Kapitola IV.

POUŽITÍ SYMETRICKÝCH FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

IV.1. Příklad. Dejme tomu, že máme najít čísla x a y, která vyhovují této soustavě dvou rovnic o dvou neznámých:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = 5,$$
$$x^3 + y^3 = 9.$$

Podíváme-li se na soustavu (1) pozorněji, snadno se nám podaří jedno řešení „uhádnout“: je to dvojice

$$(2) \qquad x = 1, \qquad y = 2,$$

a vzhledem k symetrii výrazů na levých stranách soustavy rovnic (1) bude řešením i dvojice

$$(3) \qquad x = 2, \qquad y = 1.$$

Jsou to však všechna řešení soustavy (1)? A jak by tomu bylo, kdyby na pravých stranách v (1) stála jiná čísla, např. π místo 5 a log 2 místo 9? Pak by to asi s „hádáním“ bylo těžší, a tak budeme muset soustavu (1) podrobit poněkud systematičtějšímu zkoumání.

Vyzkoušíme tedy *metodu eliminační:* pokusíme se vyloučit jednu neznámou. Z prvé rovnice máme $x^2 = 5 - y^2$, z druhé $x^3 = 9 - y^3$, a tedy

$$x^6 = (5 - y^2)^3 = 125 - 75y^2 + 15y^4 - y^6,$$
$$x^6 = (9 - y^3)^2 = 81 - 18y^3 + y^6.$$

Protože $x^6 = x^6$, dostáváme odtud rovnici o jedné neznámé y:

$$(4) \qquad 2y^6 - 15y^4 - 18y^3 + 75y^2 - 44 = 0.$$

To je ovšem rovnice 6. stupně, a tu neumíme řešit.

Pokusme se tedy využít symetrie levých stran v (1) a našich poznatků z kapitoly I. Na levé straně v (1) jsou výrazy s_2 a s_3, a podle tabulky I.1 můžeme proto soustavu (1) zapsat takto:

$$(5) \qquad \begin{aligned} e_1^2 - 2e_2 &= 5, \\ e_1^3 - 3e_1e_2 &= 9. \end{aligned}$$

To je opět soustava dvou rovnic, tentokrát ovšem o neznámých e_1, e_2. [Připomeňme, že

$$(6) \qquad e_1 = x + y, \qquad e_2 = xy.]$$

Řešme soustavu (5): Z první rovnice máme

$$(7) \qquad e_2 = \frac{1}{2}(e_1^2 - 5);$$

dosadíme-li za e_2 do druhé rovnice v (5), dostaneme po úpravě kubickou rovnici pro e_1:

$$(8) \qquad e_1^3 - 15e_1 + 18 = 0.$$

Ani takovou rovnici není snadné řešit, zde si však pomůžeme vzorci (2) či (3): využijeme-li tam uvedených hodnot x a y, zjistíme, že jim odpovídá hodnota $e_1 = 3$, a to je skutečně řešení rovnice (8). Protože

$$e_1^3 - 15e_1 + 18 = (e_1 - 3)(e_1^2 + 3e_1 - 6),$$

redukuje se řešení kubické rovnice (8) na řešení kvadratické rovnice

$$e_1^2 + 3e_1 - 6 = 0,$$

která má kořeny

$$e_1 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{33}) \text{ a } e_1 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{33}).$$

Vypočítáme-li ještě odpovídající e_2 podle vzorce (7), zjistíme, že soustava (5) má tři řešení, uvedená v následující tabulce:

e_1	3	$\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{33})$	$\frac{1}{2}(-3 - \sqrt{33})$
e_2	2	$\frac{1}{4}(11 - 3\sqrt{33})$	$\frac{1}{4}(11 + 3\sqrt{33})$

Tab. IV.1

My však potřebujeme najít řešení soustavy (1). Vrátíme se proto ke vzorcům (6): Jak víme z kapitoly I, jsou x a y kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - e_1 t + e_2 = 0.$$

Utvoříme proto pro každou dvojici e_1, e_2 z tab. IV.1 odpovídající rovnici [pro druhou dvojici je to rovnice

$$t^2 - \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{33})\, t + \frac{1}{4}(11 - 3\sqrt{33}) = 0],$$

vyřešíme ji a kořeny t_1, t_2 budou tvořit dvojici x, y řešení soustavy (1). Přitom můžeme vzhledem k symetrii volit

$$x = t_1, \qquad y = t_2$$

nebo

$$x = t_2, \qquad y = t_1.$$

Nakonec tak zjistíme, že soustava (1) má šest řešení: jsou to tři dvojice x, y z tabulky IV.2:

x	2	$\frac{1}{4}\left(-3 + \sqrt{33} + \sqrt{-2 + 6\sqrt{33}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(-3 - \sqrt{33} + i\sqrt{2 + 6\sqrt{33}}\right)$
y	1	$\frac{1}{4}\left(-3 + \sqrt{33} - \sqrt{-2 + 6\sqrt{33}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(-3 - \sqrt{33} - i\sqrt{2 + 6\sqrt{33}}\right)$

Tab. IV.2

a další tři dvojice, které vzniknou z předcházejících záměnou x a y.

Soustava (1) má tedy šest řešení. Zajímají-li nás ovšem jen reálná řešení, musíme poslední dvojici v tab. IV.2 vynechat: soustava (1) pak má čtyři reálná řešení.

Předcházející příklad ukazuje, jak můžeme někdy vyřešit soustavy rovnic, v nichž neznámé vystupují ve tvaru symetrických polynomů. Využíváme přitom poznatků z kapitoly I — především věty I.5 — a dále pak následujícího tvrzení:

IV.2. Věta. *Buďte e_1, e_2 daná čísla. Má-li kvadratická rovnice*

(R) $$t^2 - e_1 t + e_2 = 0$$

řešení t_1, t_2, má soustava rovnic

(S) $$x + y = e_1,$$
$$xy = e_2$$

dvě řešení:

$$x_1 = t_1, \quad y_1 = t_2 \quad a \quad x_2 = t_2, \quad y_2 = t_1.$$

Jsou-li naopak čísla x_0, y_0 *řešení soustavy* (S), *jsou tato čísla i kořeny rovnice* (R).

Důkaz je takřka zřejmý. Jsou-li t_1, t_2 kořeny rovnice (R), platí

$$t_1 + t_2 = e_1, \qquad t_1t_2 = e_2,$$

a jak dvojice $\{t_1, t_2\}$, tak dvojice $\{t_2, t_1\}$ tedy řeší soustavu (S). Tato soustava už žádné jiné řešení nemá: je-li totiž $\{x_0, y_0\}$ řešení soustavy (S), je $x_0 + y_0 = e_1$, $x_0y_0 = e_2$, a tedy

$$t^2 - e_1t + e_2 = t^2 - (x_0 + y_0)\,t + x_0y_0 =$$
$$= (t - x_0)\,(t - y_0),$$

tj. x_0 a y_0 jsou kořeny rovnice (R).

IV.3. Příklady. (a) Řešme soustavu

(9)
$$x + y = 5,$$
$$x^2 - xy + y^2 = 7.$$

Protože $x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$, můžeme soustavu (9) zapsat pomocí vzorců (6) takto:

(10)
$$e_1 = 5,$$
$$e_1^2 - 3e_2 = 7.$$

Tato soustava má řešení $e_1 = 5$, $e_2 = 6$, a řešení výchozí soustavy (9) bude tedy podle věty IV.2 tvořeno kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

A tak řešeními soustavy (9) jsou dvojice

$$\{3, 2\} \quad \text{a} \quad \{2, 3\}.$$

(b) Řešme soustavu

$$(11) \qquad \begin{aligned} x + y &= 1, \\ x^2 + y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Použijeme-li formule (5) z kap. I, můžeme soustavu (11) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ e_1^2 - 2e_2 &= 0, \end{aligned}$$

a máme tedy $e_1 = 1$, $e_2 = \frac{1}{2}$. Utvoříme kvadratickou rovnici

$$t^2 - t + \frac{1}{2} = 0$$

a zjistíme, že řešeními soustavy (11) jsou dvojice

$$\left\{\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}), \ \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i})\right\} \quad \text{a} \quad \left\{\frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}), \ \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})\right\}.$$

(c) Řešme soustavu

$$(12) \qquad \begin{aligned} x^3 + y^3 &= 7(x + y), \\ x^3 - y^3 &= 19(x - y). \end{aligned}$$

Je-li $x = -y$, je první rovnice splněna identicky a druhá má tvar

$$2x^3 = 38x.$$

Tato rovnice má řešení $x = 0$, $x = \sqrt{19}$, $x = -\sqrt{19}$, a dostáváme tak tři řešení soustavy (12):

$$(13) \qquad \{0, 0\}, \quad \{\sqrt{19}, \ -\sqrt{19}\}, \quad \{-\sqrt{19}, \ \sqrt{19}\}.$$

Je-li $x = y$, je druhá rovnice v (12) splněna identicky a první má tvar

$$2x^3 = 14x.$$

Tato rovnice má řešení $x = 0$, $x = \sqrt{7}$ a $x = -\sqrt{7}$, a dostáváme tak další dvě řešení soustavy (12):

$$(14) \qquad \{\sqrt{7}, \sqrt{7}\} \quad \text{a} \quad \{-\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}.$$

Je-li $x \neq y$ i $x \neq -y$, můžeme rovnice soustavy (12) zjednodušit vydělením $(x + y)$, resp. $(x - y)$. Dostaneme pak soustavu

$$x^2 - xy + y^2 = 7,$$

$$x^2 + xy + y^2 = 19,$$

kterou můžeme zapsat pomocí vzorců (6) takto:

$$(15) \qquad e_1^2 - 3e_2 = 7,$$

$$e_1^2 - e_2 = 19.$$

Odtud zjistíme, že $e_2 = 6$ a $e_1^2 = 25$, takže řešeními soustavy (15) jsou dvě dvojice

$$\{5, 6\} \quad \text{a} \quad \{-5, 6\}.$$

Utvoříme-li k těmto dvojicím kvadratické rovnice

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \quad \text{a} \quad t^2 + 5t + 6 = 0,$$

najdeme pomocí kořenů těchto rovnic další čtyři řešení soustavy (12):

$$(16) \qquad \{3, 2\} \ \text{a} \ \{2, 3\}, \quad \{-2, -3\} \ \text{a} \ \{-3, -2\}.$$

Soustava (12) má tedy celkem devět řešení, uvedených ve vzorcích (13), (14) a (16).

IV.4. Úlohy. (a) Řešte soustavu

$$x + y = 7, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}.$$

[{3, 4} a {4, 3}].

(b) Řešte soustavu

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18, \quad x + y = 12.$$

[{4, 8} a {8, 4}].

(c) Řešte soustavu

$$x + y = 4, \quad x^4 + y^4 = 82.$$

[{1, 3}, {3, 1}, {2 + 5i, 2 — 5i}, {2 — 5i, 2 + 5i}].

(d) Řešte soustavu

$$x + y = a, \quad x^7 + y^7 = a^7 \quad (a \text{ reálné}).$$

[Pro $a \neq 0$: $\{a, 0\}$, $\{0, a\}$, $\left\{\frac{a}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}), \frac{a}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\right\}$ a $\left\{\frac{a}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}), \frac{a}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\right\}$; pro $a = 0$: libovolná dvojice čísel x, y takových, že $x + y = 0$.]

(e) Řešte soustavu

$$x + y - z = 7, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 37,$$
$$x^3 + y^3 - z^3 = 1.$$

[*Návod.* Použijte opět vzorců (6) a vylučte z. Zjistíte, že $e_1 = 19$, $e_2 = 90$ a $z = 12$, a odtud dostanete řešení {9, 10, 12}, {10, 9, 12}.]

Další úlohy si zainteresovaný čtenář jistě snadno sestaví sám, a tak si raději ukážeme další možnosti využití poznatků z kap. I. Pozorný čtenář si jistě všiml, že polynom vystupující v druhé rovnici soustavy z příkladu IV.3(c) nebyl symetrický, a že jsme k soustavě v symetrickém tvaru dospěli jistými úpravami. Uvedeme nyní několik úprav, které umožňují řešit i „nesymetrické“ soustavy či jiné, komplikovanější rovnice.

IV.5. Příklady. (a) Řešme soustavu

$$u^2 + v = 5, \qquad u^6 + v^3 = 65. \tag{17}$$

Výrazy na levých stranách nejsou symetrické; použijeme-li však substituce

$$u^2 = x, \qquad v = y, \tag{18}$$

bude mít soustava (17) tvar

$$x + y = 5,$$
$$x^3 + y^3 = 65,$$

a tuto soustavu umíme řešit: zjistíme, že má řešení $\{4, 1\}$ a $\{1, 4\}$. Nyní se pomocí vztahů (18) vrátíme k původním proměnným u, v a zjistíme, že soustava (17) má čtyři řešení

$$\{2, 1\}, \quad \{-2, 1\}, \quad \{1, 4\} \quad \text{a} \quad \{-1, 4\}.$$

(b) Řešme soustavu

$$4u^2 + 9v^2 = 5, \qquad 8u^3 - 27v^3 = 9. \tag{19}$$

Také zde nejsou výrazy na levých stranách symetrické v proměnných u a v; použijeme-li však substituce

$$2u = x, \qquad -3v = y,$$

dostaneme ze soustavy (19) soustavu (1). A tak najdeme řešení $\{u, v\}$ soustavy (19) z řešení $\{x, y\}$ soustavy (1) pomocí vzorců

$$u = \frac{1}{2}x, \qquad v = -\frac{1}{3}y$$

(dvojice $\{x, y\}$ najdeme v tab. IV.2).

(c) Řešme v oboru nezáporných čísel soustavu

$$(20) \qquad 6(\sqrt{u} + \sqrt{v}) - 5\sqrt{uv} = 0, \quad u + v = 13.$$

Zde je v první rovnici na levé straně sice symetrická funkce, ale není to symetrický polynom, a proto nelze užít věty I.5. Ale pomocí substituce

$$(21) \qquad x = \sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}$$

přejde soustava (20) v soustavu

$$6(x + y) - 5xy = 0, \quad x^2 + y^2 = 13,$$

čili

$$6e_1 - 5e_2 = 0, \quad e_1^2 - 2e_2 = 13.$$

Odtud máme

$$e_1 = 5, \quad e_2 = 6 \quad \text{a} \quad e_1 = -\frac{13}{5}, \quad e_2 = -\frac{78}{25}.$$

Druhá možnost však nepřichází v úvahu, neboť z (21) plyne, že x i y musí být nezáporná čísla; z první dvojice $\{e_1, e_2\}$ dostáváme

$$x = 2, \quad y = 3 \quad \text{a} \quad x = 3, y = 2$$

a z (21) plyne, že soustavu (20) řeší dvojice

$$\{4, 9\} \quad \text{a} \quad \{9, 4\}.$$

Některé úlohy lze vhodným obratem převést na soustavy, jaké jsme zatím řešili:

IV.6. Příklady. (a) Řešme rovnici

$$(z^2 + 1)^7 - (z^2 - 1)^7 = 128. \tag{22}$$

Provedeme-li naznačené umocnění, dostaneme rovnici 12. stupně, a to není nic příjemného. Jestliže však položíme

$$z^2 + 1 = x, \quad -(z^2 - 1) = y,$$

bude

$$x + y = 2$$

a rovnici (22) můžeme zapsat takto:

$$x^7 + y^7 = 128.$$

Tím jsme však rovnici (22) převedli na úlohu IV.4(d) s $a = 2$ ($128 = 2^7$), a podle této úlohy máme pro x čtyři možnosti:

$$x = 2, \quad x = 0, \quad x = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{a} \quad x = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Řešení rovnice (22) pak určíme z kvadratické rovnice

$$z^2 = x - 1,$$

tj. rovnici (22) řeší tyto hodnoty:

$$1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}, (1 + \mathrm{i})\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, (1 - \mathrm{i})\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$(-1 + \mathrm{i})\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, (-1 - \mathrm{i})\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

(b) Řešme v R rovnici

$$\sqrt[4]{41 + z} + \sqrt[4]{41 - z} = 2. \tag{23}$$

Položíme-li

$$x = \sqrt[4]{41 + z}, \quad y = \sqrt[4]{41 - z}, \tag{24}$$

dostaneme soustavu

$$x^4 + y^4 = 82,$$
$$x + y = 2$$

a ta má tato reálná řešení:

$$\{3, -1\} \quad \text{a} \quad \{-1, 3\}$$

(zbývající řešení jsou komplexní, ověřte!). Z (24) však plyne, že čísla x i y musí být nezáporná, a tak nemá rovnice (23) v R žádné řešení.

(c) Řešme v R rovnici

$$\sqrt[3]{10 - z} - \sqrt[3]{3 - z} = 1. \tag{25}$$

Položíme

$$x = \sqrt[3]{10 - z}, \qquad y = -\sqrt[3]{3 - z}$$

a dostaneme soustavu

$$x + y = 1,$$
$$x^3 + y^3 = 7.$$

Tu dovedeme řešit: jejími řešeními jsou dvojice

$$\{2, -1\} \quad \text{a} \quad \{-1, 2\},$$

a protože $z = 10 - x^3$, zjistíme, že rovnici (25) řeší hodnoty $z = 2$ a $z = 11$.

(d) Řešme v $\langle 0, 2\pi)$ rovnici

$$\sin^3 z + \cos^3 z = 1 . \tag{26}$$

Zde využijeme známého vztahu $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Položíme-li

$$x = \cos z , \qquad y = \sin z ,$$

dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 , \\ x^3 + y^3 &= 1 ; \end{aligned}$$

ta má reálná řešení $\{0, 1\}$ a $\{1, 0\}$ a dále ještě komplexní řešení, která nebudeme uvažovat (zajímají nás hodnoty z z intervalu $\langle 0, 2\pi)$). Dostali jsme tedy pro z rovnice

$$\cos z = 0 , \qquad \sin z = 1$$

nebo

$$\cos z = 1 , \qquad \sin z = 0 ,$$

jimž vyhovují v $\langle 0, 2\pi)$ jen hodnoty

$$z = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad z = 0 .$$

Protože věty I.5 a IV.2 ukazují na úzkou souvislost mezi symetrickými funkcemi, výrazy e_1 a e_2 a kořeny kvadratické rovnice (R), lze očekávat, že této souvislosti bude možno užít v různých příkladech majících nějaký vztah ke kvadratickým rovnicím a jejich kořenům. Uvedeme nejprve dva typické příklady a pak jedno takřka zřejmé tvrzení.

IV.7. Příklady. (a) Sestavme kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou osmé mocniny kořenů kvadratické rovnice

$$(27) \qquad t^2 - t + 7 = 0 .$$

Nechť má hledaná kvadratická rovnice tvar

$$(28) \qquad t^2 + pt + q = 0 ;$$

máme tedy určit koeficienty p, q. Mohli bychom postupovat mechanicky: určit kořeny x, y rovnice (27) $\left[\text{je } x = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\, 3\sqrt{3}),\ y = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\, 3\sqrt{3})\right]$, vypočítat x^8 a y^8 a položit pak

$$p = -(x^8 + y^8), \qquad q = x^8 . y^8 .$$

My však x a y vůbec počítat nemusíme: použijeme-li toho, že $x + y = e_1 = 1$, $x . y = e_2 = 7$, a tabulky I.1, zjistíme, že

$$q = (xy)^8 = e_2^8 = 7^8 = 5\,764\,801 ,$$

$$p = -(x^8 + y^8) = -s_8 = -(e_1^8 - 8e_1^6e_2 + \\ + 20e_1^4e_2^2 - 16e_1^2e_2^3 + 2e_2^4) = -239 ,$$

takže hledaná rovnice má tvar

$$t^2 - 239t + 5\,764\,801 = 0 .$$

(b) Sestavme kvadratickou rovnici, víme-li, že pro její kořeny x, y platí

$$(29) \qquad x^3 + y^3 = 0 , \quad x^2 + xy + y^2 = 6 .$$

Opět bychom mohli spočítat dvojice x, y, které soustavu (29) řeší; my však víme, že kvadratická rovnice už je určena čísly $e_1 = x + y$ a $e_2 = xy$; metodou, kterou jsme používali na začátku této kapitoly, zjistíme, že existují tři dvojice $\{e_1, e_2\}$: $\{0, -6\}$, $\{3, 3\}$ a $\{-3, 3\}$, takže naši úlohu řeší *tři* kvadratické rovnice:

$$t^2 - 6 = 0, \quad t^2 - 3t + 3 = 0,$$
$$t^2 + 3t + 3 = 0.$$

[Čtenář si jistě uvědomil, že úlohy tohoto typu jsme průběžně řešili v příkladech IV.3 i v úlohách IV.4; neformulovali jsme je ovšem tak explicitně jako v předcházejících příkladech, protože konečným cílem bylo nalezení kořenů a sestavení kvadratické rovnice bylo jen jednou etapou.]

IV.8. Věta. *Buďte e_1, e_2 daná reálná čísla. K tomu, aby řešení x, y soustavy*

$$\text{(S)} \qquad x + y = e_1, \quad xy = e_2$$

byla reálná čísla, je nutné a stačí, aby platilo

$$\text{(30)} \qquad e_1^2 - 4e_2 \geqq 0.$$

K tomu, aby čísla x a y byla nezáporná, je nutné a stačí, aby vedle (30) *platilo ještě*

$$e_1 \geqq 0, \qquad e_2 \geqq 0.$$

Důkaz plyne z věty IV.2. Podle ní jsou čísla x, y kořeny kvadratické rovnice $t^2 - e_1t + e_2 = 0$, a tedy je

$$x = \frac{e_1 + \sqrt{e_1^2 - 4e_2}}{2}, \qquad y = \frac{e_1 - \sqrt{e_1^2 - 4e_2}}{2}.$$

Tato čísla x a y budou reálná tehdy a jen tehdy, bude-li diskriminant $e_1^2 - 4e_2$ nezáporný, a to je nerovnost (30). — Také druhé tvrzení věty plyne ihned z (S) a z (30): přenecháváme je čtenáři, který může najít inspiraci i v příkladu III.8.

Poslední věty můžeme využít opět k řešení různých úloh. Uvedeme jich několik na ukázku.

IV.9. Příklad. Nechť jsou x, y dvě nezáporná čísla. Jaký je vztah mezi třetí mocninou jejich aritmetického průměru a aritmetickým průměrem jejich třetích mocnin?

Znamená to, že musíme porovnat čísla

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \quad \text{a} \quad \frac{x^3+y^3}{2},$$

tj. čísla $\frac{1}{8}e_1^3$ a $\frac{1}{2}s_3 = \frac{1}{2}(e_1^3 - 3e_1e_2)$. Pro jejich rozdíl platí

$$\frac{1}{8}e_1^3 - \frac{1}{2}e_1^3 + \frac{3}{2}e_1e_2 = -\frac{3}{8}e_1(e_1^2 - 4e_2) \leqq 0,$$

neboť $e_1 \geqq 0$ (čísla x, y jsou nezáporná) a podle (30) je také $e_1^2 - 4e_2 \geqq 0$. Platí tedy

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leqq \frac{x^3+y^3}{2}$$

(viz též [1], str. 94, vzorec (III.40) pro $r = 1$, $s = 3$).

IV.10. Příklad. Jaké maximální hodnoty nabývá funkce

$$F(x, y) = xy(x-y)^2,$$

jestliže reálné proměnné x, y splňují podmínku $x + y = 8$?

Funkční hodnotu $F(x, y)$ můžeme zapsat takto:

$$F(x, y) = e_2(s_2 - 2e_2) = e_2(e_1^2 - 4e_2);$$

zavedeme-li označení

$$(31) \qquad e_1^2 - 4e_2 = t,$$

je především $t \geqq 0$ (podle vzorce (30)) a

$$(32) \qquad e_2 = \frac{1}{4}(e_1^2 - t),$$

takže

$$F(x, y) = \frac{1}{4} t (e_1^2 - t).$$

Využijeme-li ještě toho, že $x + y = e_1 = 8$, máme

$$F(x, y) = \frac{1}{4} t (64 - t) = \frac{1}{4}(-t^2 + 64t) =$$

$$= \frac{1}{4}[-(t - 32)^2 + 1024] = 256 - \frac{1}{4}(t - 32)^2.$$

A odtud už je vidět, že

$$F(x, y) \leqq 256$$

a že své maximální hodnoty — tj. hodnoty 256 — nabude $F(x, y)$ právě tehdy, bude-li $t = 32$.

A zajímá-li nás navíc, pro které hodnoty x, y dosáhne funkce $F(x, y)$ uvedeného maxima, stačí využít vztahu (31) a řešit soustavu

$$e_1^2 - 4e_2 = 32,$$

$$e_1 = 8;$$

zjistíme, že dvojice x, y jsou kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 - 8z + 8 = 0,$$

tj. $F(x, y) = 256$ pro dvojici $x = 4 + 2\sqrt{2}$, $y = 4 - 2\sqrt{2}$ a pro dvojici $x = 4 - 2\sqrt{2}$, $y = 4 + 2\sqrt{2}$.

IV.11. Poznámka. Obrat, který jsme použili v předcházejícím příkladu, totiž zavedení nezáporného čísla t podle (31) a vyjádření e_2 pomocí e_1 a t, viz (32), nebo naopak e_1^2 ve tvaru

$$e_1^2 = 4e_2 + t, \tag{33}$$

se dá u úloh tohoto typu často využít. Uvedeme ještě dvě ukázky.

IV.12. Příklady. (a) Ukážeme, že pro libovolná nezáporná čísla x, y platí

$$x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 \geqq 6x^2y^2. \tag{34}$$

Použijeme-li tabulky I.1 a vzorce (33), bude

$$x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 - 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 2xy(x^2 + $$
$$+ y^2) - 6(xy)^2 = s_4 + 2e_2s_2 - 6e_2^2 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 +$$
$$+ 2e_2^2 + 2e_2(e_1^2 - 2e_2) - 6e_2^2 = e_1^4 - 2e_1^2e_2 - 8e_2^2 =$$
$$= (4e_2 + t)^2 - 2e_2(4e_2 + t) - 8e_2^2 = t^2 + 6e_2t \geqq 0,$$

neboť podle věty IV.8 je $t \geqq 0$ i $e_2 \geqq 0$.

(b) Budiž $a > 0$. Platí-li pro reálná čísla x, y vztah

$$x + y \geqq a, \tag{35}$$

pak je

$$x^2 + y^2 \geqq \frac{1}{2} a^2. \tag{36}$$

Použijeme-li totiž tabulky I.1 a vzorce (32), je

$$x^2 + y^2 = e_1^2 - 2e_2 = e_1^2 - 2\,\frac{1}{4}\,(e_1^2 - t) =$$

$$= \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} t \geqq \frac{1}{2} e_1^2,$$

neboť podle věty IV.8 je $t \geqq 0$. Nerovnost (36) nyní plyne z předchozí nerovnosti a z nerovnosti (35), podle níž je $e_1 \geqq a$.

IV.13. Úlohy. (a) Dokažte, že za předpokladů příkladu IV.12 (b) platí

$$x^4 + y^4 \geqq \frac{1}{8} a^4, \quad x^8 + y^8 \geqq \frac{1}{128} a^8,$$

$$x^{16} + y^{16} \geqq \frac{1}{2^{15}} a^{16} \text{ atd.}$$

(b) Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí

$$x^4 + y^4 \geqq x^3y + xy^3,$$

$$x^6 + y^6 \geqq x^5y + xy^5,$$

$$x^8 + y^8 \geqq x^7y + xy^7,$$

a rozhodněte, zda analogické nerovnosti platí i pro vyšší hodnoty exponentů. (Viz též poznámku IV.14.)

(c) Dokažte, že pro kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$(37) \quad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq n^2.$$

(Viz též poznámku III.11.)

Návod. Dokažte nejprve, že pro kladná čísla x, y platí

$$(38) \qquad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqq 2,$$

a to pomocí věty IV.8; pak proveďte v (37) roznásobení a využijte nerovnosti (38).

IV.14. Poznámka. Předpokládáme, že čtenář si předcházející úlohy vyřeší pomocí věty IV.8, ale řada z výše uvedených nerovností se dá dokázat i jinými metodami, bez použití teorie elementárních symetrických funkcí. Tak třeba nerovnost (37) je v [1] dokázána dvojím způsobem (z toho jednou pomocí Cauchyho nerovnosti); nerovnosti z úlohy IV.13 (b) plynou pro změnu zase z Hölderovy nerovnosti

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \leqq (x_1^p + x_2^p)^{1/p} (y_1^q + y_2^q)^{1/q},$$

kde $p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (viz [1], str. 72): Zvolíme-li totiž $x_1 = x^3$, $x_2 = y^3$, $y_1 = y$, $y_2 = x$, $p = \dfrac{4}{3}$ a $q = 4$, dostaneme první z nerovností v úloze IV.13(b).

Uvedli jsme zatím několik ukázek, jak lze elementárních symetrických funkcí ve dvou proměnných využít k řešení řady úloh. Nejsou tím pochopitelně vyčerpány všechny možnosti jejich použití: lze pomocí nich dokazovat různé identity, upravovat složité algebraické výrazy, řešit speciální algebraické rovnice vyšších řádů i různé speciální rovnice, zkoumat řešitelnost různých soustav rovnic atp. Uvedeme proto spíše namátkou a pro ilustraci několik příkladů, z nichž poslední ukazuje, že i poznámka I.7 o jednoznačnosti polynomu Q, určeného symetrickým polynomem P, má svůj význam.

IV.15. Příklady. (a) Platí tato identita:

$$(x + y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2). \tag{39}$$

Levou stranu lze totiž psát ve tvaru $e_1^5 - s_5 = e_1^5 - (e_1^5 - 5e_1^3e_2 + 5e_1e_2^2) = 5e_1e_2(e_1^2 - e_2)$, a poslední výraz je roven pravé straně v (39).

(b) Zjednodušíme výrazy

$$\frac{(x+y)^5 - x^5 - y^5}{(x+y)^3 - x^3 - y^3} \quad \text{a} \quad \frac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}.$$

První výraz můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{e_1^5 - s_5}{e_1^3 - s_3}$$

a pomocí tabulky I.1 dostaneme, že se rovná

$$\frac{5}{3}(e_1^2 - e_2) = \frac{5}{3}(x^2 + xy + y^2);$$

podobně ukážeme, že druhý výraz je roven

$$\frac{7}{5}(e_1^2 - e_2) = \frac{7}{5}(x^2 + xy + y^2).$$

(c) Najdeme celočíselná řešení rovnice

(40) $$x^3 + y^3 + 1 = 3xy:$$

Rovnici můžeme zapsat takto: $s_3 + 1 = 3e_2$, čili $e_1^3 - 3e_1e_2 + 1 = 3e_2$ čili

$$(e_1 + 1)(e_1^2 - e_1 + 1 - 3e_2) = 0.$$

To tedy znamená, že je buď

$$e_1 + 1 = 0$$

nebo

(41) $$e_1^2 - e_1 + 1 - 3e_2 = 0.$$

První eventualita znamená, že $e_1 = -1$ čili $x + y = -1$, a to dává nekonečně mnoho dvojic řešení rovnice (40), totiž dvojice tvaru

$$\{k, -(k + 1)\}, \quad k \text{ celé}. \tag{42}$$

Vyšetřujme tedy rovnici (41): Podle vzorce (30) je $-e_2 \geqq -\frac{1}{4} e_1^2$, a tedy je

$$e_1^2 - e_1 + 1 - 3e_2 \geqq e_1^2 - e_1 + 1 - \frac{3}{4} e_1^2 =$$
$$= \frac{1}{4} (e_1 - 2)^2.$$

Nutnou podmínkou pro platnost rovnice (41) je tedy platnost vztahu

$$(e_1 - 2)^2 = 0 \text{ čili } e_1 = 2, \text{ čili } x + y = 2,$$

což dává opět nekonečně mnoho dvojic tvaru

$$\{k, 2 - k\}, \qquad k \text{ celé}.$$

Ale dosazením těchto dvojic do (40) nebo do (41) zjistíme, že jedině dvojice $\{1, 1\}$ vyhovuje rovnici (40). Odpověď tedy zní: rovnici (40) řeší celočíselné dvojice

$$x = k, \quad y = -(k + 1), \quad k \text{ celé},$$

a

$$x = 1, \qquad y = 1.$$

Zajímají-li nás jen kladná celočíselná řešení rovnice (40), existuje jediné: $x = y = 1$.

(d) Soustava tří rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x^2 + y^2 &= b, \\ x^3 + y^3 &= c \end{aligned} \tag{43}$$

pro dvě neznámé x, y (a, b, c jsou daná čísla) je přeurčená a nemusí mít vždy řešení. Najdeme tedy podmínky na čísla a, b, c, za nichž je soustava (43) řešitelná v oboru komplexních čísel:

Užijeme-li tabulky I.1, můžeme naši soustavu zapsat takto

$$e_1 = a\,, \quad e_1^2 - 2e_2 = b\,, \quad e_1^3 - 3e_1e_2 = c\,.$$

Je tedy $e_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b)$ a z třetí rovnice dostaneme hledaný vztah mezi čísly a, b, c: musí být

$$a^3 - 3ab + 2c = 0\,.$$

(e) Rovnice

$$t^8 + 4t^6 - 10t^4 + 4t^2 + 1 = 0 \tag{44}$$

je rovnice osmého stupně, a ty neumíme obecně řešit. Naše rovnice je však v jistém smyslu *symetrická:* má stejné koeficienty u t^8 i t^0 (totiž 1), u t^7 i t^1 (totiž 0), u t^6 i t^2 (totiž 4) a u t^5 i t^3 (totiž 0). Můžeme proto provést jistý obrat hodící se i na rovnice vyšších (ovšem sudých) stupňů, které mají obdobnou vlastnost symetrie koeficientů: vytkneme t^4 a máme

$$t^4\left(t^4 + 4t^2 - 10 + \frac{4}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) = 0$$

čili

$$t^4\left[\left(t^4 + \frac{1}{t^4}\right) + 4\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 10\right] = 0 \tag{45}$$

(snadno se přesvědčíme, že $t = 0$ není kořenem naší výchozí rovnice). Označme nyní $t = x$, $\frac{1}{t} = y$. Pak je

$$e_1 = t + \frac{1}{t}, \quad e_2 = 1$$

a z tabulky I.1 máme

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = e_1^2 - 2, \quad t^3 + \frac{1}{t^3} = e_1^3 - 3e_1,$$

$$t^4 + \frac{1}{t^4} = e_1^4 - 4e_1^2 + 2$$

atd. Speciálně dostáváme z (45) rovnici čtvrtého stupně o neznámé e_1 [tedy rovnici polovičního stupně, než byla původní rovnice (44)]:

$$t^4[e_1^4 - 4e_1^2 + 2 + 4(e_1^2 - 2) - 10] = 0$$

čili

$$t^4[e_1^4 - 16] = 0.$$

Její kořeny dovedeme najít:

$$e_1 = 2, \; e_1 = -2, \; e_1 = 2i, \; e_1 = -2i.$$

Zbývá tedy vyřešit čtyři kvadratické rovnice

$$t + \frac{1}{t} = e_1,$$

z nichž najdeme osm kořenů rovnice (44):
1, —1 (oba dvojnásobné), $i(1 + \sqrt{2})$, $i(1 - \sqrt{2})$, $i(-1 + \sqrt{2})$, $i(-1) - \sqrt{2})$.

(f) Rovnice

$$(46) \qquad 10t^6 + t^5 - 47t^4 - 47t^3 + t^2 + 10t = 0$$

nemá vlastnost symetrie (tj. stejné koeficienty u t^6 i t^0, t^5 i t^1 atd.), ale dá se zapsat ve tvaru

$$t(10t^5 + t^4 - 47t^3 - 47t^2 + t + 10) = 0,$$

z čehož je patrný již jeden kořen rovnice (46): $t = 0$. Zbývá tedy vyřešit rovnici

$$(47) \qquad 10t^5 + t^4 - 47t^3 - 47t^2 + t + 10 = 0,$$

která vlastnost symetrie (tj. stejný koeficient 10 u t^5 i t^0, stejný koeficient 1 u t^4 i t^1 a stejný koeficient -47 u t^3 i t^2) už má. Rovnice (47) je lichého stupně, a snadno se přesvědčíme, že každá rovnice lichého stupně s uvedenou vlastností symetrie má kořen $t = -1$. Můžeme tedy psát (47) takto:

$$10t^5 + t^4 - 47t^3 - 47t^2 + t + 10 =$$
$$= (t + 1)(10t^4 - 9t^3 - 38t^2 - 9t + 10) = 0,$$

a zbývá řešit rovnici čtvrtého stupně

$$10t^4 - 9t^3 - 38t^2 - 9t + 10 = 0.$$

Ta je opět symetrická a má sudý stupeň, proto můžeme postupovat jako v příkladu (e): zapíšeme ji ve tvaru

$$t^2\left[10\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 38\right] = 0$$

čili

$$t^2[10(e_1^2 - 2) - 9e_1 - 38] = 0,$$

čili

$$t^2[10e_1^2 - 9e_1 - 58] = 0.$$

Kvadratická rovnice v hranatých závorkách má kořeny $e_1 = -2$, $e_1 = \dfrac{29}{10}$, takže zbývá řešit dvě kvadratické rovnice

$$t + \frac{1}{t} = -2, \qquad t + \frac{1}{t} = \frac{29}{10}.$$

Nakonec zjistíme, že původní rovnice (46) má tyto kořeny: 0, —1 (trojnásobný), $\frac{5}{2}$ a $\frac{2}{5}$.

IV.16. Příklad. Dokážeme toto tvrzení: *Platí-li pro čísla x, y, u, v vztahy*

$$x + y = u + v,\qquad x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \tag{48}$$

pak platí pro každé přirozené číslo n vztah

$$x^n + y^n = u^n + v^n. \tag{49}$$

Označme

$$e_1 = x + y,\ e_2 = xy,\ e_1^* = u + v,\ e_2^* = uv.$$

Ze vztahů (48) vyplývá, že $e_1 = e_1^*$ a $e_1^2 - 2e_2 = e_1^{*2} - 2e_2^*$, čili také $e_2 = e_2^*$.

Je-li nyní $P(x, y)$ libovolný symetrický polynom v proměnných x, y, existuje podle poznámky I.7 jednoznačně určený polynom Q takový, že $P(x, y) = Q(e_1, e_2)$. Protože polynom Q je určen jednoznačně, je $P(u, v) = Q(e_1^*, e_2^*)$; ale $e_1^* = e_1$ a $e_2^* = e_2$, a tedy je $Q(e_1^*, e_2^*) = Q(e_1, e_2)$ čili

$$P(x, y) = P(u, v) \tag{50}$$

pro každý symetrický polynom P, a speciálně tedy pro symetrický polynom $P(x, y) = x^n + y^n$.

IV.17. Poznámka. Předcházející tvrzení jsme ovšem mohli dokázat i bez použití poznámky I.7: Při označení z příkladu IV.16 plyne z (48), že

$$e_1 = e_1^* \quad \text{a} \quad e_2 = e_2^*.$$

To však znamená, že jak dvojice $\{x, y\}$, tak dvojice $\{u, v\}$ je řešením též e kvadratické rovnice

$$t^2 - e_1t + e_2 = 0 \quad \text{čili} \quad t^2 - e_1^*t + e_2^* = 0\,.$$

Proto je buď $\{x, y\} = \{u, v\}$, nebo $\{x, y\} = \{v, u\}$ a ze symetrie polynomu P už plyne vztah (50).