Přímky a křivky

Kapitola 6. Křivky druhého stupně

In: N. B. Vasiljev (author); V. L. Gutenmacher (author); Leo Boček (translator); Alena Šarounová (illustrator): Přímky a křivky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 88–113.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404057

Kapitola 6

KŘIVKY DRUHÉHO STUPNĚ

Elipsy, hyperboly, paraboly. Dosud jsme se omezovali na nepříliš širokou třídu křivek, které se probírají již na základní škole; mluvili jsme pouze o přímkách a kružnicích. Všechny množiny naší abecedy se v podstatě skládaly z částí přímek a kružnic. V tomto paragrafu se seznámíme s některými dalšími křivkami — *elipsami, hyperbolami a parabolami*. Tyto křivky se nazývají souhrnně *kuželosečky*, protože každou z nich můžeme dostat jako průnik roviny a kuželové plochy.

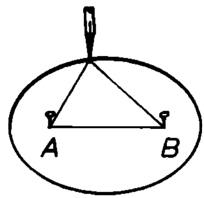
Nejdříve budeme definovat elipsy, hyperboly a paraboly analogicky jako množiny naší abecedy v 2. kap. Dále vystupují jako obalové křivky systémů přímek. Pomocí soustavy souřadnic nakonec ukážeme, že tyto křivky jsou dány algebraickými rovnicemi druhého stupně. Důkaz ekvivalence těchto definic není jednoduchý, ale všechny jsou užitečné. Každá z definic umožňuje výhodně řešit jinou třídu úloh.

Rozšiřme tedy naši abecedu o další písmena L, N, P a posléze o písmeno R.

L. Elipsa. Uvažujme množinu všech bodů M v rovině, pro něž je součet vzdáleností od dvou daných různých bodů A, B roven danému číslu.

Označme toto číslo $2a$, vzdálenost bodů A a B označíme $2c$. Poznamenejme, že pro $a \leqq c$ je tato množina málo zajímavá; je-li $a < c$, dostaneme prázdnou množinu, protože v rovině neexistuje bod M, pro který platí $|AM| + |MB| < |AB|$. Pro $a = c$ je uvažovanou množinou úsečka AB.

Abychom získali představu o tvaru křivky pro $a > c$, zatlučeme v bodech A, B hřebíky a navlékneme na ně provázek délky $2(a + c)$, jehož konce spojíme. Napneme provázek tužkou a opíšeme takto křivku, přičemž dbáme, aby provázek byl stále napnutý. Dostaneme uzavře-



Obr. 63

nou křivku, která se nazývá *elipsa*. Body A, B jsou tzv. *ohniska* této elipsy (obr. 63). Z definice elipsy je zřejmé, že má dvě osy souměrnosti, jednou je přímka AB a druhou osa úsečky AB, jejich průsečík O je *středem* elipsy.

Připustíme-li $A = B$, dostaneme uvedeným způsobem kružnici. Považujeme proto kružnici za zvláštní případ elipsy, pro který splývají obě ohniska se středem.

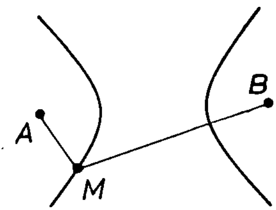
Měníme-li délku provázku, dostaneme celý systém elips s danými ohnisky. Jinými slovy, dostaneme mapu hladin funkce

$$f(M) = |MA| + |MB|.$$

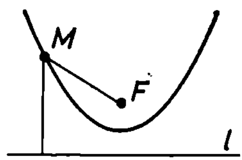
N. Hyperbola. Uvažujme množinu všech bodů, jejichž rozdíl vzdáleností od dvou daných bodů A a B se v absolutní hodnotě rovná dané hodnotě $2a (a > 0)$.

Nechť je jako v předcházejícím případě $|AB| = 2c$. Je-li $a > c$, je hledaná množina prázdná, protože pro žádný bod M není $|AM| - |MB| > |AB|$ ani $|MB| - |AM| > |AB|$. Pro $a = c$ se hledaná množina skládá ze dvou polopřímek, které dostaneme z přímky AB vynecháním vnitřních bodů úsečky AB.

V případě $a < c$ se uvažovaná množina skládá ze dvou částí, tzv. *větví*. Jedna je množinou $\{M : |MA| - |MB| =$



Obr. 64



Obr. 65

$= 2a\}$ a druhá množinou $\{M : |MB| - |MA| = 2a\}$. Celá křivka (sjednocení obou větví) se nazývá *hyperbola* a body A, B jejími *ohnisky* (obr. 64). Z definice plyne, že hyperbola má dvě osy souměrnosti, střed O úsečky AB je jejím *středem*.

Abychom dostali celou mapu hladin funkce

$$f(M) = ||MA| - |MB||,$$

musíme k systému hyperbol s ohnisky A, B přidat osu úsečky AB, která odpovídá hodnotě $f(M) = 0$.

P. Parabola. Množina všech bodů M stejně vzdálených od bodu F jako od přímky l, jež bodem F neprochází, se nazývá *parabola* (obr. 65).

Bod F se nazývá jejím *ohniskem* a přímka l *řídicí* *přímkou* paraboly. Parabola má jednu osu souměrnosti, která prochází ohniskem F kolmo k řídicí přímce.

Shrňme uvedené definice. Doplnili jsme naši abecedu těmito množinami:

L. $\{M : |MA| + |MB| = 2a\}$, kde $2a > |AB|$.
N. $\{M : ||MA| - |MB|| = 2a\}$, kde $2a < |AB|$.
P. $\{M : |MF| = \varrho(M, l)\}$, kde $F \notin l$.

Je-li výsledkem nějaké úlohy množina bodů, kterou lze popsat jednou z vlastností P, L, N, je odpovědí parabola, elipsa nebo hyperbola. K úplné odpovědi je ovšem třeba určit polohu a rozměry kuželosečky, např. určit její ohniska a číslo a.

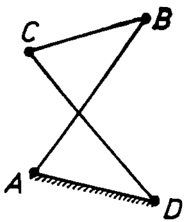
6.1 V rovině jsou dány dva různé body A, B. Najděte množinu všech bodů M, pro které
a) je obvod trojúhelníku AMB roven danému číslu p,
b) není obvod trojúhelníku AMB větší než p,
c) není rozdíl $|MA| - |MB|$ menší než p.

6.2 Je dána úsečka AB a na ní bod T. Najděte množinu všech bodů M, pro které se kružnice vepsaná trojúhelníku AMB dotýká strany AB v bodě T.

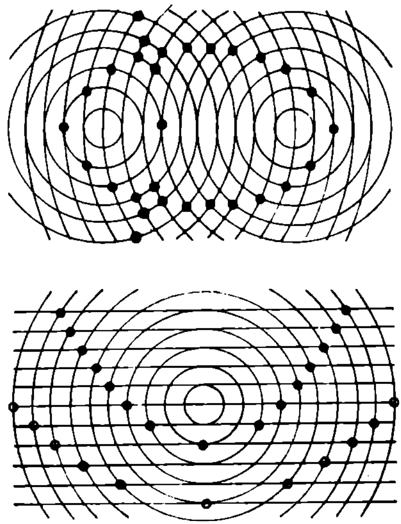
6.3 Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají
a) dané přímky a procházejí daným bodem,
b) dané kružnice a procházejí daným vnitřním bodem této kružnice,
c) dané kružnice a procházejí daným vnějším bodem této kružnice,
d) dané kružnice a dané přímky,
e) daných dvou kružnic. ↓

6.4 Mějme kloubový mechanismus, který leží v rovině a skládá se z tyčí AB, BC, CD, přičemž klouby A a D jsou umístěny pevně, klouby B a C se pohybují v rovině volně. Je $|AD| = |BC| = a$, $|AB| = |CD| = b$. Najděte množinu všech průsečíků přímek AB a CD, je-li 1) $a < < b$, 2) $a > b$ (obr. 66).

6.5 a) V rovině jsou dány dva body A, B, jejichž vzdálenost je přirozené číslo. Sestrojme všechny kružnice s celočíselnými poloměry a středy v bodech A, B. Na obdržené síti zvolme posloupnost jejích vrcholů tak,



Obr. 66



Obr. 67a, obr. 67b

aby každé dva za sebou jdoucí vrcholy byly protějšími vrcholy křivočarého čtyřúhelníku sítě. Dokažte, že všechny body posloupnosti leží buď na elipse, nebo na hyperbole (obr. 67a).

b) V rovině je dána přímka l a na ní bod F. Sestrojme všechny kružnice s celočíselnými poloměry a středy v bodě F a všechny přímky rovnoběžné s přímkou l, jejichž vzdálenost od přímky l je také celé číslo. Dokažte, že všechny body posloupnosti vrcholů sítě sestrojené stejně jako v úloze a) leží na parabole s ohniskem F (obr. 67b).

Plochy, které dostaneme rotací paraboly, elipsy nebo hyperboly kolem její osy, se nazývají *rotační paraboloid*, *rotační elipsoid* nebo *rotační hyperboloid*. Ten je buď *jednodílný*, nebo *dvojdílný*, podle toho, kolem které osy hyperbolu otáčíme.

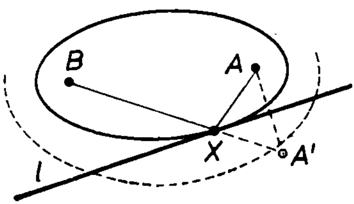
Ohniska a tečny. Mnoho zajímavých úloh pro elipsy, hyperboly a paraboly souvisí s vlastnostmi tečen těchto křivek. Jednu vlastnost tečny elipsy dostaneme porovnáním dvou řešení následující úlohy.

6.6 Jsou dány dva body A a B a přímka l, která je neodděluje. Najděte na přímce l bod X tak, aby součet vzdáleností $|AX| + |XB|$ byl nejmenší.

□ Uvažujme bod A' souměrně sdružený k bodu A podle přímky l. Pro každý bod M přímky l je $|A'M| = |AM|$. Proto je součet $|AM + |MB| = |A'M| + |MB|$ nejmenší, splývá-li bod M s průsečíkem X úsečky $A'B$ a přímky l. Pak je $|A'X| + |XB| = |A'B|$. □

Poznamenejme, že bod X má tuto vlastnost: úsečky AX a BX svírají shodné úhly s přímkou l.

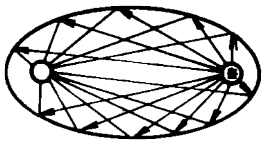
Kdybychom řešili úlohu 6.6 postupem uvedeným v kap. 5 — pomocí hladin funkce — sestrojili bychom



Obr. 68

systém elips $\{M : |AM| + |MB| = c\}$ s ohnisky A, B a vybrali bychom z nich tu, která se dotýká přímky l. Je tedy bod X bodem dotyku elipsy s ohnisky A, B a přímky l (obr. 68). Opravdu, všechny ostatní body M přímky l leží vně elipsy, tj. součet $|AM| + |MB|$ je větší než $|AX| + |BX|$.

Porovnáním obou řešení dostáváme tzv. ohniskovou vlastnost elipsy: *Úsečky spojující bod X elipsy s jejími ohnisky svírají shodné úhly s tečnou elipsy v bodě X.*



Obr. 69

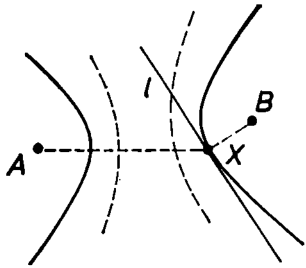
Tato vlastnost elipsy má názornou fyzikální interpretaci. Nechť má reflektor tvar části rotačního elipsoidu, který vznikl rotací elipsy kolem spojnice jejích ohnisek A, B. Umístíme-li bodový zdroj světla do ohniska A, odrážejí se paprsky do bodu B (obr. 69).

Také hyperbola má výše uvedenou ohniskovou vlastnost: *Úsečky spojující bod X hyperboly s jejími ohnisky svírají stejně velké úhly s tečnou hyperboly v bodě X.* Tuto vlastnost hyperboly dokážeme řešením následující úlohy dvěma způsoby.

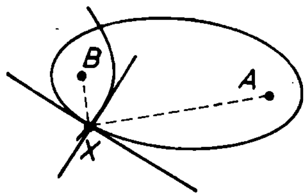
6.7 Jsou dány body A a B a přímka l, která je odděluje, přičemž bod A leží dál od přímky l než bod B. Najděte na dané přímce bod X, pro který je rozdíl vzdáleností $|AX| - |BX|$ největší.

První způsob řešení: označme A' bod souměrně sdružený k bodu A podle přímky l. Hledaným bodem X je průsečík přímky $A'B$ s přímkou l ⟨?⟩. Úsečky AX a BX svírají zřejmě stejně velké úhly s přímkou l.

Druhý postup, který se opírá o výsledky kap. 5, vede k této odpovědi: X je bodem dotyku přímky l a hyperboly s ohnisky A a B (obr. 70). Srovnání obou výsledků dává ohniskovou vlastnost hyperboly.



Obr. 70

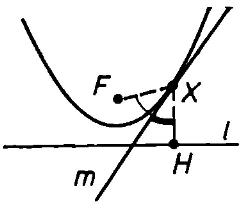


Obr. 71

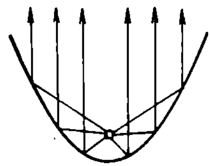
Z ohniskových vlastností plyne zajímavý důsledek týkající se systému všech elips a hyperbol se společnými ohnisky A, B. Vezmeme jednu elipsu a jednu hyperbolu, které se protínají v bodě X. Veďme bodem X přímky, které svírají stejně velké úhly s přímkami AX a BX. Dostaneme tak dvě přímky, které jsou na sebe kolmé (obr. 71). Z ohniskových vlastností plyne, že jedna je tečnou elipsy, druhá tečnou hyperboly. Takže tečny k elipse a hyperbole jsou na sebe kolmé, tvoří tudíž elipsy a hyperboly s ohnisky A a B dva ortogonální systémy křivek, každá elipsa protíná každou hyperbolu kolmo. Oba systémy budou dobře patrné na obrázku k úloze 6.5a, vybarvíme-li čtyřúhelníčky jako na šachovnici.

Ohnisková vlastnost paraboly. *Nechť je parabola dána ohniskem F a řídicí přímkou l a nechť X je její bod. Pak přímka XF a kolmice vedená bodem X na přímku l svírají stejně veliké úhly s tečnou paraboly v bodě X.*

Důkaz. Označme H patu kolmice vedené bodem X na přímku l (obr. 72). Podle definice paraboly je $|XF| = |XH|$, leží tudíž bod X na ose m úsečky FH. Dokážeme, že přímka m je tečnou paraboly. Ukážeme, že má s parabolou společný jen bod X a že celá parabola leží



Obr. 72



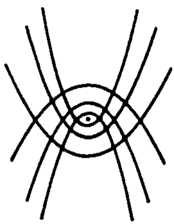
Obr. 73

v jedné polorovině ohraničené přímkou m. Bude to ta polorovina, ve které leží bod F. Pro každý bod M paraboly různý od bodu X je totiž $|MF| < |MH|$, protože $|MF| = \varrho(M, l)$ a $\varrho(M, l) < |MH|$.

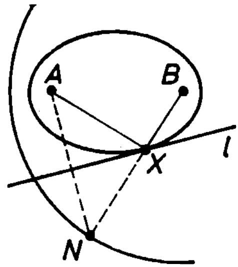
Poznámka. Pro všechny křivky, se kterými jsme se setkali, se tečna definovala takto: tečna křivky γ v jejím bodě M_0 je taková přímka l procházející bodem M_0, pro kterou leží křivka γ (nebo alespoň její průnik s nějakým kruhem o středu M_0) v jedné polorovině ohraničené přímkou l.

Ohniskovou vlastnost paraboly je možné využít při konstrukci reflektorů. Má-li reflektor tvar části rotačního paraboloidu a umístíme-li bodový světelný zdroj do ohniska, odrážejí se paprsky rovnoběžně s osou paraboly (obr. 73).

6.8 Všechny paraboly s daným ohniskem a danou vertikální osou se přirozeným způsobem dělí na dva systémy. Paraboly jednoho systému mají řídicí přímku nad ohniskem, paraboly druhého systému pod ohniskem. Dokažte, že každá parabola prvního systému protíná každou parabolu druhého systému kolmo (obr. 74).



Obr. 74



Obr. 75

Oba systémy parabol, o kterých se mluví v úloze, budou dobře patrny na obrázku 67b, vybarvíme-li čtyřúhelníčky jako na šachovnici.

Řešení dalších úloh se opírá o definice kuželoseček a jejich ohniskové vlastnosti.

6.9 a) Je dána elipsa s ohnisky A, B. Dokažte, že množina bodů souměrně sdružených k ohnisku A podle všech tečen elipsy je kružnice.

b) Dokažte, že množina pat kolmic vedených ohniskem A ke všem tečnám elipsy je kružnice.

□ a) Nechť je l tečna elipsy v bodě X a N bod souměrně sdružený k bodu A podle přímky l (obr. 75).

Podle úlohy 6.6 leží bod X na přímce NB a vzdálenost $|NB| = |AX| + |XB|$ je konstantní, nezávisí na volbě tečny l. Označme ji $2a$. Bod N tudíž leží na kružnici o poloměru $2a$ se středem v bodě B. Obráceně bychom ukázali, že každý bod této kružnice je souměrně sdružený k bodu A podle některé tečny elipsy.

b) Je-li M pata kolmice vedená bodem A na přímku l, je $|AM| = \frac{1}{2} |AN|$. Podle a) víme, že všechny body N tvoří kružnici. Proto tvoří body M kružnici o poloměru a, jejímž středem je střed úsečky AB. □

6.10 Dokažte tvrzení úlohy 6.9 pro případ hyperboly.

6.11 Je dána parabola s ohniskem F a řídicí přímkou l.

a) Najděte množinu všech bodů souměrně sdružených k ohnisku F podle tečen paraboly.

b) Dokažte, že množina všech pat kolmic vedených ohniskem F na tečny paraboly je přímka rovnoběžná s přímkou l.

6.12 a) Dokažte, že součin vzdáleností ohnisek elipsy od její tečny je konstantní, nezávislý na tečně. ↓

b) Najděte množinu všech bodů, ze kterých je vidět elipsu pod pravým úhlem.

6.13 Řešte úlohu 6.12a pro hyperbolu.

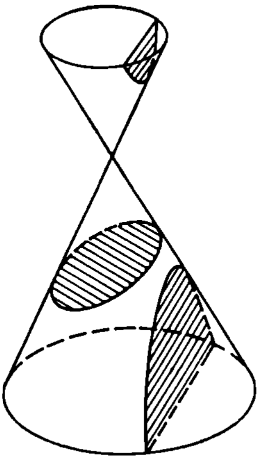
6.14 Řešte úlohu 6.12b pro parabolu.

6.15 Nechť se světelný paprsek odráží od vnitřku elipsy tak, že vytvoří lomenou čáru $P_0P_1P_2P_3\ldots$, která neprochází ohnisky A a B (body P_0, P_1, P_2, ... leží na elipse, ostatní body lomené čáry leží ve vnitřní oblasti elipsy).

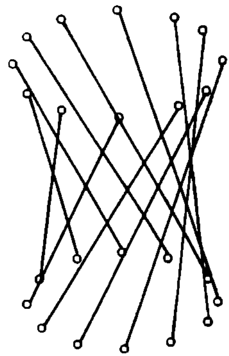
Dokažte a) neprotíná-li úsečka P_0P_1 úsečku AB, pak ji neprotínají ani úsečky P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... a všechny se dotýkají téže elipsy s ohnisky A, B; ↓

b) protíná-li úsečka P_0P_1 úsečku AB, protínají ji i úsečky P_1P_2, P_2P_3, ... a všechny se dotýkají téže hyperboly s ohnisky A, B. ↓

Řez rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází jejím vrcholem, je elipsa, hyperbola nebo parabola (obr. 76). Sféra, jež se dotýká roviny řezu a je vepsána



Obr. 76



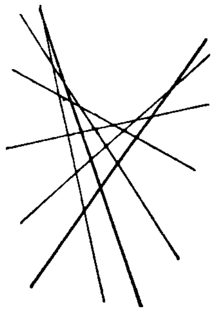
Obr. 77

kuželové ploše, se dotýká roviny řezu v ohnisku kuželosečky, která je řezem. Řídicí přímka je průsečnicí roviny řezu a roviny kružnice, podél níž se sféra dotýká kuželové plochy.

Sjednocením všech přímek v prostoru stejně vzdálených od daného bodu dané přímky l a svírajících s ní daný ostrý úhel je jednodílný rotační hyperboloid (obr. 77).

Tečná rovina hyperboloidu jej protíná ve dvou různoběžkách, každá jiná rovina ho protíná v kuželosečce.

Pohybují-li se body P a N rovnoměrně po dvou různoběžkách, jsou přímky PN spolu rovnoběžné nebo se dotýkají téže paraboly. Pohybují-li se body P, N rovnoměrně po dvou mimoběžkách, vytvoří přímky PN plochu, která se nazývá *hyperbolický paraboloid*. Každá jeho tečná rovina jej protíná ve dvou různoběžkách,



Obr. 78

každá jiná rovina v parabole nebo hyperbole. Hyperbolický paraboloid (sedlo) dostaneme také jako sjednocení všech přímek protínajících dané mimoběžky l_1, l_2 a rovnoběžných s danou rovinou, která přímky l_1, l_2 protíná (obr. 78).

Kuželosečky jako obalové křivky. Dosud jsme definovali křivky jako množiny bodů, které splňovaly jistou podmínku. V dalších úlohách vznikají křivky jako obalové křivky systémů přímek. Pojem „obalová" znamená pouze to, že se křivka dotýká každé přímky systému.

6.16 Je dána kružnice se středem O a bod A. Každým bodem M kružnice je vedena přímka kolmá k úsečce MA. Dokažte, že obalovou křivkou tohoto systému přímek je
a) kružnice, splývá-li od A s bodem O,
b) elipsa, je-li A bodem vnitřní oblasti kružnice,
c) hyperbola, je-li A bodem vnější oblastí kružnice. $\downarrow$

6.17 Je dána přímka l a bod A, který na ní neleží. Každým bodem M přímky l je vedena přímka kolmá k úsečce MA. Dokažte, že obalovou křivkou tohoto systému přímek je parabola. $\downarrow$

Rovnice kuželoseček. Začali jsme tento paragraf geometrickými definicemi elipsy, hyperboly a paraboly. Mnoho dalších informací o těchto křivkách získáme použitím metody souřadnic.

Začneme u paraboly. Víme, že parabolu dostaneme jako graf funkce

$$y = ax^2, \qquad a \neq 0. \tag{1}$$

Ukážeme, že výše uvedená geometrická definice vede také k této rovnici. Nechť je vzdálenost bodu F od přímky l rovna $2h$. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby osa x byla rovnoběžná s přímkou l a byla od ní stejně vzdálena jako od bodu F a aby osa y procházela bodem F (osa y bude tedy osou souměrnosti paraboly). Rovnice, kterou dostaneme z geometrické definice paraboly, se snadno upraví na tvar (1):

$$\sqrt{x^2 + (y - h)^2} = |y + h|,$$
$$x^2 + y^2 - 2hy + h^2 - y^2 + 2hy + h^2,$$
$$y = x^2/4h.$$

Stačí položit $a = 1/4h$.

Grafem libovolné funkce $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) je také parabola, dostaneme ji z paraboly $y = ax^2$ posunutím. Stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic s koeficientem $1/a$ zobrazuje parabolu $y = x^2$ na parabolu $y = ax^2$. Jsou tudíž každé dvě paraboly podobné. Naproti tomu nejsou každé dvě paraboly kongruentní (shodné), čím větší je $|a|$, tím je parabola $y = ax^2$ sevřenější. Poznamenejme, že parabolu $y = ax^2$ ($a > 0$) můžeme dostat z paraboly $y = x^2$ také stlačením nebo roztažením ve směru některé osy soustavy souřadnic, přesněji transformacemi, které bodu $[x; y]$ přiřazují bod $[x/\sqrt{a}; y]$ nebo $[x; ay]$.

Přejdeme teď k elipse a hyperbole. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby ohniska A, B měla souřadnice $A[-c; 0]$, $B[c; 0]$. Elipsa pak má rovnici

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a, \; a > c. \tag{2'}$$

Ekvivalentními úpravami můžeme odstranit odmocniny a převést rovnici elipsy na tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } b = \sqrt{a^2 - c^2}. \tag{2}$$

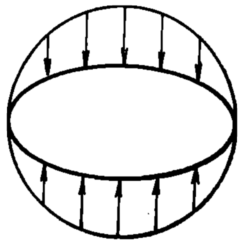
Podrobněji vysvětlíme přechod od rovnice (2') k (2) později.

Z rovnice (2) je vidět, že je možné dostat elipsu také takto: Vezmeme kružnici o poloměru a s rovnicí $x^2 + y^2 = a^2$ a „stlačíme" ji ve směru osy y v poměru $a : b$; přitom přejde bod $[x; y]$ do bodu $[x; y']$, kde $y' = yb/a$ (obr. 79). Dosadíme-li $y = y'a/b$ do rovnice naší kružnice, dostaneme rovnici elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Je vidět, že elipsu můžeme dostat i bez hřebíků a provázku. Stačí zapnout televizor v době, kdy se vysílá monoskop, a otočit regulátorem svislé dimenze; všechny kružnice na monoskopu se zdeformují v elipsy.

Dvě elipsy s rovnicemi ve tvaru (2) jsou podobné, mají-li stejný poměr $b : a$.



Obr. 79

Zvolíme-li soustavu souřadnic stejně jako u elipsy, bude mít hyperbola rovnici

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a, \ a < c, \tag{3'}$$

kterou můžeme ekvivalentními úpravami převést na tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ kde } b = \sqrt{c^2 - a^2}. \tag{3}$$

Abychom získali představu o průběhu hyperboly v kvadrantu $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, sestrojíme si graf funkce

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Tato funkce je zřejmě definována pro $x \geqq a$ a je rostoucí. Méně zřejmé je, že se její graf při zvětšujícím se x stále více přimyká k přímce $y = bx/a$. Přesněji řečeno, pro každou posloupnost čísel x_n, která roste nade všechny meze, konverguje posloupnost

$$\frac{b}{a}\sqrt{x_n^2 - a^2} - \frac{b}{a}x_n$$

k nule. To se snadno dokáže užitím rovnosti $x - \sqrt{x^2 - a^2} = a^2/(\sqrt{x^2 - a^2} + x)$. Z uvedených důvodů říkáme, že přímka $y = bx/a$ je *asymptotou* naší hyperboly. Další její asymptotou je přímka $y = -bx/a$.

Často se setkáváme s jinou rovnicí hyperboly, s rovnicí

$$xy = d,\ d \neq 0. \tag{4}$$

Jak je to možné? Není touto rovnicí dána jiná křivka? Není, rovnicí (4) je skutečně dána hyperbola, jejíž asymptoty jsou na sebe kolmé. Její rovnice ve tvaru (3) je

$$\frac{x^2}{2d} - \frac{y^2}{2d} = 1.$$

Máme tudíž dvě rovnice téže hyperboly, každou v jiné soustavě souřadnic (obr. 80): jednou jsme za osy soustavy souřadnic zvolili její asymptoty, podruhé osy hyperboly ⟨?⟩.

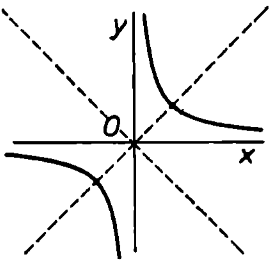
Již jsme si ukázali, jak můžeme dostat elipsu „stlačením" kružnice $x^2 + y^2 = a^2$. Stejně tak můžeme dostat hyperbolu $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ z hyperboly $x^2 - y^2 = a^2$ s kolmými asymptotami, stlačíme-li ji ve směru osy y v poměru $a : b$ (obr. 81).

Dvě hyperboly jsou podobné, mají-li stejný poměr $a : b$, nebo, což je totéž, svírají-li jejich asymptoty stejně velký úhel 2γ, $\operatorname{tg} \gamma = b/a$.

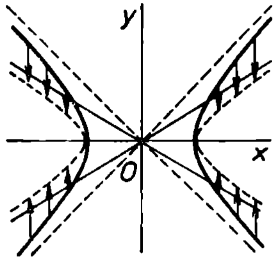
Odstranění odmocnin. Ukážeme zároveň, jak je možné dostat z rovnic (2′) a (3′) jednodušší tvary (2) a (3). Položme

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}}{2} \right)^2, \quad (3'')$$

$$z_2 = \left(\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2}}{2} \right)^2. \quad (2'')$$



Obr. 80



Obr. 81

Nechť je $x \neq 0$, $y \neq 0$. Snadno se přesvědčíme, že $0 < z_1 < z_2$, $z_1 + z_2 = x^2 + y^2 + c^2$, $z_1 z_2 = c^2 x^2$. Jsou tedy z_1, z_2 kořeny kvadratické rovnice (o neznámé z)

$$z^2 - (x^2 + y^2 + c^2)\, z + c^2 x^2 = 0. \quad (5)$$

Trojčlen na levé straně rovnice (5) je pro $z = c^2$ záporný, proto je $z_1 < c^2$, $z_2 > c^2$. Všimněme si, že rovnici (5) lze psát ve tvaru $x^2(z - c^2) + y^2 z = z(z - c^2)$, tedy

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z - c^2} = 1. \quad (5')$$

Ukážeme, že po dosazení a^2 za z je rovnicí (5′) dána elipsa (pro $a > c$) nebo hyperbola (pro $a < c$).

Nechť je $a > c > 0$. Víme, že pro $x \neq 0$, $y \neq 0$ jsou rovnicemi (3″) a (2″) dány menší a větší kořen rovnice (5′), přičemž $z_1 < c^2 < z_2$. Rovnici elipsy (2′) můžeme zřejmě psát ve tvaru $z_2 = a^2$, a protože z_2 je kořenem rovnice (5′), splňuje bod $[x; y]$ elipsy ($x \neq 0 \neq y$) rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1\,. \tag{6}$$

Obráceně, splňuje-li bod $[x; y]$ rovnici (6), je číslo $z = a^2$ kořenem rovnice (5′), a protože je $a^2 > c^2$, je a^2 větším kořenem rovnice (5′), tedy $a^2 = z_2$. Je tudíž pro $a > c$ rovnice (2′) ekvivalentní s rovnicí (6).

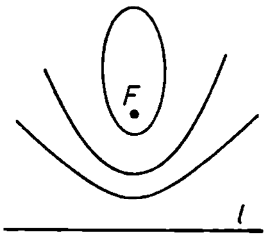
Analogicky můžeme dokázat, že pro $a < c$ jsou ekvivalentní rovnice (3′) a (6), že rovnice hyperboly $z_1 = a^2$ je totožná s rovnicí (6).

Snadno se ověří, že pro $x = 0$ nebo $y = 0$ je rovnice (6) ekvivalentní s rovnicí (2′) nebo (3′) podle toho, je-li $a > c$ nebo $a < c$.

Tím jsme dokázali, že rovnice (6) zahrnuje jak rovnici elipsy (2′), tak rovnici hyperboly (3′). Položíme-li $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (pro $a > c$) nebo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (pro $a < c$), dostaneme rovnice (2) a (3). Tak jsme přes rovnici (6) dokázali ekvivalentnost rovnic (2) a (2′) a také rovnic (3) a (3′). Ukázaný postup můžeme často použít, chceme-li odstranit odmocniny: vedle součtu (nebo rozdílu) druhých odmocnin uvažujeme také jejich rozdíl (nebo součet).

Konec abecedy. Uvažujme ještě jednu funkci v rovině, jejíž mapa obsahuje všechny tři typy křivek, se kterými jsme se seznámili v této kapitole. Bude to poslední písmeno naší abecedy.

R. *Nechť je dán bod F a přímka l, která jím neprochází. Množina všech bodů roviny, jejichž poměr vzdáleností od bodu F a od přímky l se rovná danému kladnému číslu k, je elipsa (pro $k < 1$), hyperbola (pro $k > 1$) nebo parabola (pro $k = 1$)* (obr. 82).



Obr. 82

K *důkazu* zvolíme soustavu souřadnic tak, jak jsme ji volili v případě paraboly. Naše množina má tedy rovnici

$$\frac{\sqrt{x^2 + (y - h)^2}}{|y + h|} = k;$$

pro $k = 1$ jsme již viděli, že je to rovnice paraboly $y = ax^2$, kde $a = 1/(4h)$. Pro $0 < k < 1$ ji můžeme ekvivalentními úpravami uvést na tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1 \text{ (elipsa)} \tag{7}$$

a pro $k > 1$ na tvar

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1 \text{ (hyperbola)}, \tag{8}$$

kde jsme v obou případech položili

$$a = 2kh/\sqrt{|k^2 - 1|}, \quad b = 2kh/|k^2 - 1|,$$
$$d = h(k^2 + 1)/(k^2 - 1).$$

Rovnice (7) a (8) dostaneme z kanonických rovnic (2) a (3) posunutím soustavy souřadnic a záměnou os x, y. V našem případě leží ohniska na ose y a středem je bod $[0; d]$. Můžeme se přesvědčit, že bod F je ohniskem nejen v případě paraboly, ale i v případě elipsy nebo hyperboly. Přímka l se i v těchto případech nazývá řídicí přímkou elipsy nebo hyperboly.

Tak jsme si ukázali, že hladinami funkce

$$f(M) = |MF|/\varrho(M, l)$$

jsou elipsy, hyperboly a jedna parabola.

Snadno jsme mohli uhodnout, že hladinami budou kuželosečky. Uvažujme totiž v rovině funkce $f_1(M) = |MF|$, $f_2(M) = k\varrho(M, l)$. Grafem první je část kuželové plochy, graf druhé funkce je dvojice polorovin, přičemž číslo k je tangens úhlu, který svírají poloroviny s horizontální rovinou. Průnikem těchto grafů je elipsa, parabola nebo hyperbola. Nás pak zajímají průměty obdržených křivek do horizontální roviny, tedy množiny

$$\{M : f_1(M) = f_2(M)\} = \{M : |MF| = k\varrho(M, l)\}.$$

Při rovnoběžném promítání se tvar křivky mění stejně jako při jejím stlačení ve směru kolmém k přímce l (v poměru $\sqrt{k^2 + 1} : 1$). Proto dostaneme opět elipsy, hyperboly a parabolu.

Jak jsme již několikrát ukázali, mají elipsa, hyperbola a parabola mnoho společných vlastností. To má prostý algebraický důvod: všechny jsou dány rovnicemi druhého stupně. Ovšem jejich charakteristické rovnice

$$y = ax^2,\ x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,$$
$$xy = d$$

dostaneme pouze při speciální volbě soustavy souřadnic, zvolíme-li soustavu souřadnic v obecné poloze, bude rovnice kuželosečky složitější. Není však těžké dokázat, že v libovolné soustavě souřadnic má rovnice kuželosečky tvar

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad (9)$$

kde alespoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly.

Je pozoruhodné, že platí i tvrzení obrácené: každá rovnice druhého stupně $p(x, y) = 0$, tj. rovnice tvaru (9), určuje kuželosečku. Přesněji řečeno, každá rovnice tvaru (9) definuje elipsu, hyperbolu nebo parabolu, pokud se její levá strana nedá rozložit na součin dvou lineárních činitelů (dostali bychom dvojici přímek) a pokud levá strana nabývá kladných i záporných hodnot (jinak bychom dostali bod, jednu přímku nebo prázdnou množinu). Odtud plyne společný název pro elipsy, hyperboly a paraboly; říkáme jim též *křivky druhého stupně.*

Věta, kterou jsme výše vyslovili, je velmi užitečná při hledání množin všech bodů dané vlastnosti. Vidíme-li, že v některé soustavě souřadnic je množina dána rovnicí druhého stupně, víme, že hledanou množinou je elipsa, hyperbola nebo parabola, ve výjimečném případě to může ovšem být i dvojice přímek, bod apod. Zbývá pak najít „rozměry“ kuželosečky a její polohu (ohniska, střed, asymptoty atd.).

6.18 Najděte množinu všech bodů roviny, pro které je součet vzdáleností od dvou daných kolmých přímek c-krát větší než jejich vzdálenost od průsečíku daných přímek.

6.19 Je dáno kladné číslo c a v rovině bod A a přímka l. Najděte množinu všech bodů, pro které je

a) součet vzdáleností od bodu A a přímky l roven c,

b) rozdíl vzdáleností od bodu A a přímky l v absolutní hodnotě roven c,

c) poměr vzdáleností od bodu A a od přímky l menší než c.

6.20 Určete množinu všech bodů, jejichž

a) součet,

b) rozdíl

druhých mocnin vzdáleností od dvou daných různoběžek l_1, l_2 je roven danému číslu d. Nakreslete hladiny odpovídajících funkcí:

a) $f(M) = \varrho^2(M, l_1) + \varrho^2(M, l_2)$,

b) $f(M) = \varrho^2(M, l_1) - \varrho^2(M, l_2)$.

6.21 V rovině je dán bod F a přímka l. Nakreslete hladiny funkcí

a) $f(M) = |MF|^2 + \varrho^2(M, l)$,

b) $f(M) = |MF|^2 - \varrho^2(M, l)$.

6.22 Kloub O kloubového rovnoběžníku $OPMQ$ je upevněn a ramena OP a OQ různých délek se otáčejí stejnou úhlovou rychlostí v opačných smyslech. Po jaké křivce se pohybuje bod M?

□ Nechť je $|OP| = p$, $|OQ| = q$. Protože se přímky OP a OQ otáčejí na různé strany, musí v jednom okamžiku splynout. Vezměme tento okamžik za výchozí čas $t = 0$ a splývající přímky za osu x, počátek soustavy souřadnic zvolíme v bodě O. Nechť se přímky OP a OQ otáčejí úhlovou rychlostí ω. Pak mají body P a Q v čase t souřadnice $P[p \cos \omega t; p \sin \omega t]$, $Q[q \cos \omega t; -q \sin \omega t]$. Proto má bod M souřadnice

$$x = (p + q) \cos \omega t\,, \quad y = (p - q) \sin \omega t\,,$$

neboť $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Leží tudíž bod M na elipse

$$\frac{x^2}{(p+q)^2} + \frac{y^2}{(p-q)^2} = 1 . \; \square$$

Při řešení úlohy jsme dostali elipsu jako množinu bodů $[x; y]$ se souřadnicemi

$$x = a \cos \omega t , \quad y = b \sin \omega t , \tag{10}$$

t probíhá množinu reálných čísel. Rovnice uvedeného typu, které vyjadřují souřadnice bodu množiny pomocí parametru t, se nazývají parametrické rovnice množiny. V daném případě byl parametr t čas.

6.23 V rovině se kolem bodů A, B otáčejí stejnou úhlovou rychlostí přímky. Jakou křivku opisuje jejich průsečík, otáčejí-li se přímky v opačných smyslech? ↓

6.24 Najděte v rovině množinu všech bodů M, pro které je $|\sphericalangle MBA| = 2|\sphericalangle MAB|$, kde AB je daná úsečka roviny. ↓

6.25 a) Uvažujme všechny úsečky, které z daného úhlu vytínají trojúhelník daného obsahu S. Dokažte, že středy těchto úseček leží na téže hyperbole Γ, jejímiž asymptotami jsou ramena daného úhlu. ↓

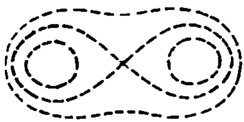
b) Dokažte, že všechny tyto úsečky se dotýkají téže hyperboly Γ. ↓

c) Dokažte, že úsečka s krajními body na asymptotách dané hyperboly, které se dotýká, je bodem dotyku půlena. ↓

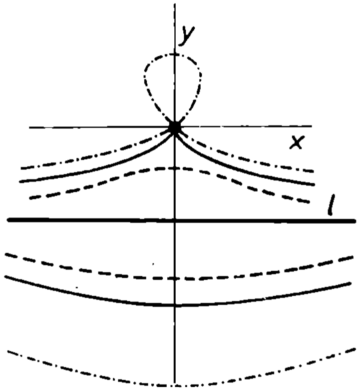
6.26 a) Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, $|AC| = |BC|$. Najděte množinu všech bodů M roviny, jejichž vzdálenost od přímky AB je rovna geometrickému průměru jejich vzdáleností od přímek AC a BC.

b) Tři přímky tvoří rovnostranný trojúhelník. Určete množinu všech bodů M roviny trojúhelníku, pro které je vzdálenost od některé z daných přímek rovna geometrickému průměru vzdáleností od zbývajících dvou přímek.

6.27 Tři vrcholy kosočtverce leží postupně na stranách AB, BC a CD daného čtverce. Kde leží čtvrtý vrchol kosočtverce?



Obr. 83



Obr. 84

Algebraické křivky. Množiny bodů v různých geometrických úlohách nemusí být samozřejmě vždy přímkami nebo kuželosečkami. Ukážeme si dva příklady.

Množina všech bodů roviny, jejichž součin vzdáleností od dvou daných bodů F_1 a F_2 se rovná danému kladnému číslu p, se nazývá *Cassiniho ovál* (obr. 83). Je hladinou funkce

$$f(M) = |MF_1| . |MF_2| .$$

Při vhodné volbě soustavy souřadnic má proto rovnici

$$[(x - c)^2 + y^2]\,[(x + x)^2 + y^2] = p^2,$$
$$\text{kde } 2c = |F_1F_2|.$$

Pro $p = c^2$ má Cassiniho ovál tvar ležaté osmičky a nazývá se *Bernoulliho lemniskata*, pro $p < c^2$ se skládá ze dvou částí.

A ještě jeden příklad. Nechť je dán bod F a přímka l, která jím neprochází. Označme $q(M)$ vzdálenost bodu M od průsečíku přímek FM a l. Množina $\{M : q(M) = d\}$ se pro každé kladné číslo d nazývá *Nikomedova konchoida* (obr. 84). Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, že počátek splyne s bodem F a přímka l bude mít rovnici $y + a = 0$, má Nikomedova konchoida rovnici

$$(x^2 + y^2)\,(y + a)^2 - d^2y^2 = 0.$$

Obecně se každá křivka, která je dána rovnicí $P(x, y) = 0$ a $P(x, y)$ je mnohočlen v proměnných x, y, nazývá *algebraickou křivkou.* Stupeň polynomu P je jejím stupněm. Jsou tedy Cassiniho ovál i Nikomedova konchoida algebraické křivky čtvrtého stupně.

Již z uvedených dvou příkladů je vidět, že algebraické křivky vyšších stupňů mohou vznikat různými zajímavými způsoby, mohou mít body vratu a mohou samy sebe protínat (konchoida pro $a = d$ nebo pro $a < d$). Jejich tvar se může podstatně měnit při změně parametrů. S některými se ještě seznámíme v další kapitole.