Přímky a křivky

Kapitola 7. Otáčení, kotálení a trajektorie

In: N. B. Vasiljev (author); V. L. Gutenmacher (author); Leo Boček (translator); Alena Šarounová (illustrator): Přímky a křivky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 114–[140].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404058

Kapitola 7

OTÁČENÍ, KOTÁLENÍ A TRAJEKTORIE

V závěrečné kapitole seznámíme čtenáře se zajímavými křivkami, které se definují přirozeným způsobem jako dráhy bodu na kružnici, která se kotálí po jiné kružnici nebo po přímce. Jejich nejzajímavější vlastnosti se týkají tečen. Milovník klasické geometrie pozná souvislost mezi kružnicí devíti bodů trojúhelníku, jeho Simsonovými přímkami a jejich obálkou, kterou je cykloidální křivka s třemi body vratu. Na začátku probereme důkladně jednu z nejjednodušších cykloidálních křivek.

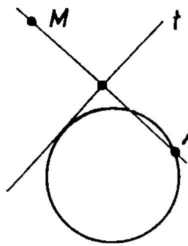
Kardioida. *Kardioida* se obyčejně definuje jako trajektorie bodu kružnice, která se kotálí po pevné kružnici stejného poloměru. Jsou ovšem i jiné definice kardioidy. Dvě z nich uvedeme ve tvaru úloh.

7.1 Dokažte, že kardioida je

a) množinou bodů souměrně sdružených k danému bodu A podle všech tečen pevné kružnice, která prochází bodem A,

b) množinou všech pat kolmic vedených daným bodem A k tečnám kružnice, která prochází bodem A (obr. 85).

□ a) Uvažujme kružnici γ, která se dotýká dané kružnice δ v bodě A a má s ní stejný poloměr. Kotálejme kružnici γ po kružnici δ a studujme trajektorii toho bodu M, který ve výchozí poloze splývá s bodem A. Protože se jedná o kotálení, jsou délky kruhových oblouků AT a MT v každém okamžiku stejně dlouhé (T je proměnný bod dotyku obou kružnic). Odtud plyne, že jsou body M a A souměrně sdružené podle tečny v bodě T. Oběhne-li bod T kružnici δ, opíše bod M celou kardioidu.



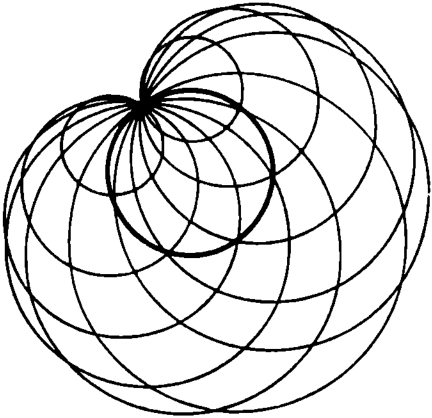
Obr. 85

b) Uvažovanou množinu dostaneme z množiny popsané v části a) pomocí stejnolehlosti s koeficientem 1/2 a středem A. Je to tedy také kardioida, dvakrát menší než kardioida v úloze a). □

Užitím úlohy 7.1 můžeme sestrojit libovolný počet bodů kardioidy a tak ji dost přesně nakreslit. Je to křivka, která má v bodě A singularitu — *bod vratu.* Tvarem je podobná osovému řezu jablkem, o něco méně obrysu srdce, podle něhož dostala název (kardia — srdce).

Z úlohy 7.1 plyne i další způsob vytvoření kardioidy — jako obálky systému kružnic.

7.2 Je dána kružnice a na ní bod A. Dokažte, že sjednocení všech kružnic procházejících bodem A, jejichž střed leží na dané kružnici, je oblast ohraničená kardioidou (obr. 86). ↓



Obr. 86

Dvě otáčení. Dále ukážeme, jak poznat některé vlastnosti křivek pomocí kinematiky (teorie pohybu), a jako příklad nám bude často sloužit kardioida. Dříve se však ještě vraťme k řešení 7.1a. Tam jsme došli k závěru, že bod M proběhne kardioidu, když bod T udělá jednu otáčku. Tím se mínilo, že bod T i střed P pohybující se kružnice γ se jednou otočí. Avšak sama kružnice, nebo lépe řečeno kruh γ se otáčí rychleji. Vyjasněme si to.

7.3 Kružnice γ se kotálí po pevné kružnici téhož poloměru, přičemž střed P kružnice γ vykoná jednu otáčku. Kolikrát se za tutéž dobu otočí kruh γ, kolik vykoná otáček kolem svého středu P?

Zvolme na kruhu γ některý jeho poloměr PM a v rovině pevný bod E. Vezměme takovou úsečku EN, aby se vektory $\overrightarrow{EN}$ a $\overrightarrow{PM}$ sobě rovnaly. Otázku úlohy 7.3 pak můžeme formulovat takto: kolik otáček kolem bodu E vykoná úsečka EN, otočí-li se úsečka OP o 360°? Jaký je poměr úhlových rychlostí obou úseček? Uvažujme dvě polohy pohybujícího se kruhu. Otočí-li se úsečka OP o 90°, otočí se úsečka EN o 180°, a stejně tak to platí pro další úhly, o které se otočí úsečka OP. Otočí-li se o úhel 360°, otočí se úsečka EN o úhel 720°, tedy o dvě plné otáčky. Poměr obou úhlových rychlostí je 2.

Zvolíme-li bod E totožný se středem O pevné kružnice a bod Q tak, aby $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PM}$, dostaneme rovnoběžník $OPMQ$. Při rovnoměrném kotálení kruhu γ po kružnici δ je bod O pevný a úsečky OP a OQ se otáčejí úhlovými rychlostmi ω a 2ω v témže smyslu. Tím dostáváme další možnost vytvoření kardioidy, kterou lze dobře popsat pomocí kloubového rovnoběžníku.

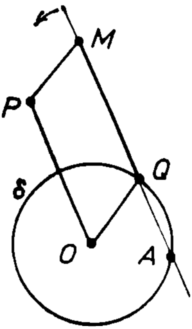
Otáčejí-li se ramena OP a OQ ($|OP| = 2|OQ|$) kolem pevného bodu O v témže smyslu otáčení úhlovými rychlostmi ω a 2ω, je trajektorií čtvrtého vrcholu rovnoběžníku $OPMQ$ kardioida.

Nyní je snadné ukázat ještě jeden způsob konstrukce bodů kardioidy a předvést další její zajímavé vlastnosti.

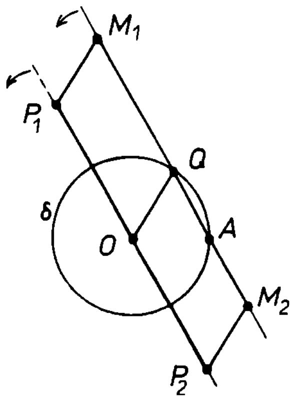
7.4 Naneseme-li na každou přímku l procházející pevným bodem A dané kružnice δ o poloměru r od průsečíku Q přímky l a kružnice δ ($A \neq Q$) úsečku QM délky $2r$, vytvoří takto obdržené body M spolu s bodem A kardioidu (obr. 87).

□ Pro každou polohu přímky l můžeme sestrojit rovnoběžník $OPMQ$, ve kterém splynou body Q a M se stejně označenými body úlohy (O je střed kružnice δ). Bude-li se přímka l otáčet kolem bodu A úhlovou rychlostí ω, budou se ramena OP a OQ rovnoběžníku otáčet úhlovými rychlostmi ω a 2ω, viz tvrzení o prstenci na kružnici v kap. 1. Proto pak opisuje bod M kardioidu. □

Zkuste si na velkém papíře sestrojit kardioidu jednak podle 7.1, jednak podle 7.4, a přesvědčte se, že dostanete stejné křivky. Jednodušší bude asi druhý způsob. Všimněme si, že v úloze 7.4 můžeme nanést od bodu Q úsečku délky $2r$ na obě navzájem opačné polopřímky.



Obr. 87



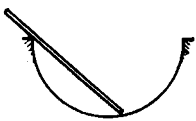
Obr. 88

Tím dostáváme hned dva body M_1, M_2 kardioidy (obr. 88). Odpovídají dvěma polohám kloubového rovnoběžníku $OQMP$. Oběhne-li bod Q jednou kružnici δ, otočí se úsečka QM o 180° a bod M_1 přejde do bodu M_2. To ukazuje další vlastnost kardioidy.

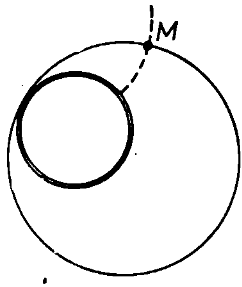
7.5 Dokažte, že každá tětiva kardioidy procházející jejím bodem vratu A má délku $4r$ a její střed leží na pevné kružnici poloměru r.

A ještě dvě úlohy opírající se o druhý způsob konstrukce kardioidy.

7.6 Tyč délky $2r$ se pohybuje ve vertikální rovině tak, že její konec klouže po vnitřní stěně jámy, jejíž vertikální řez má tvar půlkruhu o poloměru r a tyč se opírá o kraj jámy. Dokažte, že se druhý konec tyče pohybuje po kardioidě (obr. 89).



Obr. 89



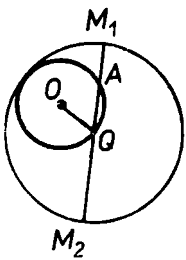
Obr. 90

7.7 Po pevném kruhu poloměru r se kotálí kružnice poloměru $2r$ tak, že kruh leží ve vnitřní oblasti kružnice. Dokažte, že trajektorií bodu kružnice je kardioida (obr. 90).

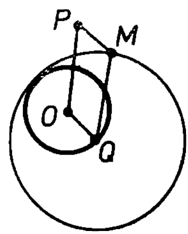
□ Jedno řešení úlohy dostaneme jejím porovnáním s Koperníkovou větou 0.3. Jedná se o pohyb týchž dvou kružnic, jen je vyměněna role pohybující se a nepohybující se kružnice. Koperníkova věta při této záměně rolí tvrdí, že se každý průměr M_1M_2 pohybující se kružnice pohybuje tak, že stále prochází určitým bodem A pevné kružnice. Přitom se střed Q průměru M_1M_2 pohybuje po pevné kružnici a je $|M_1Q| =$

$= |QM_2| = 2r$ (obr. 91). Tím se dostáváme k úloze 7.4 a vidíme, že se body M_1 a M_2 pohybují po téže kardioidě.

Mohli jsme též převést řešení úlohy přímo na kloubový rovnoběžník. Nechť je M bod otáčející se kružnice a Q její pohybující se střed. Sestrojme rovnoběžník $OPMQ$. Otáčí-li se rameno OQ úhlovou rychlostí 2ω, otáčí se pohybující se kružnice a s ní i rameno QM úhlovou rychlostí ω (obr. 92). □



Obr. 91



Obr. 92

Kardioida, se kterou jsme se dost podrobně seznámili, patří do systému křivek, jež se nazývají *konchoidami* kružnice, nebo též *Pascalovými závitnicemi*. Dostaneme je trochu obecnějším postupem, než je postup uvedený v úloze 7.4. Na přímky l procházející daným bodem A pevné kružnice nanášíme od průsečíku Q této kružnice a přímky l úsečky dané délky h (na obě polopřímky od bodu Q). Koncové body těchto úseček vytvoří Pascalovu závitnici. Rovná-li se délka h průměru dané kružnice, jde o kardioidu. Porovnejte tuto definici s definicí Nikomedovy konchoidy, tj. konchoidy přímky. Ukazuje se, že Pascalovu závitnici můžeme při každé hodnotě h definovat kinematicky. To je obsahem dalších úloh.

7.8 a) Dokažte, že vrchol M kloubového rovnoběžníku, jehož kloub O je upevněn a jehož ramena OP a OQ se otáčejí úhlovými rychlostmi 2ω a ω, opisuje Pascalovu závitnici.

b) V rovině je pevně zvolena kružnice poloměru r. Po ní se kotálí jiná kružnice téhož poloměru. Dokažte, že bod na průměru kotálející se kružnice nebo na jeho prodloužení opisuje Pascalovu závitnici.

c) V předcházející úloze nahraďte pohybující se kružnici kružnicí o poloměru $2r$, přičemž pevná kružnice se jí dotýká uvnitř.

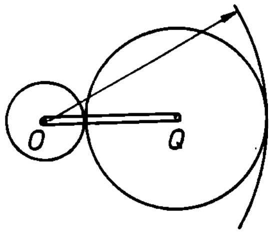
Ukážeme teď několik různých úloh, v nichž poměr úhlových rychlostí dvou otáčení není (jako v případě kardioidy) roven dvěma. Dostaneme tak několik dalších *cykloidálních* křivek.

7.9 Po pevné kružnici poloměru R se vně kotálí kruh o poloměru a) $R/2$, b) $R/3$, c) $2R/3$. Kolikrát se vnější kruh otočí, vykoná-li jeho střed jednu otáčku kolem středu pevné kružnice? ↓

7.10 Řešte tutéž úlohu v případě, kdy se pohybující kruh dotýká pevné kružnice uvnitř.

7.11 Mezi otáčejícím se kroužkem ložiska o průměru 6 mm a jeho pevným pouzdrem o průměru 10 mm jsou kuličky o průměru 2 mm. Předpokládejme, že při otáčení vnitřního kroužku kuličky nekloužou. Jakou úhlovou rychlostí se
a) otáčejí kuličky,
b) se pohybují jejich středy
kolem středu ložiska, otáčí-li se vnitřní kroužek ložiska rychlostí 100 otáček za sekundu?

7.12 Tři ozubená kola otáčející brusičským kamenem jsou spojena podle obrázku. Určete poměr poloměrů pohybujících se kol, má-li se malé kolečko (brus) točit dvanáctkrát rychleji než rameno OQ, které je uvádí v pohyb (obr. 93).



Obr. 93

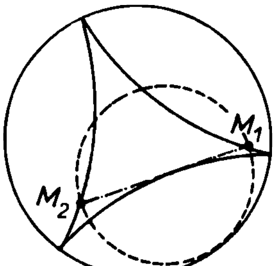
Uvažujme dva body kružnice, která se kotálí po kruhu. Je zřejmé, že opisují kongruentní (shodné) trajektorie. Ve zvláštním případě se dokonce může stát, že obě trajektorie splynou, že se oba body pohybují po téže křivce, jeden za druhým. Například v řešení úlohy 7.7 jsme viděli, že diametrálně protilehlé body vnější kružnice opisovaly stejnou kardioidu. Přesvědčíme se o tom, ukážeme-li, že trajektorie těchto bodů mají bod vratu v témže bodě pevné kružnice. V dalších úlohách můžeme postupovat analogicky.

7.13 a) Dokažte, že diametrálně protilehlé body M_1 a M_2 kružnice o poloměru $2R/3$, která se kotálí po vnitřku pevné kružnice o poloměru R, opisují tutéž křivku. Tato křivka se nazývá *deltoid*, nebo též *Steinerova křivka* (obr. 94). ↓

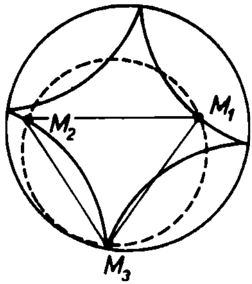
b) Dokažte, že body M_1, M_2 a M_3 na kružnici o poloměru $3R/4$, které tvoří rovnostranný trojúhelník, opisují tutéž křivku *(asteroidu)*, jestliže se kružnice kotálí po vnitřku pevné kružnice o poloměru R (obr. 95).

c) V předcházející úloze nahraďte hodnotu $3R/4$ hodnotou $3R/2$ a předpokládejte, že pohybující se kružnice obklopuje pevnou kružnici. Místo asteroidy dostanete křivku, která se nazývá *nefroida*.

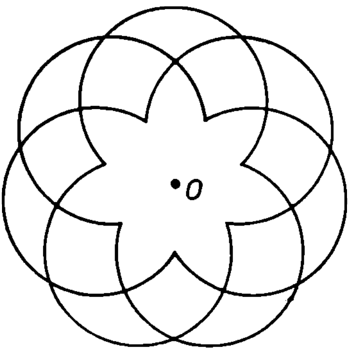
Mějme kloubový rovnoběžník $OPMQ$, kde vrchol O je pevný a ramena OP a OQ se otáčejí kolem O, přičemž



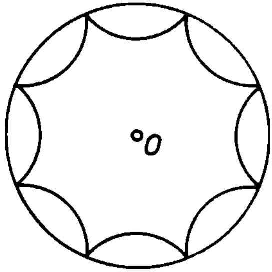
Obr. 94



Obr. 95



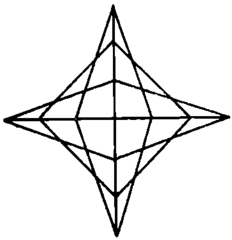
Obr. 96



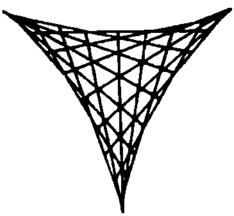
Obr. 97

poměr ω_{OP}/ω_{OQ} jejich úhlových rychlostí je k a poměr $|OP|/|OQ|$ jejich ramen je $1/|k|$ ($k \neq 0, 1, -1$). Potom křivku, kterou opisuje vrchol M, nazveme *k-cykloida*.

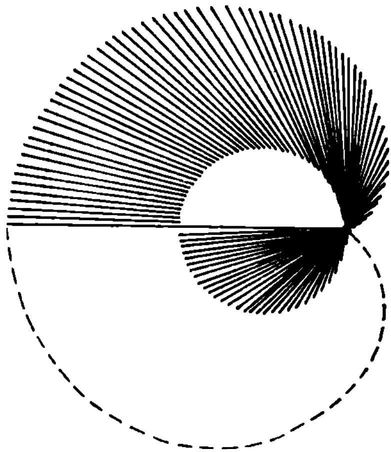
Pohybují-li se dva body P a N rovnoměrně po kružnici tak, že poměr ω_P/ω_N jejich úhlových rychlostí je roven k, je obalovou křivkou přímek PN k-cykloida (viz 7.19).



Obr. 98



Obr. 99



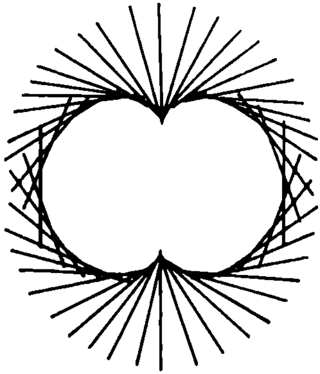
Obr. 100

Křivky k-cykloida a $(1/k)$-cykloida jsou shodné.

Křivku k-cykloidu můžeme definovat také jako trajektorii bodu kružnice, která se kotálí po kružnici o poloměru $|k - 1|/r$, přičemž při $k > 1$ mají kružnice vnější a při $k < 1$ vnitřní dotyk.

Obyčejně se k-cykloidy nazývají v případě $k > 0$ *epicykloidami*, v případě $k < 0$ *hypocykloidami*.

Na obrázcích 96—101 jsou zobrazeny k-cykloidy pro $k = 3/8$, $-1/7$, -3, -2, 2 a 3. Poslední čtyři jsou asteroida, Steinerova křivka, kardioida a nefroida.



Obr. 101

Na obr. 102 je zobrazena trajektorie bodu kružnice, která se kotálí po přímce. Tato křivka se nazývá *cykloida*. Obalovou křivkou průměru kotálející se kružnice je cykloida dvakrát menší.

Již v případě kardioidy jsme viděli, že tutéž křivku můžeme dostat jako trajektorii bodů dvou různých kružnic kotálejících se po téže pevné kružnici. Porov-

Obr. 102

nejte první definici kardioidy s úlohou 7.7: v jednom případě je středem pohybující se kružnice bod P a ve druhém vrchol Q kloubového rovnoběžníku $OPQM$. Další úloha ukazuje obecně, v jakém vztahu musí být pohybující se kružnice, aby trajektorie jejich bodů byly shodné.

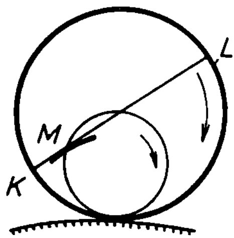
7.14 a) Dokažte, že bod kružnice o poloměru r, jež se kotálí po pevném kruhu o poloměru R, opisuje trajektorii shodnou s trajektorií, kterou opisuje bod kružnice o poloměru $R + r$ kotálející se po témže kruhu tak, že jej obklopuje.

b) Po vnitřku kružnice o poloměru R se kotálejí dvě kružnice o poloměrech r a $R - r$. Dokažte, že trajektorie bodů jedné i druhé kružnice jsou shodné. ↓

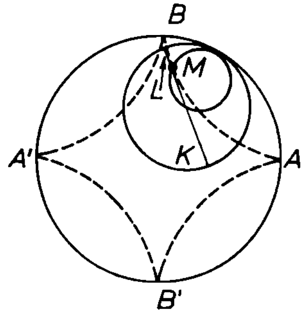
K řešení těchto úloh potřebujeme umět vypočíst vztahy mezi rychlostmi spolu vázaných otáčení. Ty vyšetříme později, teď přejdeme k nejzajímavějším vlastnostem cykloidálních křivek, k vlastnostem jejich tečen.

Věta o dvou kruzích. Vyslovíme zajímavé pravidlo, které nám umožní názorně popsat systém všech tečen trajektorie bodu M na kružnici o poloměru r kotálející se bez klouzání po pevné křivce γ. Kotálejme po téže křivce γ kružnici o poloměru $2r$ a představme si s ní pevně spojený průměr KL, který jsme zvolili tak, aby v určitém časovém okamžiku splynul bod K s bodem M v tentýž bod křivky γ (obr. 103). Pak se v každém okamžiku dotýká průměr KL trajektorie bodu M. Jinými slovy, tato trajektorie je obalovou křivkou všech poloh průměru KL.

Toto výhodné pravidlo jsme nazvali větou o dvou kruzích. K jejímu důkazu se vrátíme později, zatím její tvrzení doplníme. Kotálíme-li obě kružnice, o kterých věta mluví, současně tak, aby v každém okamžiku splynuly jejich body dotyku s křivkou γ, kotálí se menší kružnice uvnitř větší bez klouzání. Podle Koperníkovy věty se bod M pohybuje po pevném průměru KL větší kružnice. A naše věta o dvou kruzích tvrdí, že přímka KL je tečnou sestrojenou v bodě M k jeho trajektorii.



Obr. 103

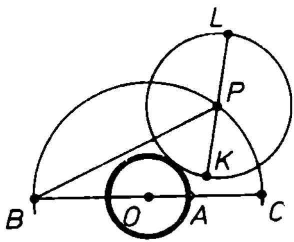


Obr. 104

Přejděme k příkladům. Začneme u systému přímek, o kterém jsme již hovořili v úvodu knížky. Nechť se kružnice o poloměru r s vyznačeným bodem M kotálí zevnitř po kružnici o poloměru $R = 4r$. Kotálejme spolu s ní kružnici o poloměru $2r$ a na ní pevně zvolený průměr KL také po vnitřku pevné kružnice o poloměru $4r$. Předpokládáme přitom, že ve výchozím okamžiku splývají body K a M s bodem A pevné kružnice (obr. 104). Podle Koperníkovy věty se krajní body průměru KL pohybují po dvou na sebe kolmých průměrech AA' a BB' pevné kružnice. Současně se podle věty o dvou kruzích dotýká průměr KL v každém okamžiku trajektorie bodu M, tj. obalovou křivkou přímek KL je asteroida s body vratu A, B, A', B'.

Další úloha se týká kardioidy.

7.15 Z pevného bodu B kružnice vycházejí světelné paprsky, dopadají do všech bodů kružnice a odrážejí se od ní (úhel dopadu se rovná úhlu odrazu). Dokažte, že obalovou křivkou odražených paprsků je kardioida.



Obr. 105

□ Označme O střed dané „zrcadlové" kružnice a C bod diametrálně protilehlý k bodu B. Nechť se paprsek BP odrazí v bodě P do bodu N úsečky BC (předpokládáme, že $|\sphericalangle PBC| \leqq 45°$). Pak je $|\sphericalangle PNC| = |\sphericalangle BPN| + |\sphericalangle PBN| = 3|\sphericalangle PBC|$. Otáčí-li se tudíž paprsek BP úhlovou rychlostí ω, otáčí se odražený paprsek úhlovou rychlostí 3ω, přičemž se bod odrazu P pohybuje po zrcadlové kružnici úhlovou rychlostí 2ω (věta o prstenci v kap. 1). To zůstává v platnosti i při $|\sphericalangle PBC| > 45°$.

Náš systém přímek PN můžeme tedy dostat také takto: Kotálejme po pevné kružnici o poloměru $r = |OB|/3$ se středem v bodě O kružnici poloměru $2r$ a s ní pevně spojený průměr KL, který leží ve výchozí poloze na přímce BC (obr. 105). Probíhá-li střed P této kružnice kružnici o poloměru $3r$ a středu O úhlovou rychlostí 2ω, otáčí se průměr KL úhlovou rychlostí 3ω ⟨?⟩, stejně jako odražený paprsek.

Podle věty o dvou kruzích je obalovou křivkou systému přímek KL trajektorie bodu M na kružnici o poloměru r, která se kotálí po kružnici téhož poloměru se středem v bodě O, tj. kardioida. Ve výchozí poloze splývá bod M s bodem A, který dělí úsečku BC v poměru 2 : 1. Ten je bodem vratu kardioidy. □

7.16 Svazek rovnoběžných paprsků dopadá na zrcadlo tvaru půlkružnice. Dokažte, že se odražené paprsky dotýkají nefroidy.

Kdyby bylo zrcadlo parabolické, odrážely by se všechny paprsky do jednoho bodu, do ohniska paraboly (viz kap. 6). Proto se nefroidě také říká *ohnisková křivka kružnice.*

7.17 Najděte množinu všech bodů, kterou opíše pevný průměr kruhu o poloměru r kotálející se

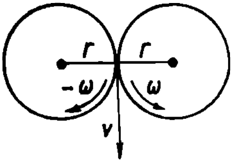
a) vně po pevné kružnici o poloměru r,

b) uvnitř po pevné kružnici o poloměru $3r/2$.

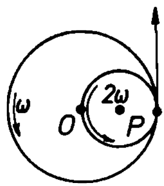
Několik dalších zajímavých úloh o tečnách křivky uvedeme dále. Dříve však pojednáme o kinematických vztazích použitých ve větě o dvou kruzích a v řešeních posledních úloh.

Rychlosti a tečny. Pro určení vztahů mezi úhlovými rychlostmi složených otáčení existuje výhodnější postup než ten poměrně primitivní, který jsme použili při řešení úlohy 7.4. Je to pravidlo skládání úhlových rychlostí analogické pravidlu skládání lineárních rychlostí, užívané hlavně při přechodu od jedné vztažné soustavy ke druhé.

Domluvíme se, že úhly a úhlové rychlosti odpovídající otáčení ve smyslu proti otáčení hodinových ručiček budeme brát s kladným znaménkem a úhly odpovídající otáčení ve smyslu otáčení hodinových ručiček budeme brát záporně. Otočí-li se pak přímka l_2 vzhledem k přímce l_1 o úhel φ' a přímka l_3 vzhledem k přímce l_2 o úhel φ, otočí se přímka l_3 vůči přímce l_1 o úhel $\varphi + \varphi'$. Otáčí-li se tudíž rovinný útvar γ_2 kolem „pevného" útvaru γ_1 úhlovou rychlostí ω' a útvar γ_3 kolem útvaru γ_2 úhlovou rychlostí ω, otáčí se útvar γ_3 kolem γ_1 úhlovou rychlostí $\omega + \omega'$. Vzhledem k tomu, že se v našich úlohách jedná především o otáčení kruhů, budeme na každém z nich předpokládat pevně vyznačený poloměr, abychom lépe viděli úhly otočení.



Obr. 106



Obr. 107

Ukážeme užití pravidla skládání úhlových rychlostí. Uvažujme dva kruhy o poloměru r, jejichž středy jsou pevně umístěny ve vzdálenosti $2r$ (obr. 106). Otáčejí-li se kruhy bez klouzání, jsou jejich úhlové rychlosti v absolutní hodnotě stejné, ale mají opačná znaménka. Je-li například úhlová rychlost prvního $-\omega$, je rychlost druhého ω. Rychlosti (už nikoli úhlové) jejich bodů dotyku musí být na obou kruzích stejné. To plyne z toho, že kruhy neprokluzují. Protože velikost v lineární rychlosti bodu M na kruhu, který se otáčí úhlovou rychlostí ω, je rovna $v = \omega r$ (r je vzdálenost bodu M od středu kruhu), plyne z rovnosti lineárních rychlostí rovnost absolutních hodnot úhlových rychlostí. Vezměme teď vztažnou soustavu, pevně spojenou s prvním kruhem. Pak je třeba ke všem úhlovým rychlostem přičíst ω, úhlová rychlost prvního kruhu bude O a druhého 2ω. To jsme již viděli v úloze 7.4.

Ještě jeden příklad. Nechť je vzdálenost mezi (zatím pevnými) středy O a P dvou dotýkajících se kružnic o poloměrech $R = 2r$ a r rovna r (obr. 107). Otáčejí-li se kružnice bez prokluzování, jsou jejich úhlové rychlosti ω a 2ω (poměr absolutních hodnot jejich úhlových rychlostí se rovná převrácené hodnotě poměru jejich poloměrů). Ve vztažné soustavě pevně spojené s větší kružnicí jsou jejich úhlové rychlosti 0 a ω (jedná se o pohyb, o kterém se mluví v Koperníkově větě). Ve vztažné soustavě menší kružnice jsou úhlové rychlosti $-\omega$ a 0 (úloha 7.7).

Při určení úhlové rychlosti se ovšem můžeme také obejít bez zavedení otáčející se vztažné soustavy. Musíme pak umět zjistit (lineární) rychlost každého bodu kotálejícího se kruhu. To budeme hlavně potřebovat v dalším odstavci, pojednávajícím o tečnách cykloidálních křivek. Vraťme se tedy k prvnímu příkladu — uvažujme kruh o poloměru r kotálející se po pevné kružnici téhož poloměru. Označme T bod kruhu, v němž se v daném okamžiku dotýká pohybující se kruh pevné kružnice. Okamžitá rychlost bodu T je nulová, protože kotálení probíhá bez prokluzování. Jak najít okamžité rychlosti ostatních bodů kruhu?

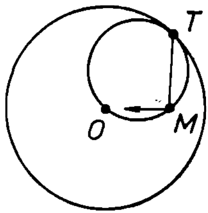
K odpovědi použijeme věty Mozziho: V každém okamžiku jsou rychlosti bodů desky, která se pohybuje v pevné rovině, buď stejné jako v případě posunutí desky, tj. všechny jsou stejně veliké a mají stejný směr, nebo jsou takové jako při otáčení, tj. rychlost jednoho bodu T je nulová a velikost rychlosti libovolného bodu M je rovna $|MT|\,\omega$, kde je ω okamžitá úhlová rychlost otáčení desky. Přitom je směr rychlosti bodu $M \neq T$ kolmý na spojnici bodů M, T. A právě tato druhá možnost nastává v případě kotálejícího se kruhu, přičemž roli bodu T — okamžitého středu otáčení — hraje bod dotyku kruhu a kružnice. (A to platí i v případě kotálení křivého kolečka po kostrbaté cestě.) Použijeme-li toto tvrzení, najdeme poměr úhlové rychlosti ω_1 kotálející se kružnice a úhlové rychlosti ω_2, se kterou se otáčí její střed P kolem středu O pevného kruhu. Stačí dvěma způsoby vypočíst velikost rychlosti bodu P. Jednak se rovná tato velikost hodnotě $2r\omega_2$, a protože je bod T okamžitým středem otáčení, rovná se též $r\omega_1$. Je tedy $2r\omega_2 = r\omega_1$, odkud $\omega_1 = 2\omega_2$.

Tentýž postup uplatníme v případě kruhu o poloměru r, který se kotálí po vnitřku kružnice o poloměru $2r$ tak, že se jeho střed otáčí po kružnici o poloměru r úhlovou rychlostí $\omega_2 > 0$. Označme úhlovou rychlost kruhu ω_1 a všimněme si, že $\omega_1 < 0$. Vyjádříme-li rychlost bodu P (středu kruhu) dvěma způsoby, dostaneme $|\omega_1 r| = |\omega_2 r|$, odkud $\omega_1 = -\omega_2$.

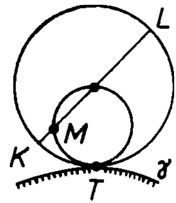
Analogické úvahy nám pomohou i při studiu jiných složených otáčení. Pro nás je zvlášť důležité, že Mozziho věta nám umožňuje určit i směr rychlosti každého bodu pohyblivého útvaru. Rychlost bodu M je vždy kolmá k úsečce MT, která ho spojuje s okamžitým středem otáčení.

Uvedeme ještě jeden důkaz Koperníkovy věty. Nechť je M bod kružnice o poloměru r, která se kotálí po vnitřku kružnice o poloměru $2r$ se středem O (obr. 108). V každém okamžiku směřuje rychlost bodu M kolmo na úsečku TM, kde je T bod dotyku obou kružnic, tedy okamžitý střed otáčení menší kružnice. Směřuje tudíž rychlost bodu M do středu O větší kružnice, protože T a O jsou diametrálně protilehlými body menší kružnice. Proto se bod M pohybuje po průměru velké kružnice, což je tvrzení Koperníkovy věty.

Dokážeme teď větu o dvou kruzích. Kotálejme po křivce nebo přímce γ najednou dvě kružnice o poloměrech r a $2r$. Označme M a K jejich body, které splývají



Obr. 108



Obr. 109

ve výchozí poloze s bodem A křivky γ, a T společný okamžitý střed otáčení obou kružnic, tedy jejich bod dotyku s křivkou γ (obr. 109). Směr okamžité rychlosti bodu M je kolmý k úsečce MT, a je tedy totožný se směrem toho průměru větší kružnice, který prochází bodem M. Je proto tento průměr, jehož krajní body označíme K, L, pevným průměrem větší kružnice a přímka KL se v každém okamžiku dotýká trajektorie bodu M. A to je právě tvrzení věty o dvou kruzích.

Všimněme si, že jsme zde použili jiné hledisko při určení tečny křivky; tečnou trajektorie pohybujícího se bodu je přímka procházející bodem M trajektorie ve směru vektoru rychlosti bodu M.

Větu Mozziho dokazovat nebudeme, ukážeme si však její geometrickou analogii. Je to tvrzení, že každé přemístění roviny v sebe, při kterém rovinu nepřeklopíme, je buď posunutí roviny, nebo její otočení kolem některého jejího bodu T. V souvislosti s Mozziho větou si všimněme ještě jedné okolnosti. Okamžitý střed otáčení T mění při zcela obecném pohybu destičky v rovině svou polohu, a to jak vzhledem k pevné rovině, tak vzhledem k pohybující se destičce. Vytváří tak v pevné rovině i v pohybující se rovině pevně spojené s destičkou křivku. První se nazývá *pevná poloida*, druhá *hybná poloida*. Například při kotálení kolečka po cestě je pevnou poloidou cesta, hybnou poloidou obvod kolečka. V kinematice se dokazuje, že se hybná poloida kotálí po nehybné. S výjimkou posouvání je tedy každý spojitý pohyb roviny v sebe kotálením jedné křivky po druhé. My jsme se omezili na ty pohyby, při kterých byly obě poloidy kružnicemi.

Tím ukončíme náš malý výlet do kinematiky a můžeme přistoupit k odhalení nejpozoruhodnějších vlastností cykloidálních křivek, souvisících s jejími tečnami.

7.18 Dokažte, že tečny kardioidy v krajních bodech její libovolné tětivy, která prochází bodem vratu kardioidy, jsou na sebe kolmé. Vzdálenost jejich průsečíku od středu pevné kružnice je $3r$, kde r značí poloměr této kružnice. ↓

7.19 Po kružnici jdou dva chodci P a Q, poměr jejich úhlových rychlostí je k (k je různé od 0, 1 a —1). Určete obalovou křivku všech spojnic PQ. ↓

7.20 Je dána kružnice a přímka procházející jejím středem. Dokažte, že sjednocením všech kružnic se středem na dané kružnici a dotýkajících se dané přímky je oblast ohraničená nefroidou.

7.21 Uvažujme Steinerovu křivku opsanou kružnici poloměru $2r$. Dokažte, že každá její tečna s bodem dotyku M ji protíná ještě v bodech K, L, přičemž délka úsečky KL je $4r$, její střed leží na dané vepsané kružnici; tečny Steinerovy křivky v bodech K, L jsou na sebe kolmé a jejich průsečík N leží také na vepsané kružnici. Ta půlí úsečky KN a LN. ↓

7.22 Asteroida je opsána kružnici o poloměru $2r$. Dokažte, že každým bodem P vepsané kružnice lze vést k asteroidě tři tečny PT_1, PT_2, PT_3, z nichž každé dvě svírají spolu úhel 60° a body dotyku T_1, T_2, T_3 tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku vepsaného kružnici o poloměru $3r$, která se dotýká kružnice opsané asteroidě.

Poslední úloha této série, kterou lze též řešit pomocí pohybu, ukazuje nečekanou souvislost mezi elementární geometrií trojúhelníku a cykloidální křivkou, která nese jméno geometra, objevitele této souvislosti.

7.23 Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že

a) paty kolmic vedených libovolným bodem kružnice opsané trojúhelníku ABC na přímky AB, BC, CA leží na jedné přímce *(Simsonova přímka)*,

b) středy stran trojúhelníku, paty jeho výšek a středy úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy trojúhelníku leží na jedné kružnici (tzv. *kružnice devíti bodů*, nebo také *Feuerbachova kružnice*),

c) všechny Simsonovy přímky trojúhelníku ABC se dotýkají Steinerovy křivky opsané kružnici devíti bodů. ↓

Parametrické rovnice. Všechny vlastnosti cykloidálních křivek jsme mohli dokázat také analyticky. Přitom je nejvýhodnější použít parametrických rovnic křivky, kterými jsou souřadnice $[x; y]$ bodu M křivky vyjádřeny pomocí parametru t. Pod parametrem t si můžeme představit čas. S takovými rovnicemi jsme se setkali už v úloze 6.22.

Uvažujme trajektorii, po které se pohybuje čtvrtý vrchol M kloubového rovnoběžníku $OPMQ$, jehož vrchol O je pevný a splývá s počátkem soustavy souřadnic. Vyjdeme ze vztahu $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Pohybuje-li se bod P po kružnici o poloměru r_1 a středu O úhlovou rychlostí ω_1 a bod Q po kružnici o poloměru r_2 a středu O úhlovou rychlostí ω_2, má v okamžiku t bod P souřadnice $[r_1 \cos \omega_1 t;\ r_1 \sin \omega_1 t]$, $Q = [r_2 \cos \omega_2 t;\ r_2 \sin \omega_2 t]$ a souřadnice čtvrtého vrcholu M rovnoběžníku $OPMQ$ jsou

$$x = r_1 \cos \omega_1 t + r_2 \cos \omega_2 t,$$
$$y = r_1 \sin \omega_1 t + r_2 \sin \omega_2 t$$

(předpokládáme, že v okamžiku $t = 0$ splývají polopřímky OP a OQ s kladnou polopřímkou osy x). V úloze 6.22 jsme si ukázali, že v případě $\omega_2 = -\omega_1$ opisuje bod M elipsu. V obecném případě, platí-li vztahy

$$\omega_1/\omega_2 = k, \quad r_2/r_1 = |k|,$$

opisuje bod M cykloidální křivku, *k-cykloidu.*

Vyloučením parametru t z výše uvedených parametrických rovnic dostaneme v některých případech jednoduchou rovnici, kterou jsou spolu svázány souřadnice x, y každého bodu k-cykloidy. Vezměme například asteroidu. Pro ni je $r_1 = 3r_2$, $\omega_2 = -3\omega_1$; můžeme vzít $\omega_1 = 1$, pak je $\omega_2 = -3$ a parametrické rovnice asteroidy jsou (položili jsme $r_2 = r$)

$$x = 3r \cos t + r \cos 3t,$$
$$y = 3r \sin t - r \sin 3t,$$

nebo v jednodušším tvaru (?)

$$x = 4r \cos^3 t, \qquad y = 4r \sin^3 t.$$

Odtud plyne jednoduchá rovnice asteroidy

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (4r)^{2/3}.$$

Asteroidu i další křivky, se kterými jsme se seznámili, je možné zadat algebraickými rovnicemi. Ověřte si, že souřadnice $[x; y]$ každého bodu příslušné křivky vyhovují rovnici:

asteroida	$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 + 108r^2x^2y^2 = 0,$
kardioida	$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0,$
nefroida	$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 - 108r^4x^2 = 0,$
Steinerova křivka	$(x^2 + y^2 + 9r^2)^2 + 8rx(3y^2 - x^2) - 108r^4 = 0.$

Jsou tedy asteroida a nefroida křivky šestého stupně, kardioida a Steinerova křivka jsou stupně čtvrtého.

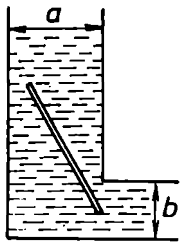
Dá se ukázat, že při racionálním poměru $k = \omega_1/\omega_2$ je cykloidální křivka křivkou algebraickou. Pro iracionální k dostaneme nealgebraickou křivku, jejíž body vyplňují hustě mezikruží se středem O a poloměry $r_1 + r_2$ a $|r_1 - r_2|$. To znamená, že v každém kruhu se středem v popsaném mezikruží a s libovolně malým poloměrem leží alespoň jeden bod křivky.

Porovnáním rovnice křivky s jejími geometrickými vlastnostmi můžeme dostat zajímavé důsledky. Ukážeme si jednu úlohu, ve které se užívá vlastností asteroidy.

7.24 a) Je dán pravý úhel a uvnitř něho ve vzdálenostech a, b od ramen úhlu bod K. Je možné proložit bodem K úsečku délky d s krajními body na ramenech úhlu?

b) Kanál, jehož břehy jsou rovnoběžne přímky, se láme do pravého úhlu. Před lomem má šířku a, za lomem šířku b. Pro která d může lomem proplout tenké břevno délky d (obr. 110)?

□ a) Zvolíme ramena úhlu za osy soustavy souřadnic. Úsečka délky d s krajními body na ramenech úhlu se dotýká asteroidy, jejíž body vratu mají vzdálenost d



Obr. 110

od středu asteroidy. Její rovnice je $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$. Je-li K vnitřním bodem oblasti ohraničené asteroidou a rameny úhlu (nebo bodem hranice oblasti), existuje úsečka požadovaných vlastností. Je to úsečka procházející bodem K a dotýkající se asteroidy. Leží-li bod K vně uvedené oblasti, nemá úloha řešení. Úsečka předepsaných vlastností existuje tedy právě tehdy, je-li $a^{2/3} + b^{2/3} \leqq d^{2/3}$. □

Poznamenejme, že ačkoliv jsme si objasnili, jak „sestrojit“ za předpokladu $a^{2/3} + b^{2/3} \leqq d^{2/3}$ hledanou úsečku pomocí asteroidy, není úloha řešitelná jen pomocí pravítka a kružítka.

Pozoruhodné křivky, se kterými jsme se seznámili v posledních dvou paragrafech, jsou známy již více než 2000 let. Základní vlastnosti elips, hyperbol a parabol byly popsány již v díle „O kuželosečkách" starořeckého matematika Apollonia z Pergy, který žil téměř současně s Euklidem (třetí století před naším letopočtem). Studiem trajektorií pohybů složených z kruhových se již ve starověku zabývali astronomové, a nemůžeme se tomu divit. Předpokládáme-li, že se planety pohybují kolem Slunce zhruba po kruhových drahách a v téže rovině, je pohyb každé planety pozorován ze Země jako složený kruhový pohyb. Popis pohybu planet pomocí cykloidálních křivek se novými astronomickými pozorováními stále zpřesňoval až do doby, kdy Johannes Kepler zjistil, že trajektorie planet jsou s velkou přesností elipsy s jedním ohniskem ve středu Slunce. Různé úlohy fyziky, mechaniky i matematiky související s křivkami byly zkušebním kamenem analytické metody v geometrii, kterou vytvořili v 17. století Descartes, Leibnitz, Newton, Fermat a jiní. Tato metoda umožnila přechod od jednotlivých úloh o konkrétních křivkách k obecným zákonitostem týkajícím se vždy celých tříd křivek. Při výpočtech složitých mechanismů a konstrukcí se sice neobejdeme bez analytické geometrie, ale názorné představy, kterým je věnována tato knížka, jsou užitečné, a to i v úlohách nesouvisejících s geometrií. Ne nadarmo se výsledky výzkumů a výpočtů předkládají ve formě grafů nebo systémů křivek.