Přímky a křivky

Kapitola 5. Hladiny

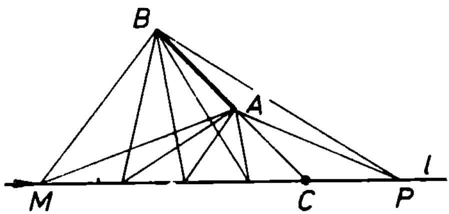
In: N. B. Vasiljev (author); V. L. Gutenmacher (author); Leo Boček (translator); Alena Šarounová (illustrator): Přímky a křivky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 72–87.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404056

Kapitola 5

HLADINY

V této kapitole pojednáme o úlohách a větách předcházejících kapitol, budeme je však formulovat v jiné terminologii. Seznámíme se s pojmem funkce definované v rovině a s pojmem hladiny funkce, které jsou zvlášť vhodné při řešení úloh na maximum a minimum.



Obr. 45

5.1 Úloha o autobusu. Po přímé silnici jede zájezdový autobus. Stranou od silnice stojí palác, jehož průčelí svírá se silnicí jistý úhel. V kterém místě na silnici má autobus zastavit, aby si cestující mohli z autobusu průčelí paláce nejlépe prohlédnout?

Matematicky můžeme úlohu formulovat takto:

Je dána přímka l a úsečka AB, která ji neprotíná. Na přímce l najděte bod P tak, aby úhel APB byl co největší (obr. 45).

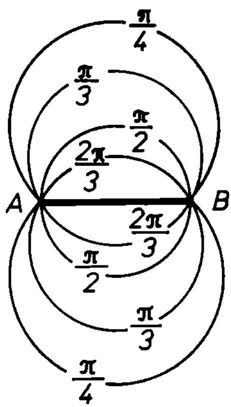
Nejdříve se podívejme, jak se asi mění úhel AMB, pohybuje-li se bod M po přímce l. Jinými slovy, jak se chová funkce f, která každému bodu M přímky l přiřazuje velikost úhlu AMB.

Lehce můžeme sestrojit přibližný graf této funkce. Připomeňme, že graf se sestrojí takto: nad každým bodem M naší přímky zvolíme bod ve vzdálenosti $f(M) =$ $= |\sphericalangle AMB|$.

Úlohu bychom mohli řešit analyticky: zavést na přímce l soustavu souřadnic a vyjádřit velikost úhlu AMB pomocí souřadnice x bodu M a pak zjistit, pro kterou hodnotu x nabývá funkce svého maxima. Avšak vyjádření funkce $f(x)$ je poměrně složité.

Podáme elementárnější a poučnější řešení. K tomu bude třeba zjistit, jak závisí velikost úhlu AMB na poloze bodu M, když bod M probíhá celou rovinu, nejen přímku l.

□ Množina všech bodů M v rovině, pro něž má úhel



Obr. 46

ABM danou velikost φ, je dvojice souměrně sdružených kruhových oblouků s krajními body A, B (kap. 2, E). Tyto oblouky, probíhá-li φ interval $(0, \pi)$, pokrývají celou rovinu s výjimkou přímky AB. Například hodnotě $\varphi = \pi/2$ odpovídá kružnice nad průměrem AB (obr. 46).

Budeme nyní zkoumat pouze body M, ležící na přímce l. Z nich máme vybrat bod, pro který je úhel AMB největší. S výjimkou průsečíku C přímky l s přímkou AB prochází každým bodem přímky l oblouk našeho systému; je-li $|\sphericalangle AMB| = \varphi$, leží bod M na oblouku odpovídajícím hodnotě φ. Máme tedy ze všech uvažovaných oblouků, které mají společný bod s přímkou l, vybrat ten, který odpovídá největší hodnotě φ.

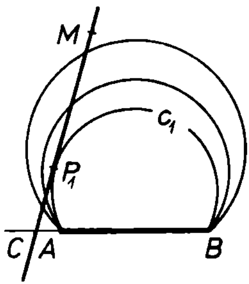
Uvažujme jen jednu z polopřímek, na které dělí přímku l bod C. (Případ, kdy přímka l je rovnoběžná s úsečkou AB, přenecháme čtenáři.) Sestrojíme oblouk c_1, který se dotýká zvolené polopřímky, a dokážeme, že z bodu dotyku P_1 je úsečka AB vidět pod největším úhlem (obr. 47). Skutečně, libovolný bod M naší polopřímky různý od bodu P_1 leží vně oblouku c_1. Odtud plyne (kap. 2, E), že $|\sphericalangle AMB| < |\sphericalangle AP_1B|$.

Je zřejmé, že pro druhou polopřímku je situace stejná; bod P_2, ze kterého je vidět úsečka AB pod největším úhlem, je bodem dotyku této polopřímky a jednoho z uvažovaných oblouků.

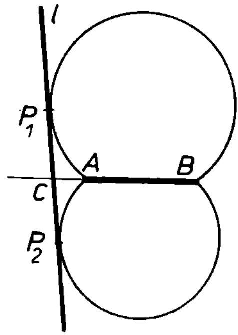
Tím jsme dokázali, že hledaný bod P splývá s jedním z bodů P_1, P_2, ve kterých se dotýkají kružnice procházející body A, B přímky l (obr. 48). Bod P splyne s tím z bodů P_1, P_2, pro který je úhel PCA ostrý. Je-li úsečka AB kolmá k přímce l, je ze symetrie zřejmé, že oba body P_1 a P_2 splňují podmínky úlohy. Avšak výletníci si musí v každém případě vybrat z bodů P_1, P_2 ten, ze kterého vidí průčelí paláce. □

Funkce definované v rovině. Základní myšlenka řešení úlohy 5.1 spočívala v tom, že jsme na celé rovině uvažovali funkci f, která každému bodu M přiřazovala velikost úhlu AMB, tj. $f(M) = |\sphericalangle AMB|$.

V předcházejících paragrafech jsme se vlastně už setkali s různými funkcemi v rovině. Kromě nejjednodušších funkcí v rovině, jako $f(M) = |OM|$, $f(M) = \varrho(l, M)$, $|f(M) = |\sphericalangle ABM|$ (kde O, A, B jsou dané



Obr. 47



Obr. 48

body a l daná přímka), jsme zkoumali součty, rozdíly, poměry těchto funkcí a jiné jejich kombinace.

Hladiny funkcí. Mnoho podmínek, kterými jsme definovali množiny bodů, je možno formulovat takto: v rovině nebo v její části je definována funkce f a je třeba najít množinu všech bodů M, ve kterých tato funkce nabývá dané hodnoty h, tj. $\{M : f(M) = h\}$.

Zpravidla je touto množinou pro každé pevné číslo h křivka; rovina se tímto způsobem rozkládá na křivky, které se nazývají hladinami (někdy též vrstevnicemi) funkce f. Při řešení úlohy 5.1 jsme tedy zkoumali hladiny funkce $f(M) = |\sphericalangle AMB|$.

Graf funkce. Vysvětlíme si nyní pojem hladina funkce. Pro funkce definované v rovině je možné sestrojit graf v podstatě stejně jako pro funkce $y = f(x)$ definované na přímce, jen s tím rozdílem, že to bude útvar v prostoru. Budeme předpokládat, že rovina, na které je funkce definována, je horizontální, a pro každý její bod M vyznačíme v prostoru bod ležící nad bodem M ve vzdálenosti $f(M)$, je-li $f(M) \geqq 0$, a pod bodem M ve vzdálenosti $|f(M)|$, je-li $f(M) < 0$. Všechny takto vyznačené body tvoří plochu, která se nazývá grafem funkce f. Jinými slovy, zavedeme v horizontální rovině soustavu souřadnic Oxy; kladná část osy z nechť směřuje kolmo vzhůru. Grafem funkce bude množina bodů se souřadnicemi $[x; y; z]$, kde $z = f(M)$ a $[x; y]$ jsou souřadnice bodu M v rovině. (Není-li funkce definována ve všech bodech roviny, ale jen v bodech její jisté části, leží graf jen nad touto částí.)

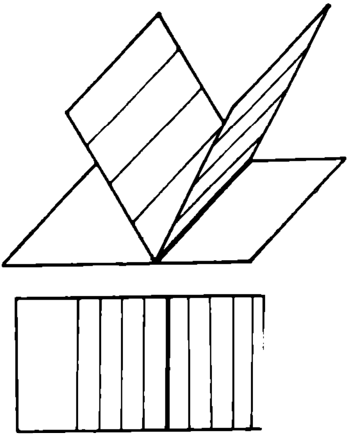
Vidíme, že hladina $\{M : f(M) = h\}$ se skládá z těch bodů M, nad kterými jsou body grafu ve stejné úrovni, ve výšce h.

Na následujících obrázcích jsou znázorněny grafy funkcí, jejichž hladinami jsou množiny naší abecedy. U každého grafu je též obrázek vyznačující hladiny příslušné funkce.

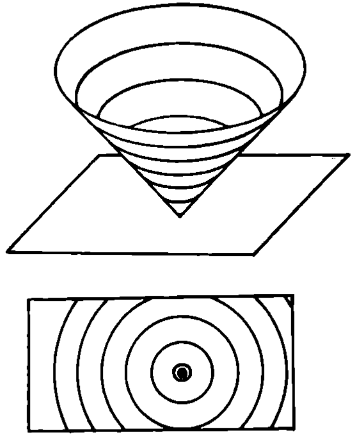
C. $f(M) = \varrho(M, l)$, grafem je hranice klínu, hladinami jsou dvojice rovnoběžných přímek (obr. 49).

D. $f(M) = |MO|$, grafem je část kuželové plochy, hladinami jsou soustředné kružnice (obr. 50).

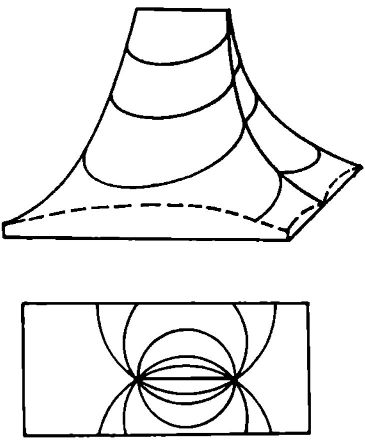
E. $f(M) = |\sphericalangle AMB|$, grafem je „horský hřbet“, nejvyšší body tvoří horizontální úsečku ve výšce π nad úsečkou AB; v krajních bodech horizontální



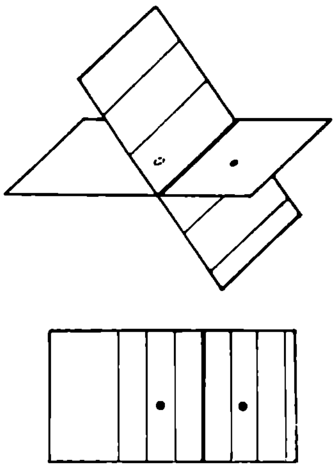
Obr. 49



Obr. 50



Obr. 51



Obr. 52

úsečky jsou vertikální srázy, z ostatních bodů lze zvolna sestoupit k nulové hladině, kterou tvoří přímka AB s výjimkou úsečky AB (obr. 51).

F. $f(M) = |MA|^2 - |MB|^2$, grafem je rovina, hladinami navzájem rovnoběžné přímky (obr. 52).

G. $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$, grafem je rotační paraboloid, hladinami soustředné kružnice (obr. 53).

H. $f(M) = |MA| / |MB|$, graf má v bodě A důlek, u bodu B se zdvíhá nade všechny meze; hladinami jsou kružnice, jejichž středy leží na přímce AB, každé dvě z nich mají za svou chordálu osu úsečky AB. Ta je sama též hladinou odpovídající hodnotě 1 (obr. 54).

J. $f(M) = \varrho(M, l_1)/\varrho(M, l_2)$, graf se skládá ze dvou částí hyperbolických paraboloidů, hladinami jsou dvojice přímek procházejících průsečíkem přímek l_1, l_2 (obr. 55).

K. $f(M) = \varrho(M, l_1) + \varrho(M, l_2)$, grafem je část čtyřboké jehlanové plochy, hladinami jsou pravoúhelníky s úhlopříčkami na přímkách l_1, l_2 (obr. 56).

Funkce

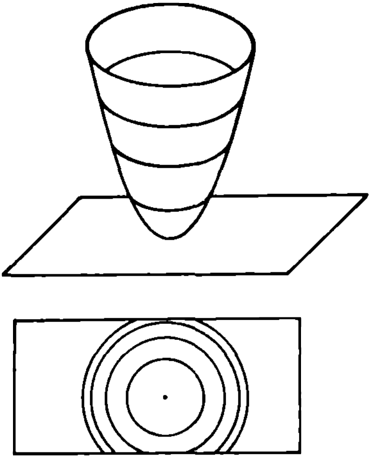
$$f(M) = \lambda_1\varrho(M, l_1) + \lambda_2\varrho(M, l_2) + \ldots + \lambda_n\varrho(M, l_n),$$

o které jsme hovořili v kap. 2 (věta o vzdálenostech od přímky), má v každé části Q, na kterou je rovina rozdělena přímkami l_1, l_2, ..., l_n, tvar

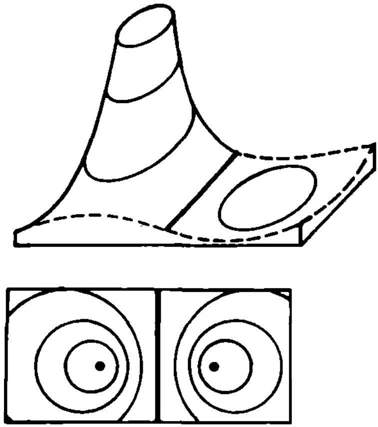
$$f(x, y) = ax + by + c,$$

je tedy lineární. Proto se její graf bude skládat z kousků rovin, které jsou buď nakloněné, nebo (je-li $a = b = 0$) horizontální. To jsme viděli na příkladech množin v bodech C, J, K naší abecedy.

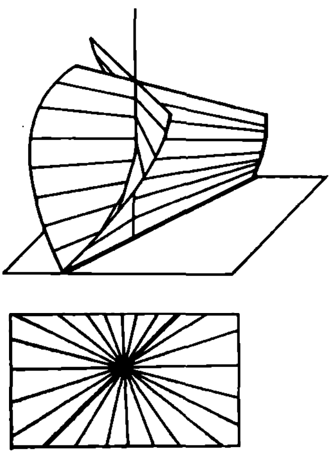
Hladiny takové funkce se skládají z kousků přímek;



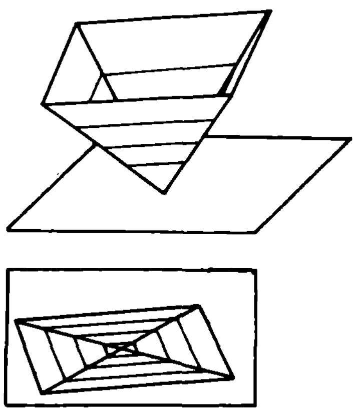
Obr. 53



Obr. 54



Obr. 55

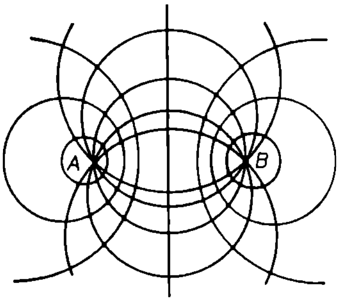


Obr. 56

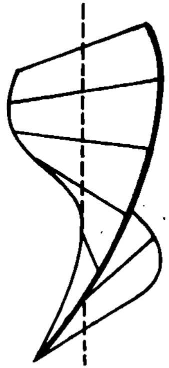
obsahuje-li graf horizontální plošinku, obsahuje některá hladina celou část Q roviny.

Funkce f tvaru $f(M) = \lambda_1|MA_1|^2 + \lambda_2|MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n|MA_n|^2$ je v případě $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$ také lineární funkcí definovanou na celé rovině (příklad F) a v obecném případě při $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \neq 0$ se dá psát ve tvaru

$$f(M) = d|MA|^2,$$



Obr. 57



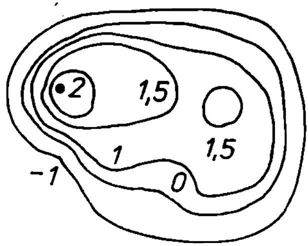
Obr. 58

kde A je jistý bod roviny. V tomto případě jsou hladinami kružnice (věta o druhých mocninách vzdáleností §2) a grafem je rotační paraboloid.

Nejsložitější grafy v naší abecedě mají funkce $f(M) = |\sphericalangle AMB|$ a $f(M) = |AM| / |BM|$. Poznamenejme, že mezi hladinami těchto funkcí je zajímavý vztah: jsou to dva systémy kružnic, přičemž každá kružnice jednoho systému protíná každou kružnici druhého systému kolmo ⟨?⟩; říkáme jim ortogonální systémy (obr. 57).

Ukážeme ještě jeden příklad jednoduché funkce, jejíž hladiny jsou polopřímky vycházející z jednoho bodu a grafem je poměrně složitá plocha. Je to funkce $f(M) = |\sphericalangle MAB|$, kde A, B jsou dané body roviny. Jejím grafem je nad každou polorovinou, na kterou dělí rovinu přímka AB, šroubová plocha, *helikoid* (obr. 58).

Mapa funkce. Jak vidíme, pro mnohé funkce je dost složité sestrojit jejich graf. Pro představu o průběhu funkce je zpravidla výhodnější zakreslit si její hladiny.



Obr. 59

Geografická mapa se sestavuje tímto způsobem: nechť je $f(M)$ nadmořská výška v místě M. Narýsují se hladiny $\{M : f(M) = 200 \text{ m}\}$, $\{M : f(M) = 400 \text{ m}\}$ atd. Oblasti mezi těmito vrstevnicemi se vyznačují různými barvami: oblast $\{M : 0 < f(M) < 200 \text{ m}\}$ zeleně, oblasti $\{M : f(M) > 200 \text{ m}\}$ hnědě a oblasti $\{M : f(M) < 0\}$ různými odstíny modré.

K sestavení mapy funkce je třeba narýsovat několik jejích hladin — dostatečně mnoho, aby z nich bylo možné usoudit na průběh ostatních — a připsat ke každé z nich hodnotu funkce, které tato hladina odpovídá.

Narýsujeme-li hladiny odpovídající rovnoměrně rostoucím funkčním hodnotám, dá se z jejich hustoty usoudit na strmost grafu: hladiny jsou hustěji rozloženy tam, kde je graf strmější (obr. 59).

Dělicí křivky. Při řešení úlohy 3.23 o sýru jsme zkoumali poměrně složitou funkci

$$f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, \ldots, |MC_n|\},$$

která přiřazuje každému bodu jeho nejmenší vzdálenost od bodů $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Při vlastním řešení úlohy nás ani tak nezajímala samotná funkce, jako s ní svázané křivky, které dělily rovinu na oblasti; každá oblast byla průnikem polorovin. Zkusme si představit mapu a graf této funkce. Začneme u nejjednodušších případů $n = 2$ a $n = 3$.

5.2 a) V rovině jsou dány různé body C_1 a C_2. Nakreslete hladiny funkce $f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|\}$.

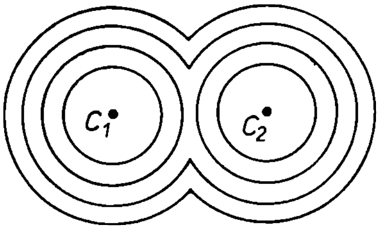
b) V rovině jsou dány body C_1, C_2, C_3, které neleží na přímce. Nakreslete hladiny funkce

$$f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, |MC_3|\}.$$

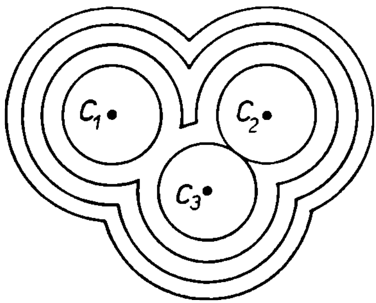
□ a) Vezměme nejdříve množinu všech bodů M, pro které je $|MC_1| = |MC_2|$. Touto množinou je osa úsečky C_1C_2, která dělí rovinu na dvě poloroviny, a až na body společné přímky jsou body jedné poloroviny blíž k bodu C_1, body druhé poloroviny blíž k bodu C_2. V první polorovině tudíž platí $f(M) = |MC_1|$ a ve druhé $f(M) = |MC_2|$. Sestrojíme tedy v první polorovině hladiny funkce $f(M) = |MC_1|$, což jsou kružnice (přesněji průniky kružnic s uvažovanou polorovinou) a výslednou mapu ještě doplníme obrazem souměrně sdruženým podle osy úsečky C_1C_2 (obr. 60).

b) Uvažujme množiny $\{M : |MC_1| = |MC_2| \leqq |MC_3|\}$, $\{M : |MC_2| = |MC_3| \leqq |MC_1|\}$, $\{M : |MC_1| = |MC_3| \leqq$

$\leqq |MC_2|\}$. To jsou tři polopřímky na osách stran trojúhelníku $C_1C_2C_3$, které vycházejí ze společného bodu O a dělí rovinu na tři oblasti (viz úloha 3.1). V oblasti, která obsahuje bod C_1, platí $f(M) = |MC_1|$, v oblasti s bodem C_2 je $f(M) = |MC_2|$ a ve třetí oblasti platí $f(M) = |MC_3|$. Mapu funkce $f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, |MC_3|\}$ dostaneme tedy takto: v první oblasti vezmeme mapu funkce $f(M) = |MC_1|$, ve druhé mapu funkce $f(M) = |MC_2|$ a ve třetí funkce $f(M) = |MC_3|$ a tyto tři mapy slepíme podél dělicích křivek, kterými jsou tři polopřímky (obr. 61). □



Obr. 60



Obr. 61

Graf funkce

$$f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, \ldots, |MC_n|\}$$

si můžeme představit takto: nasypeme do truhlíku rovnou vrstvu písku a v bodech $C_1, C_2, \ldots, C_n$ provrtáme do dna truhlíku dírky, kterými část písku vypadne; kolem každé dírky se vytvoří „trychtýř". Plocha tvořená všemi těmito trychtýři je grafem funkce f. Předpokládáme ovšem, že jsme vzali dostatečně silnou vrstvu písku tak sypkého, aby sklon trychtýřů byl 45°.

Vraťme se teď k úlohám 3.11 a 3.12. Jejich podmínky lze také formulovat pomocí funkcí definovaných v rovině.

5.3 V rovině jsou dány různé body A, B. Zakreslete hladiny funkcí

a) $f(M) = \max\{|\sphericalangle AMB|, |\sphericalangle BAM|, |\sphericalangle MBA|\}$,

b) $f(M) = \min\{|AM|, |MB|, |AB|\}$

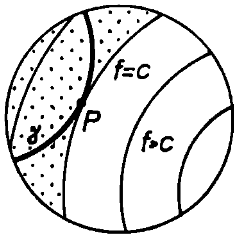
a popište jejich grafy.

Extrémy funkce. Nechť je f funkce definovaná v rovině. Představme si její graf jako kopcovitou krajinu. Maximální hodnoty $f(M)$ odpovídají výškám kopců grafu a minimální hodnoty jsou úrovně proláklin.

Na mapě funkce jsou vrcholy a prolákliny zpravidla obepnuty hladinami. Například funkce $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$ nabývá svého minima ve středu M_0 úsečky AB a hladinami jsou soustředné kružnice se středem v bodě M_0.

Složitější mapu dostaneme pro funkci $f(M) = |\sphericalangle AMB|$. Tato funkce nabývá své maximální hodnoty π ve všech bodech úsečky AB (s výjimkou bodů A, B, ve kterých není definována). Své minimální hodnoty 0 nabývá ve všech ostatních bodech přímky AB. Přechod od maximální hodnoty k minimální není v bodech A, B plynulý, graf má v těchto bodech vertikální srázy.

Na začátku paragrafu jsme použili mapu hladin funkce při řešení úlohy 5.1. Byla to také úloha na hledání maxima funkce, avšak jiného typu. Obecně se úloha formuluje takto: určete, jakou největší nebo nejmenší hodnotu nabývá funkce f (definovaná v rovině)



Obr. 62

v bodech dané křivky γ. V uvažované úloze byla křivka přímkou. Postup, který jsme uplatnili v úloze 5.1, lze užít i v jiných obdobných úlohách. Funkce nabývá zpravidla své největší a nejmenší hodnoty na křivce γ v některém z těch bodů, ve kterých se křivky γ dotýká hladina funkce. Prochází-li však křivka bodem, ve kterém nabývá funkce své největší nebo nejmenší hodnoty v celé rovině, nabývá zřejmě v tomto bodě také své největší nebo nejmenší hodnoty na křivce γ.

Nechť funkce f nabývá své maximální hodnoty na křivce γ v bodě P a je $f(P) = c$. Pak křivka γ nemůže mít společný bod s oblastí $\{M : f(M) > c\}$, musí celá ležet v doplňku $\{M : f(M) \leqq c\}$, přičemž bod P leží na dělicí křivce mezi těmito oblastmi, na hladině $\{M :$

$: f(M) = c\}$. Křivka γ nemůže tedy protínat hladinu $\{M : f(M) = c\}$, musí se jí v bodě P dotýkat (obr. 62).

Viděli jsme, jak se tento princip „dotyku“ uplatnil při hledání extrémů v úlohách paragrafu 4. V těchto úlohách jsme hledali maximum nebo minimum jednoduchých funkcí $f(M) = \varrho(M, l)$, $f(M) = |\sphericalangle MOA|$, $f(M) = |MA|$ na dané křivce γ. Hladina odpovídající extremální hodnotě se dotýkala křivky γ. Křivkou γ byla vždy kružnice. Také některé následující úlohy vedou na hledání maxima nebo minima funkce na dané kružnici nebo přímce.

5.4 a) Na přeponě pravoúhlého trojúhelníku najděte takový bod, aby jeho průměty na odvěsny měly nejmenší vzdálenost.

b) Na dané přímce najděte bod M tak, aby vzdálenost jeho průmětů na ramena daného úhlu byla nejmenší. ↓

5.5 Je dána kružnice se středem O a její vnitřní bod A. Najděte na kružnici bod M, pro který je velikost úhlu AMO nejmenší.

5.6 Jsou dány body A, B. Na dané kružnici γ najděte bod M, pro který je

a) součet

b) rozdíl

druhých mocnin vzdáleností bodu M od bodů A a B minimální.

5.7 Je dána přímka l a s ní rovnoběžná úsečka AB. Najděte na přímce l ty body M, pro které je hodnota $|AM| / |BM|$ nejmenší nebo největší. ↓

5.8 Poblíž jezera vedou dvě přímé cesty. Pro který bod na břehu jezera je součet jeho vzdáleností od obou cest nejmenší? Uvažujte případ, kdy má jezero tvar a) kruhu, b) pravoúhelníku.

Poznamenejme, že i při hledání maxima funkce $y = f(x)$ jedné proměnné se uplatňuje „princip dotyku". Nechť je narýsován graf funkce f, kterým je nějaká křivka. Najít maximum funkce f znamená najít nejvyšší bod grafu. Stačí tedy najít přímku, která se „dotýká" grafu, je rovnoběžná s osou x a celý graf leží pod ní.