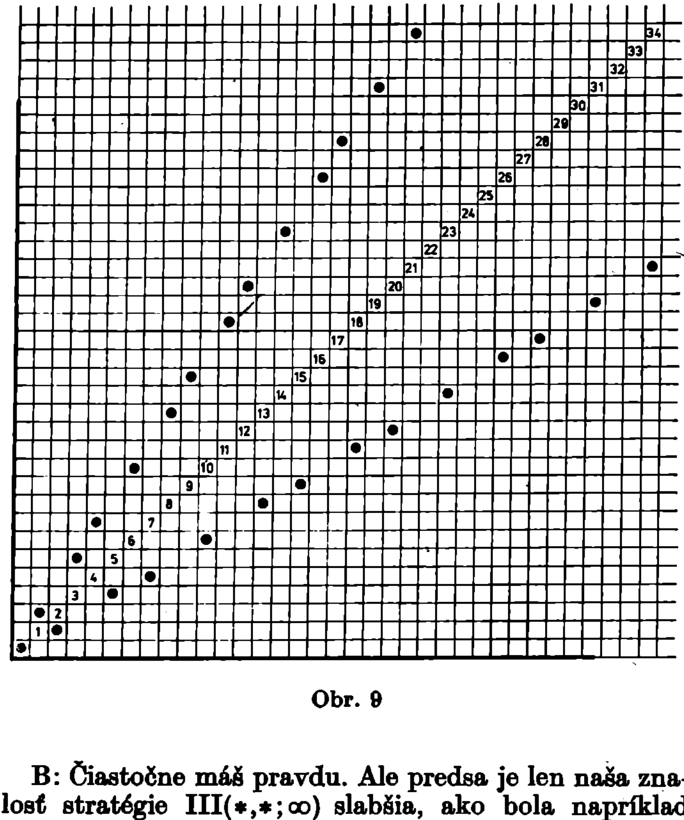
2.6. Problém. Úlohy, ktoré sme naposledy riešili, boli už dosť zložité, no neboli problémové. Vedeli sme, ako na ne. Stačilo mať dostatočne veľký kus štvorčekového papiera, trošku čas a trpezlivosť. Život nie vždy býva tak jednoduchý. Neraz nás postaví pred tak pomotanú situáciu, že nielen nevidíme spôsob jej riešenia, ale pravdu povediac, nevieme ani, ako sa do toho pustiť. Vtedy hovoríme o problémovej situácii. Takou je napríklad pre Borisa snaha udržať svoje veci v poriadku.

Problémy majú v živote aj pozitívnu funkciu. Učia a nútia človeka rozmýšľať. Ak sa potom človeku po dlhom a namáhavom úsilí nakoniec predsa podarí problémom kúsok pohnúť, zaleje úspešného riešiteľa nevýslovná vlna radosti a nadšenia. No a k vôli tomu sa už každému oplatí bojovať nerovný boj v problémami.

Stratégie hier III(∗,∗;1), III(∗,∗;2), III(∗,∗;3),... boli iba úlohy. Je pravda, že čoraz dlhšie a namáhavejšie, ale stále iba úlohy. Naši priatelia poznali spôsob, ako na to: kreslili obrázok tak dlho, pokiaľ nedošlo ku opakovaniu vzorky, našli predtapetu a základnú tapetu, čím boli hotoví. No celkom odlišná je situácia s NIM III(∗,∗;∞). Keď Anka s Borisom nakreslili obrázok 9, dívali sa naň chvíľu bezradne. Prvý prehovoril Boris.

Boris: Dve veci sú jasné: obrázok, rovnako ako všetky predchádzajúce, je súmerný vzhľadom na diagonálu, a že na rozdiel od všetkých predchádzajúcich obrázkov nikdy nenájdeme ani opakovanie, ani predtapetu, ani základnú tapetu.

Anka: To je pravda, ale ja v tom nevidím žiadnu chybu. Čo vlastne hľadáme? Hľadáme stratégiu hry NIM III(a,b;∞). Vieme, ako nakresliť tabuľku kritických pozícií? Vieme. Preto vieme aj návod na výhru. Poznáme stratégiu!



Obr. 9

B: Čiastočne máš pravdu. Ale predsa je len naša znalosť stratégie III(∗,∗;∞) slabšia, ako bola napríklad stratégia hry III(∗,∗;3). Tu sme vedeli pomerne rýchlo vypočítať, či je napríklad pozícia (1711,2836) kritická alebo nekritická. Toto pri NIM III(∗,∗;∞) nevieme. Nevieme ju počítať, vieme ju iba kresliť, čo vyžaduje mnoho času. Pre tie čísla, čo som uviedol, by sme tabuľku kreslili asi hodinu a boli by sme v pochybnosti, či sme niekde neurobili chybu.

A: Ak ti teda dobre rozumiem, Boris, chceš nájsť nejaký počtársky vzorec, pomocou ktorého by si mohol pre ľubovoľnú dvojicu prirodzených čísel (a,b) určiť dve veci pre NIM $(*,*;\infty)$:

a) či je to kritická pozícia,

b) ak to nie je kritická pozícia, aký je víťazný ťah.

B: Presne to by som chcel!

A: Tak to poďme hľadať! Skúsme najprv obrázok 9 prepísať do tabuľky.

2.7. Tabuľka čísel = prvá myšlienka. Podľa Ankinho návrhu zapísali obrázok č. 9 vo forme tabuľky. Pretože tabuľka je súmerná podľa diagonály, rozhodli sa písať iba súradnice bodov nad diagonálou a bod (0,0). Tabuľka vyzerala takto

x	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
y	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

Tab. 1

Úloha 2.20. Dívajte sa na tabuľku a hľadajte v nej zákonitosti.

Riešenie tejto úlohy nenájdete vzadu medzi riešeniami, ale v nasledujúcom rozhovore.

Anka: V hornom riadku čísla pribúdajú po jednotke či po dvojke. V spodnom riadku po dvoch či po troch.

Boris: Žiadne číslo sa nevyskytne aj v hornom, aj v dolnom riadku — okrem nuly.

A: Skutočne: 1 — hore, 2 — dole, 3 a 4 — hore, 5 — dole, 6 — hore, 7 — dole, 8 a 9 — hore. Vieš, že rozdiel oboch riadkov („dolný" — „horný") je postupnosť 0, 1, 2, 3, ...?

B: Čo hovoríš? Tomu nerozumiem.

Anka začala Borisovi vysvetlovať svoju poslednú myšlienku. Zo začiatku bolo vysvetľovanie trochu zmätené, no postupne sa vyjasňovalo. Čím viac Anka vysvetľovala, tým zrejmejšie sa jej samej veci ukazovali. Nakoniec zvolala: Hurá, veď je to jednoduché! Pozri, Boris, ja už viem tabuľku 1 pokračovať bez toho, že by som kreslila obrázok.

2.8. Návod na výrobu tabuľky čísel. Najprv si k tabuľke dopíšeme ešte prvý riadok „n"; v ňom idú prirodzené

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21		
y_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34		

Tab. 2

čísla od nuly za radou 0, 1, 2, 3,... Teraz si všimnime, že pre každé n platí

(i) $$y_n = x_n + n.$$

Skutočne

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + 0 \qquad (y_0 = 0,\ x_0 = 0)\,, \\ y_1 &= x_1 + 1 \qquad (y_1 = 2,\ x_1 = 1)\,, \\ y_2 &= x_2 + 2 \qquad (y_2 = 5,\ x_2 = 3) \quad \text{atď.} \end{aligned}$$

Konečne použijeme tvoju myšlienku, že

(ii) Každé prirodzené číslo sa v riadku „x_n" alebo v riadku „y_n" vyskytne práve raz.

Zatiaľ posledný stĺpec v tabuľke je: $n = 13$, $x_{13} = 21$, $y_{13} = 34$. Chcem nájsť x_{14}. Vyhľadám najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa doteraz v riadkoch „x_n" a „y_n" nevyskytlo. Je to číslo 22. Preto $x_{14} = 22$ a teda $y_{14} = x_{14} + 14 = 22 + 14 = 36$.

Chcem nájsť x_{15}. Vyhľadám najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa doteraz v riadkoch „x_n" a „y_n" nevyskytlo. Je to číslo 24. Preto $x_{15} = 24$ a teda $y_{15} = x_{15} + 15 = 24 + 15 = 39$.

Úloha 2.21. Napíšte tabuľku kritických pozícií NIM III(*,*;∞) až do $n = 33$ (riešenie je tu v texte).

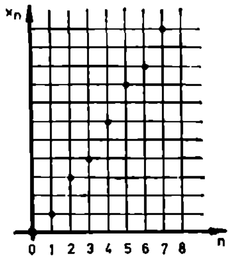
Návod na negrafické vyhotovenie tabuľky kritických pozícií je už istým pokrokom, no otázky a), b) z odseku 2.6 nerieši. To by vyžadovalo nájsť predpis, ako priamo ku číslu n napísať obidve súradnice x_n a y_n. Ako daný predpis nájsť? Bude treba zrejme veľmi dôkladne poprezerať tabuľku, ku ktorej sme došli.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29
y_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47

n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
x_n	30	32	33	35	37	38	40	42	43	45	46	48	50	51	53
y_n	49	52	54	57	60	62	65	68	70	73	75	78	81	83	86

Tab. 3

2.9. Grafy = druhá myšlienka. Tabuľka je kopa čísel. Tabuľka nie je dosť prehľadná. Tabuľku treba sprehľadniť — treba nakresliť nejaké grafy. Z nich sa snáď niečo vyťaží. Na obrázku č. 10 vidieť graf funkcie x_n. Bodky stúpajú dosť strmo nahor, no stále sa motajú okolo akejsi priamky. Vedeli by sme tú priamku nakresliť? Vedeli by sme nakresliť aj iné významnejšie grafy charakterizujúce tabuľku?



Obr. 10

Úloha 2.22. Nakreslite graf funkcie x_n a pokúste sa nájsť priamku, ktorá „čo najlepšie" aproximuje stúpanie grafu.

Úloha 2.23. Nakreslite graf funkcie $u_n = x_n - n$ (bude pomalšie stúpať). Aj tu nájdite aproximujúcu priamku.

Úloha 2.24. Nakreslite graf funkcie $v_n = y_n - 2n$.

Úloha 2.25. Nakreslite graf funkcie $f_n = \frac{x_n}{n}$.

Úloha 2.26. Nakreslite graf funkcie $g_n = \frac{y_n}{x_n}$.

Poriadne sa zamyslite nad výsledkami úloh. Pokúste sa vypozorovať z chovaní funkcií x_n, u_n, v_n, f_n a g_n nejaké zákonitosti. Ak už nebudete vedieť ako ďalej, prečítajte si nasledujúcu úlohu.

Úloha 2.27. Z grafu funkcie f_n vidieť, že hodnota $f_n = 1{,}6$ sa opakuje dosť pravidelne: $f_5 = f_{10} = f_{15} = f_{20} = f_{25} = 1{,}6$. Zistite, či toto platí ďalej, t. j. či $f_{30} = f_{35} = \ldots = f_{5k} = 1{,}6$ pre všetky prirodzené čísla k.

Úloha 2.28. Podobne zistite, či platí $g_5 = g_{10} = g_{15} = \ldots = g_{5k} = 1{,}625$ pre všetky prirodzené čísla k.

Úloha 2.29. Keď poznáme hodnotu funkcie f_n, vieme vypočítať hodnotu funkcie g_n? Tiež naopak, vieme vypočítať hodnotu funkcie f_n, ak poznáme hodnotu funkcie g_n?

Zistili sme, že odhad s pravidelným opakovaním nejakej hodnoty nevyšiel, no poznáme vzťah medzi funkciami f_n a g_n. Ak poznáme jednu z nich, vieme vypočítať druhú. Skúsme ešte oba grafy týchto funkcií nakresliť na jediný papier. Zaujíma nás, ako bude vyzerať „asymptotické chovanie sa funkcií", t. j. ako budú vyzerať ich grafy pre veľké n. K tomu ovšem najprv potrebujeme tie „veľké n" vypočítať tabuľkovým spôsobom.

Úloha 2.30. Vypočítajte hodnoty funkcií f_n a g_n pre $n = 71, 72, 73, \ldots, 100$. Zostrojte na jednom obrázku grafy oboch funkcií pre $71 \leqq n \leqq 100$. Skúste na základe tohto obrázku odhadnúť, ako pôjdu grafy funkcií f_n a g_n ďalej, pre $n \to \infty$.

2.10. Hranica = tretia myšlienka. Porovnajme grafy funkcií f_n a g_n na obrázkoch 12, 13 a 14 z kapitoly 6. Vidíme dve veci:

(iii) pre každé n je $f_n < g_n$

(iv) obe funkcie „pulzujú" — dosť rytmicky sa súčasne približujú a odďaľujú od istej hranice — označme ju h. Najtesnejšie sa ku hranici h priblížili v hodnote $n = 89$.

Boris: Ak sú obidva tieto dohady správne, tak hraničná hodnota h leží medzi f_{89} a g_{89}, t. j.

$$\text{(v)}\quad f_{89} = \frac{144}{89} \doteq 1{,}6178775 < h < 1{,}6180555 \doteq$$
$$\doteq \frac{233}{144} = g_{89} .$$

Anka: To by sme mali číslo h určené s presnosťou... (a začala počítať): 1,6180555 — 1,6178775 = 0,000178. Teda

$$\text{(vi)}\qquad h = 1{,}6179665 \pm 0{,}000089 .$$

B: Čo myslíš, Anka, mohli by sme túto hranicu h ešte ďalej spresniť?

A: Myslím, že mohli, ale napočítali by sme sa. Nik nevie, po koľkých krokoch sa obe funkcie f_n a g_n zase k sebe tak veľmi priblížia. Neverím, že to bude príliš skoro.

B: Mohli by sme skúsiť hľadať tie najväčšie priblíženia hneď od začiatku. Snáď bude v tom nejaká zákonitosť.

A: Aké — najväčšie priblíženia? Veď to je jediné — to máme, je to $n = 89$.

B: Nerozumieš mi. Pozri, začneme od začiatku, od nuly, alebo od $n = 1$. Pre toto číslo je $f_1 = 1$, $g_1 = 2$, teda $g_1 - f_1 = 1$. Pre $n = 2$ je $g_2 - f_2 = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$, čo je menej, ako bola 1. Ďalej pre $n = 3$ je $g_3 - f_3 = \frac{7}{4} - \frac{4}{3} = \frac{5}{12}$, čo je viac, ako bola $\frac{1}{6}$. Ďalej pre $n = 4$ je $g_4 - f_4 = \frac{10}{6} - \frac{6}{4} = \frac{1}{6}$, čo je to isté ako per

$n = 2$. Ďalej pre $n = 5$ je $g_5 - f_5 = \frac{13}{8} - \frac{8}{5} = \frac{1}{40}$ čo je hodne menej ako $\frac{1}{6}$.

A: Ahá! Už ti rozumiem. Chceš nájsť v postupnosti 1, 2, 3,... tie čísla n, pre ktoré výraz $g_n - f_n$ bude menší, ako pre ktorúkoľvek z predchádzajúcich hodnôt.

B: Presne tak. Skúsme to nájsť. Možno niečo objavíme.

Úloha 2.31. Skúste to nájsť aj vy; určite objavíte veľmi vážnu vec! Keď priatelia uvideli výsledok svojej práce, tabuľku z riešenia úlohy 2.31, vedeli predpovedať, pre ktoré najbližšie n (po $n = 89$) sa grafy f_n a g_n priblížia ešte tesnejšie. A nielen to. Špekulantskou úvahou vypočítali príslušné f_n a g_n bez toho, že by sa trápili vypisovaním dlhej tabuľky.

Úloha 2.32. Určte najmenšie prirodzené $n > 89$, pre ktoré bude $g_n - f_n < \frac{1}{12816}$. Vypočítajte pre toto n číslo $g_n - f_n$. Ako hlavný výsledok tu bola možná ešte presnejšia hraničná hodnota

(viii) $$h = 1{,}6180314 \pm 0{,}0000057 \,.$$

2.11. Limita = štvrtá myšlienka. Vzorec (viii) dáva už hraničnú hodnotu h s veľkou presnosťou, ale stále nedáva túto hodnotu presne. Je možné určiť hodnotu h presne?

Anka: Úplne presne by sme h určili vtedy, ak by sme vedeli vypočítať f_n a g_n pre $n = \infty$.

Boris: No, ako určíš niečo v nekonečnu? To sa predsa nedá.

A: Ja však verím, že také h existuje! Určite existuje!

B: V nekonečnom n by si podľa (vii) mala $g_n - f_n = \frac{1}{\infty x_\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$.

A: Je to troška odvážne, čo tu počítaš, ale myslím, že v podstate správne. Správne! Vykríkla Anka a začala počítať, až vypočítala presnú hodnotu h.

Úloha 2.33. Vypočítajte presnú hodnotu h.

2.12. Vzorec = piata a posledná myšlienka. Víťazne hľadeli priatelia na pokorené číslo h. Teraz, keď boli veci jasné, nezdalo sa ani to zdolávanie tak vyčerpávajúce. Pocit víťazstva blažil. Bolo treba už len dopočítať, ako z čísla h určiť funkcie x_n a y_n. K tomu viedla táto úvaha (čitateľ sa môže pokúsiť o samostatné riešenie): Pretože h je limitná hodnota pre $\frac{x_n}{n}$, bude číslo x_n blízko čísla $h.n$. Zistime túto závislosť tabuľkou:

n	1	2	3	4	5	6	7
$h.n$	1,618	3,236	4,854	6,472	8,090	9,708	11,326
x_n	1	3	4	6	8	9	11

Z tabuľky vidieť, že číslo x_n je najbližšie nižšie celé číslo ku číslu $h.n$. V matematike máme na túto funkciu osobitný symbol a pomenovanie.

Symbolika. Nech a je ľubovoľné reálne číslo. Potom existuje práve jedno celé číslo b také, že

$$b \leqq a < b + 1 .$$

Číslo b nazývame *celá časť čísla* a a označujeme ho $b = [a]$.

Príklady. $[1{,}7] = 1$, $\left[\frac{13}{4}\right] = 3$, $[\pi] = 3$, $[6] = 6$, $[-1{,}1] = -2$, $[-\sqrt{2}\,] = -2$, $[\sqrt{3} - \sqrt{2}\,] = 0$ atď.

Výsledok pozorovania tabuľky môžeme teraz zapísať vzorcom

(x) $$x_n = [h.n] \quad \text{pre všetky } n.$$

Úloha 2.34. Nájdite reálne číslo r, pre ktoré platí $y_n = [r.n]$, pre všetky n.

Úloha 2.35. Napíšte stratégiu hry NIM III$(a,b;\infty)$.

2.13. Stratégia hry NIM III $(a, b; \infty)$. Najprv popíšeme stratégiu hry ako návod. Potom v ďalšom odseku podáme dôkazy tvrdení, ktoré teraz vyslovíme a použijeme.

Nech je teda daná pozícia (p,q), $p \leqq q$. Všimneme si čísla p. Najprv zistíme, či môžeme číslo p písať v tvare $[nh]$, alebo v tvare $[nh^2]$, kde $n \in N$. Platí:

Lema 1. *Nech je dané prirodzené číslo p. Potom toto číslo je možné písať práve jedným zo spôsobov*

I. $p = [nh]$, *kde* $n \in N$, $\left(t.\,j.\ \frac{p}{h} < n = \left[\frac{p+1}{h}\right]\right)$,

II. $p = [nh^2]$, *kde* $n \in N$, $\left(t.\,j.\ \frac{p}{h^2} < n = \left[\frac{p+1}{h^2}\right]\right)$.

Každú z možností rozoberieme osobitne:

I. $p = [nh]$ rozlišujeme 3 prípady
  a) $q = [nh^2]$ — pozícia (p,q) je kritická, a preto hráč na ťahu nemá vyhrávajúci ťah,
  b) $q > [nh^2]$ — zahráme $(p,q) \to (p,[nh^2])$,
  c) $q < [nh^2]$ — zahráme $(p,q) \to (p - t, q - t)$, kde $t = p - [h(q - p)]$

II. $p = [nh^2]$ — zahráme $(p,q) \to (p, [nh])$.

2.14. Dôkazy tvrdení z 2.13. Okrem lemy 1 treba dokázať ďalšie tvrdenia, použité v odseku 2.13:

Lema 2. *Ak je* $p = [nh] \leqq q < [nh^2]$, *tak* $t = p - [h(q - p)] > 0$ a $q - t = [h^2(q - p)]$.

Lema 3. *Ak je* $p = [nh]$ a $q = [nh^2]$, *tak žiadna z pozícií* $(p - t, q)$, $(p, q - t)$, $(p - t, q - t)$ *pre* $t \in N$ *nie je kritická.*

Dôkaz lemy 1 sa skladá z dvoch častí:

A. Číslo $p \in N$ nie je možné vyjadriť súčasne aj v tvare $[nh]$, aj v tvare $[mh^2]$, $n, m \in N$. Toto dokážeme sporom. Nech teda $p = [nh] = [mh^2]$, potom

$$nh - 1 < p < nh \Leftrightarrow n - \frac{1}{h} < \frac{p}{h} < n\,,$$

$$mh^2 - 1 < p < mh^2 \Leftrightarrow m - \frac{1}{h^2} < \frac{p}{h^2} < m\,,$$

sčítame a zoberieme do úvahy rovnosť $\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} = 1$; získame

$$n + m - 1 < p < n + m\,,$$

čo je spor, lebo celé čísla $n + m - 1$ a $n + m$ idú bezprostredne po sebe, a niet teda medzi nimi miesta pre celé číslo p.

B. Číslo $p \in N$ možno vyjadriť buď v tvare $[nh]$, alebo v tvare $[mh^2]$, $n, m \in N$. Aj toto dokážeme sporom. Predpokladáme, že p nie je možné vyjadriť ani v tvare $[nh]$, ani v tvare $[mh^2]$, t. j. $[nh] < p < [(n + 1)\,h]$ a $[mh^2] < p < [(m + 1)\,h^2]$.

Podobne ako v predchádzajúcom prípade je

$$nh < p < (n + 1)\, h - 1 \Leftrightarrow n < \frac{p}{h} < n + 1 - \frac{1}{h},$$

$$mh^2 < p < (m + 1)\, h^2 - 1 \Leftrightarrow m < \frac{p}{h^2} < m + 1 - \frac{1}{h^2},$$

sčítame a získame

$$m + n < p < n + m + 1,$$

čo je spor. Dôkaz lemy 1 je ukončený.

Dôkaz lemy 2 sa skladá tiež z 2 častí:

A. $p - [h(q - p)] > 0$. Podľa predpokladu je $q < [h^2 n] < h[hn] = hp \Rightarrow hq < h^2 p = (h + 1)\, p \Rightarrow h(q - p) < p \Rightarrow [h(q - p)] < p$.

B. $q - t = [h^2(q - p)]$ t. j. $q - p + [h(q - p)] = [h^2(q - p)]$.

Posledná rovnosť je dôsledok rovností $\forall n \in N$: $n + [hn] = [h^2 n]$, ktorá je vlastne novou formou rovnosti (i). O čísle h vieme, že $h^2 = h + 1$. Potom $[h^2 n] = [(h + 1)\, n] = [hn + n] = [hn] + n$.

Dôkaz lemy 3 už vlastne vyplýva z predchádzajúcich dôkazov. Je zrejmé, že ak (p,q_1) a (p,q_2) sú obidve súčasne kritické, tak nutne $q_1 = q_2$. Z lemy 1 vyplýva podobná vlastnosť aj pre dvojice (p_1,q) a (p_2,q). Ostáva nám ešte ukázať, že ak (p,q) je kritická pozícia a $t > 0$ prirodzené, tak $(p - t, q - t)$ nie je kritická pozícia. Predpokladajme, že obidve dvojice sú kritické. Potom existujú n, $m \in N$ také, že $p = [nh]$, $q = [nh] + n$, $p - t = [mh]$, $q - t = [mh] + m$. Rozdiel prvých dvoch rovností je $q - p = n$ a rozdiel druhých dvoch rovností je $q - p = m$, čo znamená, že $n = m$, t. j. $t = 0$, a to je spor.