Přímky a křivky

Kapitola 1. Množiny bodů

In: N. B. Vasiljev (author); V. L. Gutenmacher (author); Leo Boček (translator); Alena Šarounová (illustrator): Přímky a křivky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 12–26.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404052

Kapitola 1

MNOŽINY BODŮ

V této kapitole pojednáme o základních typech úloh probíraných v naší knížce. Budeme je ilustrovat na příkladech a ukážeme pojmy a postupy užívané při jejich řešení. Kapitola je zakončena řadou různých geometrických úloh.

Probereme nejprve termín, který se v knize vyskytuje nejčastěji a který stojí i v nadpise kapitoly.

Množina bodů je velmi obecný pojem. Může to být libovolný útvar: jeden nebo několik bodů, přímka nebo rovinná oblast.

V mnohých úlohách naší knížky se hledá množina bodů vyhovujících jisté podmínce. Řešením úloh jsou zpravidla útvary známé ze školské geometrie (přímky, kružnice nebo obrazce jimi ohraničené aj.). Hlavní je odhadnout, o jaký útvar se jedná. V úloze 0,1 o kotěti jsme zjistili, že řešením je kružnice, a v úloze 0.3 úsečka.

Při řešení úloh je třeba přesvědčit se o tom, že

a) všechny body splňující danou podmínku patří do zjištěného útvaru,

b) všechny body uvažovaného útvaru vyhovují dané podmínce.

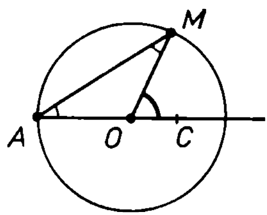
Někdy jsou obě tato tvrzení zřejmá, jindy jen některé z nich; a jindy je vůbec těžké se dopátrat řešení.

Rozebereme několik charakteristických úloh.

1.1 Bod O leží na úsečce AC. Určete množinu bodů M, pro které platí $|\sphericalangle MOC| = 2\,|\sphericalangle MAC|$ (obr. 7).

□ Řešením je sjednocení kružnice o středu O a poloměru $|OA|$ (s vyloučením bodu A) a polopřímky OC (s vyloučením bodu O).

Přesvědčíme se o tom. Nechť bod M hledané množiny neleží na přímce AO. Dokážeme, že $|MO| = |AO|$.



Obr. 7

Sestrojíme trojúhelník OAM. Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku je velikost úhlu $\sphericalangle MOC$ rovna součtu velikostí vnitřních úhlů při vrcholech A a M, tj.

$$|\sphericalangle OAM| + |\sphericalangle AMO| = |\sphericalangle MOC| = 2\,|\sphericalangle MAO|.$$

Takže z podmínky, kterou má bod M splňovat, dostáváme hned $|\sphericalangle OAM| = |\sphericalangle AMO|$, tj. trojúhelník AMO je rovnoramenný, tedy $|OM| = |AO|$.

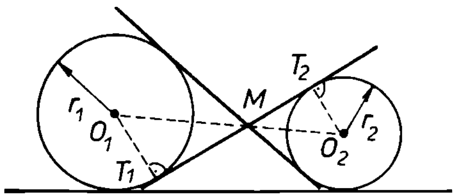
Ukážeme, že platí i obráceně: každý bod M popsané kružnice splňuje výše uvedenou podmínku. Skutečně, trojúhelník AMO je rovnoramenný, velikosti jeho úhlů při vrcholech A a M jsou stejné, a opět podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku dostáváme $|\sphericalangle MOC| = 2\,|\sphericalangle MAC|$.

Pokud bod M leží na polopřímce OC, $M \neq O$, je

$\sphericalangle MOC| = 2|\sphericalangle MAC| = 0$ a podmínka je rovněž splněna.

Zbývající body přímky AO už nepatří do hledané množiny, neboť pro ně je $\sphericalangle MOC$ přímý a $\sphericalangle MAC$ nulový nebo přímý. (Přičemž o bodu O se nedá nic říci.) □

1.2 Ke každé dvojici kružnic o poloměrech r_1, $r_2(r_1 > r_2)$, které se dotýkají přímky l a leží v pevně zvolené



Obr. 8

polorovině ohraničené přímkou l, sestrojíme průsečík M jejich vnitřních tečen. Určete množinu všech těchto průsečíků M (obr. 8).

□ Řešením je přímka rovnoběžná s přímkou l.

Všimněme si, že bod M leží na ose symetrie obou kružnic, tj. na přímce O_1O_2, kde jsme O_1, O_2 označili středy kružnic. Stačí tedy hledat množinu průsečíků přímky O_1O_2 a tečny T_1T_2 (kde T_1, T_2 značí body dotyku).

Znázorněme si úlohu na obrázku a vyznačme poloměry v bodech dotyku, tj. O_1T_1 a O_2T_2. Vidíme, že bod M dělí úsečku O_1O_2 v poměru $r_1 : r_2$ (neboť pravoúhlé trojúhelníky MO_1T_1 a MO_2T_2 jsou si podobné). Je zřejmé, že množina středů O_1 i množina středů O_2 jsou přímky rovnoběžné s přímkou l. Množina bodů M, které dělí úsečky o krajních bodech na těchto přímkách v daném poměru $r_1 : r_2$, je rovněž přímka rovnoběžná s přímkou l.

Množina průsečíků vnitřních tečen je tedy rovnoběžka s přímkou l (ve vzdálenosti $2r_1r_2 : (r_1 + r_2)$ od ní). □

Při řešení následující úlohy bude hledání pracnější. Bude třeba rozdělit rovinu na několik částí a v každé z nich provést vyšetřování zvlášť.

1.3 Je dán pravoúhelník $ABCD$. Najděte všechny takové body v rovině pravoúhelníku, pro které je součet jejich vzdáleností od přímek AB a CD roven součtu jejich vzdáleností od přímek BC a AD.

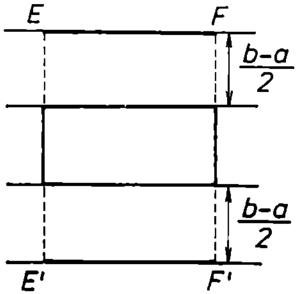
□ Označme délky stran pravoúhelníku a, b. Nejdříve vyšetříme případ, kdy pravoúhelník není čtvercem; nechť je $a < b$.

Body ležící uvnitř obdélníku, dokonce všechny body v pásu sevřeném přímkami, které jsou prodloužením delších stran obdélníku, nesplňují požadavky úlohy, protože jeden součet je roven a a druhý je větší nebo roven b.

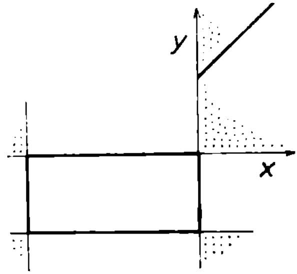
Nechť bod M leží vně obdélníku v pásu s hraničními přímkami, které jsou prodloužením kratších stran obdélníku. Označme y jeho vzdálenost od té delší strany obdélníku, která leží k němu blíž. Pak je vzdálenost od druhé strany rovna $y + a$. K tomu, aby bod splňoval podmínku úlohy, je třeba, aby platilo $y + (y + a) = b$, tj. $y = (b - a)/2$. Vidíme tedy, že z bodů ležících v tomto pásu vyhovují podmínce právě ty body, které leží vně obdélníku ve vzdálenosti $(b - a)/2$ od bližší z obou delších stran.

Vyhovují tudíž dvě úsečky EF a $E'F'$ (obr. 9).

Nakonec vezmeme bod M, který leží v úhlu, jehož ramena jsou tvořena polopřímkami opačnými k polopřímkám CD a CB. Označíme x vzdálenost bodu M od přímky CB a y vzdálenost bodu M od přímky CD.



Obr. 9



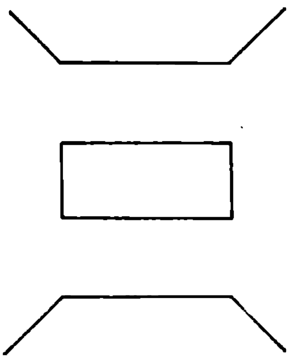
Obr. 10

Potom podmínka úlohy dává $x + (x + b) = y + (y + a)$, tj. $y = x + (b - a)/2$. Všimněme si, že čísla x, y je možno chápat jako souřadnice bodu M v soustavě souřadnic s osami CD, CB. V této soustavě souřadnic popisuje rovnice $y = x + (b - a)/2$ přímku rovnoběžnou s osou úhlu DCB. Tím jsme ukázali, že z bodů uvažovaného úhlu podmínku úlohy splňují ty a jen ty body, které leží na přímce $y = x + (b - a)/2$ (obr. 10).

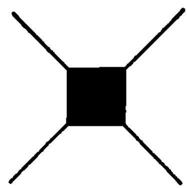
Stejnou úvahu lze provést i pro úhly ve zbývajících třech vrcholech obdélníku. Tím budou vyšetřeny všechny body v rovině. Množina všech bodů vyhovujících dané podmínce je znázorněna na obrázku 11.

Zbývá ještě vyšetřit případ, kdy daný pravoúhelník je čtverec, tj. $a = b$. Lehko se zjistí, že hledanou množinou je pak daný čtverec s celým svým vnitřkem a prodloužení jeho úhlopříček (obr. 12) ⟨?⟩. □

Všimněme si ještě, že pravoúhelník má dvě osy symetrie, a protože dvojice symetrických stran vzhledem k těmto osám vystupují v podmínce úlohy též symetricky, musí být hledaná množina také podle těchto dvou os symetrická. Z toho plyne, že při řešení není třeba vyšetřovat body celé roviny, ale stačí prozkoumat jednu ze čtyř částí, na které je rovina rozdělena uvedenými osami symetrie. V případě čtverce jsou všechny jeho čtyři osy symetrie také osami symetrie hledané množiny.



Obr. 11



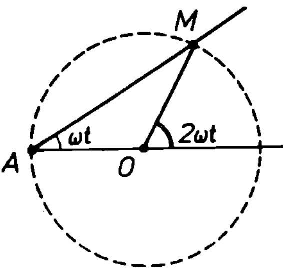
Obr. 12

Systémy křivek a pohyb. Vedle množin bodů budeme vyšetřovat i *množiny křivek* neboli, jak se častěji říká, *soustavy křivek.*

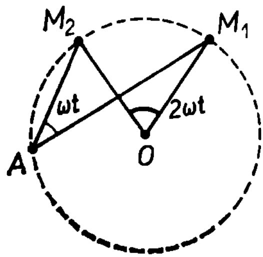
Pracujeme-li v geometrických úlohách se soustavou kružnic nebo přímek, je někdy výhodné představit si tuto soustavu jako jednu pohybující se kružnici nebo přímku. Za pomoci pohybu jsme už formulovali a řešili první úlohy a tento přístup použijeme vícekrát i v dalším výkladu, neboť velmi názorně objasňuje mnohé úlohy a věty.

Příklad nemusíme hledat daleko. Vraťme se k úloze 1.1. Její znění a řešení můžeme formulovat takto:

Nechť se přímka AM otáčí kolem bodu A s konstantní úhlovou rychlostí ω (tj. otočí se o úhel ω za jednotku času) a přímka OM se otáčí kolem bodu O v témže



Obr. 13



Obr. 14

smyslu s úhlovou rychlostí 2ω, přičemž v počátečním stavu obě přímky splývají s přímkou AO. Pak průsečík M těchto přímek opíše kružnici se středem O (obr. 13).

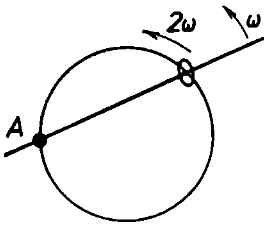
Z toho můžeme odvodit větu o středovém a obvodovém úhlu.

Otočí-li se přímka AM za čas t z polohy AM_1 do polohy AM_2 o úhel ωt, pak přímka OM se otočí o úhel $2\omega t$, jinými slovy *velikost obvodového úhlu M_1AM_2 je rovna polovině velikosti středového úhlu M_1OM_2* (obr. 14).

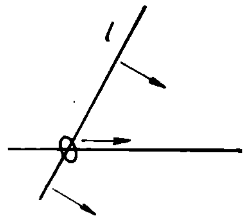
Ještě názorněji je možné formulovat předcházející větu takto:

Věta o prstenci na kružnici. *Navlékněme na drátěnou kružnici malinký prstenec. Kolem bodu A ležícího na kružnici se otáčí tyčka, která prochází prstencem. Otáčí-li se tyčka rovnoměrně úhlovou rychlostí* ω, *prstenec probíhá kružnici rovnoměrně úhlovou rychlostí* 2ω (obr. 15).

Uvedeme ještě jeden příklad věty, kterou je možno formulovat za pomoci pohybu.



Obr. 15



Obr. 16

Nechť se přímka l rovnoměrně posouvá v rovině, tj. tak že se nemění její směr, a přitom její průsečík M s jistou pevnou přímkou m se pohybuje rovnoměrně po m. Potom průsečík N přímky l s libovolnou pevnou přímkou n se rovněž pohybuje rovnoměrně po přímce n.

To je v podstatě přeformulované tvrzení, že rovnoběžné přímky vytínají na ramenech úhlu úměrné úseky. Analogicky k větě o prstenci můžeme dát předcházející větě tento tvar:

Věta o prstenci na přímce. *Na dvě přímky je v průsečíku navlečen malý prstenec. Je-li jedna z těchto přímek pevná a druhá se rovnoměrně posunuje (rovnoběžně se svou původní polohou), pak se i prstenec pohybuje rovnoměrně* (obr. 16).

Nejednou se ještě setkáme s různými soustavami přímek. V případech, kdy půjde o soustavy přímek procházejících daným bodem nebo o soustavy přímek téhož směru, může být užitečná první nebo druhá věta o prstenci.

Konstrukční úlohy. V klasických konstrukčních úlohách (sestrojit trojúhelník, nanést úsečku, vést tečnu, najít bod) se obvykle požaduje, aby úloha byla provedena jen za pomoci pravítka a kružítka. To znamená, že dvěma body můžeme proložit přímku, nakreslit kružnici daného poloměru a středu a najít průsečíky těchto čar. Pro řešení takových úloh je někdy vhodné popsat kružnice a přímky jako množiny bodů vyhovujících jisté podmínce.

1.4 Nechť je dána kružnice a v její vnější oblasti bod A. Veďte bodem A tečnu t k dané kružnici.

□ Označíme-li X bod dotyku tečny t a kružnice, víme, že úhel OXA je pravý. Množina bodů M, pro které je úhel OMA pravý, vyplňuje kružnici o průměru OA (ovšem bez bodů O, A). Přímku t lze tedy zkonstruovat takto: narýsujeme kružnici, jejímž průměrem je úsečka OA. Nechť X je průsečík této kružnice s danou kružnicí (takové průsečíky jsou dva a jsou souměrně sdružené podle přímky OA). Pak vedeme přímku body A a X. □

1.5 Je dána kružnice a bod A. Veďte bodem A přímku tak, aby vytínala na dané kružnici tětivu délky d.

□ Určíme množinu všech přímek, na kterých vytíná daná kružnice tětivu délky d. Tyto přímky jsou tečnami soustředné kružnice δ s poloměrem $\sqrt{r^2 - d^2/4}$, kde r je poloměr dané kružnice ⟨?⟩. Tím se úloha převede na úlohu předcházející: vést tečnu bodem A ke kružnici δ.

Úloha má dvě řešení, pokud bod A leží ve vnější oblasti kružnice δ, jedno řešení, leží-li na ní, a nemá řešení, když bod A leží ve vnitřní oblasti kružnice δ. □

Často se hledaná množina dá získat ze známé množiny nějakým jednoduchým zobrazením: otočením, symetrií, posunutím nebo stejnolehlostí. (Tento postup je zvlášť vhodný v konstrukčních úlohách.) Připomeňme si, jak sestrojit obraz přímky a kružnice při shodnosti nebo podobnosti.

U přímky stačí sestrojit body A', B' — obrazy dvou jejích různých bodů A, B — a body A', B' vést přímku. Pro kružnici o středu O a poloměru r stačí najít obraz O' jejího středu a kolem něj opsat kružnici o poloměru r (jedná-li se o shodnost), nebo o poloměru kr (jedná-li se o podobnost s koeficientem k).

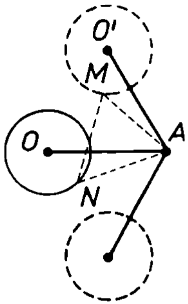
Uvedeme typické příklady úloh, kde se používá shodného zobrazení.

1.6 Je dán bod A a kružnice k, $A \notin k$. Najděte množinu vrcholů M všech rovnostranných trojúhelníků ANM, pro které vrchol N leží na dané kružnici k.

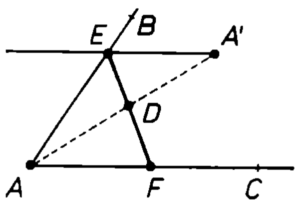
□ Nechť je N libovolný bod kružnice k. Otočíme-li úsečku AN o 60° kolem bodu A, dostane se bod N do vrcholu M rovnostranného trojúhelníku ANM (obr. 17). Odtud hned vidíme, že při otočení kružnice k o 60° kolem bodu A přejde každý její bod N ve třetí vrchol M rovnostranného trojúhelníku ANM.

Tudíž všechny takové body M leží na jedné ze dvou kružnic, které se dostanou z dané kružnice otočením o 60° kolem bodu A, a to buď ve smyslu otáčení hodinových ručiček, nebo proti němu.

Stejným způsobem lze dokázat, že každý bod M ze sjednocení obou výše získaných kružnic je vrcholem jistého rovnostranného trojúhelníku ANM s vrcholem N na dané kružnici. □



Obr. 17



Obr. 18

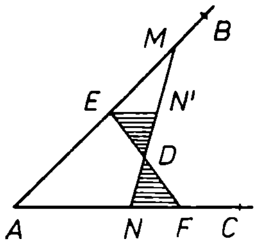
1.7a Je dán konvexní úhel BAC a v jeho vnitřku bod D. Sestrojte úsečku s krajními body na ramenech úhlu tak, aby bod D byl středem této úsečky.

□ Podívejme se na množinu všech úseček, jejichž jeden krajní bod leží na rameni AC daného úhlu s vrcholem A a jejichž střed je v bodě D. Druhé krajní body pak leží na polopřímce, která je souměrně sdružená k rameni AC podle bodu D (obr. 18).

Konstrukce spočívá v tom, že najdeme bod A' středově souměrně sdružený k bodu A podle středu D a bodem A' vedeme rovnoběžku s ramenem AC. Její průsečík s ramenem AB označme E, průsečík přímky ED s ramenem AC označme F. Úsečka EF je hledaná úsečka se středem D. Úloha má právě jedno řešení. □

Je zajímavé, že uvedená konstrukce řeší následující úlohu.

1.7b Máme dán konvexní úhel a v jeho vnitřku bod D. Bodem D se má vést přímka tak, aby z úhlu vytínala trojúhelník nejmenšího obsahu.



Obr. 19

□ Ukážeme, že hledaná přímka je právě přímka EF, kterou jsme sestrojili v předcházející úloze, tj. taková přímka, že úsečka, kterou na ní vytínají ramena úhlu, je bodem D půlena.

Veďme bodem D přímku MN různou od přímky EF, přičemž body M, N leží na ramenech daného úhlu (obr. 19). Dokážeme, že pro obsahy trojúhelníků platí

$$S_{MAN} > S_{EAF} . \tag{1}$$

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že bod M má od bodu A větší vzdálenost než bod E (kdyby tomu tak nebylo, zaměníme ramena úhlu). Stačí se přesvědčit, že

$$S_{EDM} > S_{FDN}\,, \tag{2}$$

protože z toho hned plyne (1). Ale nerovnost (2) je zřejmá, neboť trojúhelník EDM obsahuje trojúhelník EDN', souměrně sdružený s trojúhelníkem FDN podle bodu D. □

Několik úloh:

1.8 Jsou dány body A, B. Určete množinu pat kolmic vedených bodem A na všechny přímky procházející bodem B.

1.9 Nechť je dána kružnice a bod A. Určete množinu středů tětiv, které vytíná daná kružnice na všech přímkách procházejících bodem A. (Je třeba vyšetřit zvlášť případy, kdy bod A leží ve vnější oblasti kružnice, ve vnitřní oblasti kružnice nebo na ní.)

1.10 Jsou dány body A, B. Určete množinu bodů souměrně sdružených s bodem A podle všech přímek procházejících bodem B.

1.11 Sestrojte kružnici*) dotýkající se dvou daných rovnoběžek a procházející daným bodem ležícím mezi nimi.

1.12 Sestrojte kružnici poloměru r, která se dotýká dané přímky a dané kružnice.

1.13 Je dána kružnice a v její vnitřní oblasti body A, B. Vpište do dané kružnice pravoúhlý trojúhelník tak, aby jeho odvěsny procházely body A, B. ↓

1.14 Jsou dány body A, B. Dvě kružnice se dotýkají přímky AB, jedna v bodě A, druhá v bodě B, a obě se

---

*) Zde a všude dále formulace jako „sestrojte kružnici" znamená „sestrojte všechny kružnice".

dotýkají vzájemně v bodě M. Určete množinu všech těchto bodů M, mění-li se obě kružnice. ↓

1.15 V rovině jsou dány čtyři body. Veďme každým z těchto bodů přímku tak, aby tyto přímky ohraničily pravoúhelník. Co je množinou středů takto vzniklých pravoúhelníků? ↓

1.16 Strany OP a OQ pravoúhelníku $OPMQ$ leží na ramenech daného pravého úhlu. Najděte množinu všech vrcholů M, jestliže je

a) délka úhlopříčky PQ,

b) součet délek stran OP a OQ,

c) součet druhých mocnin délek stran OP a OQ roven dané hodnotě d.

1.17 Nechť je dán pravoúhelník. Najděte množinu všech bodů takových, že součet druhých mocnin jejich vzdáleností od čtyř stran pravoúhelníku je roven druhé mocnině jeho úhlopříčky.

1.18 A a B jsou dvě města. Určete množinu všech bodů M s touto vlastností: jdeme-li z bodu M přímo do města B, pak se vzdálenost od města A zvětšuje.

1.19 O trojúhelníku ABC víme, že délka jeho těžnice AO je

a) rovna polovině délky strany BC,

b) větší než polovina délky strany BC,

c) menší než polovina délky strany BC.

Dokažte, že úhel při vrcholu A je a) pravý, b) ostrý, c) tupý.

1.20 V rovině je dána kružnice a bod A. Určete množinu středů úseček AN, kde bod N probíhá danou kružnici.

1.21 Je dána kružnice a bod z vnější oblasti této kružnice. Veďte tímto bodem sečnu kružnice tak, aby jeden její průsečík s kružnicí půlil úsečku tvořenou druhým průsečíkem a daným bodem.

1.22 Průsečíkem dvou daných kružnic veďte přímku tak, aby vytínala na kružnicích tětivy stejné délky.

1.23 Určete množinu vrcholů C všech čtverců $ABCD$, pro které vrchol A leží na dané přímce a vrchol B je pevně dán.

1.24 a) Kde leží čtvrtý vrchol čtverce, jestliže dva jeho vrcholy leží na jednom rameni daného ostrého úhlu a třetí vrchol leží na jeho druhém rameni?

b) Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Vpište do něj čtverec tak, aby dva jeho vrcholy ležely na straně AB.

1.25 Jakou křivku opisuje střed spojnice dvou chodců, kteří jdou rovnoměrně po přímkách? ↓

1.26 Do daného trojúhelníka ABC vpište pravoúhelník, jehož jedna strana leží na straně AB. Najděte množinu středů těchto pravoúhelníků.

1.27 Dřevěný pravoúhlý trojúhelník se pohybuje v rovině tak, že vrcholy, při nichž leží ostré úhly, se posunují po ramenech daného pravého úhlu (jeden vrchol po jednom a druhý po druhém rameni). Jak se bude pohybovat třetí vrchol tohoto trojúhelníku?

1.28 Na stole leží dvoje ploché hodinky. Oboje jdou přesně. Po jaké křivce se bude pohybovat střed úsečky spojující konce minutových ručiček? ↓

1.29 Průsečíkem A dvou daných kružnic veďme přímku. Ta protíná kružnice v bodech K, L, $K \neq A$, $L \neq A$. Určete množinu středů úseček KL. ↓