Kapitola I.

SYMETRICKÉ FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Uvažujme kvadratickou rovnici

$$t^2 + at + b = 0 \tag{1}$$

o neznámé $t \in R$ a označme x, y *kořeny* této rovnice. Mezi kořeny x, y a koeficienty a, b rovnice (1) platí známé Viètovy vztahy

$$a = -(x + y), \qquad b = xy, \tag{2}$$

jež jsou důsledkem formule pro rozklad kvadratického trojčlenu na kořenové činitele:

$$t^2 + at + b = (t - x)(t - y).$$

Vztahy (2) vlastně říkají, že *koeficienty rovnice* (1) *jsou funkcemi kořenů této rovnice.* Nejsou to ovšem funkce jen tak ledajaké, mají — jak ihned uvidíme — jednu důležitou vlastnost. Zapišme tyto funkce trochu jinak: místo a pišme $-e_1$ a místo b pišme e_2; pak mají vzorce (2) tvar

$$e_1 = x + y, \qquad e_2 = xy. \tag{3}$$

Funkce e_1 a e_2 se nezmění, zaměníme-li *pořadí* proměnných:

$$e_1(x, y) = x + y = y + x = e_1(y, x),$$
$$e_2(x, y) = xy = yx = e_2(y, x).$$

Jsou příkladem *symetrických funkcí dvou proměnných*, tj. funkcí f proměnných x, y, u nichž nezáleží na pořadí proměnných:

$$f(x, y) = f(y, x) \quad \text{pro každé} \quad x, y \in R.$$

Je ihned vidět, že stejnou vlastnost symetrie — tj. nezávislosti na pořadí proměnných x a y — mají výrazy

$$x^2 + y^2, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad (x - 1)^3 + (y - 1)^3,$$

$$\sin 2xy, \quad e^{x+y}, \quad a^x + a^y,$$

a čtenář si jistě podobných výrazů (funkcí proměnných x a y) sestrojí ještě celou řadu. Je ovšem také ihned vidět, že mnoho funkcí tuto vlastnost symetrie nemá — např. funkce

$$x - y, \quad \frac{x}{y}, \quad \frac{1}{2}(x^2 - y^2),$$

$$(x - 1)^3 + (y + 1)^3, \quad x^3 - 7xy \quad \text{atp.}$$

V dalším si všimneme podrobněji speciálních symetrických funkcí — tzv. symetrických polynomů.

I.1. Definice. Polynom $P(x, y)$ proměnných x, y (tj. funkci, která je součtem funkcí tvaru ax^ky^l, kde a je reálné číslo, k a l jsou celá nezáporná čísla) nazveme *symetrickým polynomem*, platí-li pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$P(x, y) = P(y, x). \tag{4}$$

I.2. Příklady. (a) Funkce $x + y$, xy, $x^2 + y^2$, $x^7 + 6x^3y^3 + y^7$, $(x - 1)^3 + (y - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1$ jsou symetrické polynomy.

(b) Funkce $\frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $(x - 1)^3 + (y + 1)^3 = x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3x + 3y$, $x^3 - 7xy$ jsou sice polynomy, nejsou to však symetrické polynomy. [Dokažte to tím, že naleznete takovou dvojici čísel, x_0, y_0, že pro příslušný polynom $P(x, y)$ je $P(x_0, y_0) \neq P(y_0, x_0)$.]

Funkce e_1 a e_2 z formule (3) jsou symetrickými polynomy. Nazýváme je *elementárními symetrickými funkcemi* a hned uvidíme proč.

I.3. Příklady. (a) $x^2 + y^2$ je symetrický polynom. Dá se přitom vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = (x + y)^2 - 2xy = e_1^2 - 2e_2. \tag{5}$$

(b) Totéž platí pro symetrický polynom $x^3 + y^3$:

$$x^3 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = e_1^3 - 3e_2e_1. \tag{6}$$

(c) Totéž platí pro symetrický polynom $x^4 + y^4$:

$$x^4 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2;$$

použijeme-li nyní vzorce (5), je

$$x^4 + y^4 = (e_1^2 - 2e_2)^2 - 2e_2^2 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 4e_2^2 - 2e_2^2 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2. \tag{7}$$

(d) Totéž platí pro symetrické polynomy $x^5y + xy^5$ a $x^3y^7 + x^7y^3$: použijeme-li formule (7), je

$$x^5y + xy^5 = xy(x^4 + y^4) = e_2(e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2)$$

a

$$x^3y^7 + x^7y^3 = x^3y^3(x^4 + y^4) = e_2^3(e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2).$$

I.4. Úloha. Označme pro přirozené číslo n

$$s_n = x^n + y^n. \tag{8}$$

Vyjádřete symetrické polynomy s_5, s_6, s_7, s_8, s_9 a s_{10} pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2.

Návod. Lze postupovat podobně jako v příkladu I.3 a vypočítat přímo s_5, pak s_6 atd. Lze však využít též *rekurentní formule*

$$s_n = e_1s_{n-1} - e_2s_{n-2}, \tag{9}$$

kterou čtenář jistě snadno dokáže.

Existuje však také přímé vyjádření symetrického polynomu s_n pomocí e_1, e_2, tzv. *Waringova formule:*

$$\frac{1}{n}(x^n + y^n) = \frac{1}{n}e_1^n - \frac{(n-2)!}{1!(n-2)!}e_1^{n-2}e_2 + \frac{(n-3)!}{2!(n-4)!}e_1^{n-4}e_2^2 - \frac{(n-4)!}{3!(n-6)!}e_1^{n-6}e_2^3 + \ldots; \text{*)} \tag{10}$$

sčítají se výrazy tvaru $a_me_1^{n-2m}e_2^m$, kde m se mění od nuly

*) Edward WARING, anglický matematik, žil v letech 1734 až 1798 a formuli (10) dokázal v roce 1779. Zabýval se především teorií čísel a v roce 1770 vyslovil hypotézu (nazvanou pak po něm), že každé přirozené číslo n lze vyjádřit jako součet nejvýše $g(k)$ k-tých mocnin přirozených čísel, přičemž $g(k)$ nezávisí na n (je např. $g(2) = 4$, $g(3) = 9$). Waringovu hypotézu dokázal v roce 1909 David HILBERT.

do největšího celého čísla N takového, že $N \leqq \frac{1}{2} n$, a $a_m = (-1)^m . \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}$ (připomeňme, že $0! = 1$).

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil formuli (10) dokázat matematickou indukcí.

Pro přehlednost si vyjádříme symetrické polynomy $s_n = x^n + y^n$ pro $n = 1, 2, \ldots, 10$ pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2 ve tvaru tabulky:

$$
\begin{aligned}
x + y &= e_1 \\
x^2 + y^2 &= e_1^2 - 2e_2 \\
x^3 + y^3 &= e_1^3 - 3e_1e_2 \\
x^4 + y^4 &= e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2 \\
x^5 + y^5 &= e_1^5 - 5e_1^3e_2 + 5e_1e_2^2 \\
x^6 + y^6 &= e_1^6 - 6e_1^4e_2 + 9e_1^2e_2^2 - 2e_2^3 \\
x^7 + y^7 &= e_1^7 - 7e_1^5e_2 + 14e_1^3e_2^2 - 7e_1e_2^3 \\
x^8 + y^8 &= e_1^8 - 8e_1^6e_2 + 20e_1^4e_2^2 - 16e_1^2e_2^3 + 2e_2^4 \\
x^9 + y^9 &= e_1^9 - 9e_1^7e_2 + 27e_1^5e_2^2 - 30e_1^3e_2^3 + 9e_1e_2^4 \\
x^{10} + y^{10} &= e_1^{10} - 10e_1^8e_2 + 35e_1^6e_2^2 - 50e_1^4e_2^3 + 25e_1^2e_2^4 - 2e_2^5
\end{aligned}
$$

Tab. I.1

Na pravých stranách jsou vesměs výrazy v proměnných e_1, e_2, a to opět polynomy v těchto proměnných; podobně tomu bylo i v příkladu I.3 (d). To tedy znamená, že některé symetrické polynomy $P(x, y)$ lze vyjádřit jako polynomy $Q(e_1, e_2)$ v proměnných e_1, e_2, tj. jako součet funkcí tvaru $ae_1^ke_2^l$, kde a je reálné číslo, k a l jsou celá nezáporná čísla; máme pak

$$P(x, y) = Q(x + y, xy). \tag{11}$$

Vzniká nyní přirozená otázka, zda tuto vlastnost mají jen některé symetrické polynomy, či zda to platí pro všechny. A odpověď dává následující věta:

I.5. Věta. *Každý symetrický polynom v proměnných x, y lze vyjádřit jako polynom v proměnných $e_1 = x + y$, $e_2 = xy$.*

Důkaz je jednoduchý. Každý *symetrický* polynom $P(x, y)$ je tvořen sčítanci tvaru

$$ax^ky^k \quad \text{a} \quad b(x^my^l + x^ly^m), \tag{12}$$

kde a, b jsou reálná čísla, k, l, m jsou nezáporná celá čísla, $l \neq m$. (Obsahuje-li totiž polynom $P(x, y)$ sčítanec bx^my^l, musí — protože je symetrický — nutně obsahovat i sčítanec bx^ly^m.) Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $m > l$. Nyní je

$$ax^ky^k = a(xy)^k = ae_2^k$$

a

$$b(x^my^l + x^ly^m) = bx^ly^l(x^{m-l} + y^{m-l}) = be_2^ls_{m-l}.$$

Protože podle formule (10) lze také s_{m-l} vyjádřit ve tvaru polynomu v e_1, e_2, jsou všechny výrazy tvaru (12) polynomy v e_1, e_2, a tedy také $P(x, y)$ je rovno polynomu $Q(e_1, e_2)$.

I.6. Příklad. Chceme-li symetrický polynom $P(x, y) = x^8 - 12x^6y^5 + x^3y^3 - 3x^2y^2 + 2x^2y^7 + y^8 - 12x^5y^6 + 2x^7y^2$ vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, užijeme postup z důkazu věty I.5: Je

$$P(x, y) = (x^8 + y^8) - 12(x^6y^5 + x^5y^6) + 2(x^2y^7 + x^7y^2) + x^3y^3 - 3x^2y^2 = (x^8 + y^8) -$$

$$- 12x^5y^5(x + y) + 2x^2y^2(x^5 + y^5) + x^3y^3 -$$
$$- 3x^2y^2 = s_8 - 12e_2^5e_1 + 2e_2^2s_5 + e_2^3 - 3e_2^2;$$

vyjádříme-li nyní s_8 a s_5 pomocí tabulky I.1, máme

$$P(x, y) = (e_1^8 - 8e_1^6e_2 + 20e_1^4e_2^2 - 16e_1^2e_2^3 + 2e_4^2) -$$
$$- 12e_2^5e_1 + 2e_2^2(e_1^5 - 5e_1^3e_2 + 5e_1e_2^2) + e_2^3 - 3e_2^2 =$$
$$= e_1^8 - 8e_1^6e_2 + 2e_1^5e_2^2 + 20e_1^4e_2^2 - 10e_1^3e_2^3 -$$
$$- 16e_1^2e_2^3 - 12e_1e_2^5 + 10e_1e_2^4 + 2e_2^4 + e_2^3 - 3e_2^2 =$$
$$= Q(e_1, e_2).$$

I.7. Poznámka. Podle věty I.5. existuje ke každému symetrickému polynomu $P(x, y)$ polynom (obecně *nesymetrický* — viz příklad I.6!) $Q(e_1, e_2)$, takže platí vztah (11). Lze ukázat, že polynom $Q(e_1, e_2)$ je určen *jednoznačně*, tj. že pokud existuje ještě polynom $H(e_1, e_2)$ takový, že

$$P(x, y) = H(x + y, xy),$$

pak jsou polynomy Q a H sobě rovné. Důkaz tohoto tvrzení však provádět nebudeme.