9. kapitola

KLASICKÁ A GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST. METODA MONTE CARLO

9.1. KLASICKÝ PROSTOR

Kdykoliv jsme se setkali s nějakým náhodným pokusem, postupovali jsme vždy stejně. Nejprve jsme se zamysleli nad množinou všech možných výsledků pokusu a sestavili jsme prostor výsledků Ω. Občas jsme si přitom pomáhali stromem. Pak jsme uvažovali různé jevy, které s pokusem souvisejí. Popisovali jsme je slovy a kódovali jsme je podmnožinami prostoru výsledků. Množinu všech jevů souvisejících s naším náhodným pokusem jsme označili $\boldsymbol{S}$. Pro každý jev z této množiny jsme se snažili určit číslo, kterému se říká pravděpodobnost jevu. Sestrojili jsme tak funkci P definovanou na množině $\boldsymbol{S}$. Vznikla tak trojice $(\Omega, \boldsymbol{S}, \mathsf{P})$, která popisovala daný náhodný pokus. Pro vytváření této trojice měl strom velký význam.

Pokud Ω byla konečná množina (tímto případem se především zabýváme), stačilo funkci P definovat zadáním jejích hodnot pro všechny výsledky (přesněji — pro jednoprvkové množiny z $\boldsymbol{S}$).

Mezi mnoha nám známými náhodnými pokusy jsou takové, pro něž jsou všechny výsledky stejně možné. Stejně možné, stejně pravděpodobné byly oba výsledky hodu mincí. V tom případě je

$$\Omega = \{l, p\}, \ \boldsymbol{S} = \{\emptyset, \{l\}, \{p\}, \{l, p\}\}\ .$$

Stanovíme-li $\mathsf{P}(l) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(p) = \frac{1}{2}$, definujeme pravděpodobnost P. Funkce P přiřazuje všem výsledkům stejné hodnoty.

Prostor výsledků hodu mincí nebo prostor výsledků hodu kostkou (č. 1) je tzv. prostor stejně možných výsledků, jinými slovy, stejně pravděpodobných výsledků.

Vraťme se opět k rodičům, kteří by chtěli mít tři děti. Jak si vzpomínáte, souvisel s tím zajímavý náhodný pokus. Jeho průběh a množinu výsledků jsme znázornili stromem na obr. 2.9. Pomocí tohoto stromu a pravidla násobení snadno ukážeme, že pravděpodobnost každého z osmi výsledků (to jsou všechny) je $\frac{1}{8}$.

Z náhodných pokusů, které známe, snadno vyberete takové, které mají všechny výsledky stejně pravděpodobné, i takové, které tuto vlastnost nemají.

Definice 9.1. Je-li prostor Ω konečný a hodnoty pravděpodobnosti všech výsledků Ω jsou stejné, řekneme, že je to *prostor stejně pravděpodobných výsledků* čili stručně *klasický prostor*.

Poslední název má původ v počátcích teorie pravděpodobnosti, kdy se zkoumaly jen pokusy se stejně pravděpodobnými výsledky. Byly to hlavně hody mincí, vytahování karet a podobné náhodné pokusy související s hazardními hrami.

Je-li prostor Ω klasický a obsahuje-li n prvků, má každý výsledek pravděpodobnost $\frac{1}{n}$.

Úloha 9.1. Určitý náhodný pokus má klasický tříprvkový prostor výsledků. Další náhodný pokus spočívá v jeho dvojím opakování za stejných podmínek. Ukažte pomocí stromu, že má také klasický prostor výsledků.

Z úlohy 9.1 plyne, že prostor výsledků dvojího hodu kostkou (viz obr. 3.2) je klasický. Všech výsledků je 36, a každý má tedy pravděpodobnost $\frac{1}{36}$.

9.2. VĚTA O KLASICKÉM PROSTORU

Uvažujme náhodný pokus s prostorem výsledků $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Předpokládejme, že je to klasický prostor, tzn.

$$\mathsf{P}(\omega_1) = \mathsf{P}(\omega_2) = \ldots = \mathsf{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

Dále uvažujme jev A, který je k-prvkovou podmnožinou prostoru Ω, kde $k \geqq 2$. Dejme tomu, že $A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_k}\}$. Jak víme,

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\omega_{j_1}) + \mathsf{P}(\omega_{j_2}) + \ldots + \mathsf{P}(\omega_{j_k}).$$

Všechny sčítance na pravé straně jsou rovny $\frac{1}{n}$ a je jich právě k, takže

$$\mathsf{P}(A) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

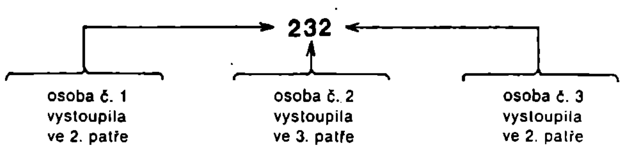
Co je v tomto vzorci n a co k? Číslo n je počet všech — stejně pravděpodobných — výsledků, je to počet prvků množiny Ω. Číslo k je počet výsledků příznivých pro jev A. Abychom určili $\mathsf{P}(A)$ v případě, kdy je prostor výsledků klasický, nepotřebujeme vědět, které výsledky jsou pro jev A příznivé. Stačí znát, kolik jich je. Odvodili jsme větu 9.1.

Věta 9.1. (Věta o klasickém prostoru.) *Je-li pro jev A příznivých k z n stejně pravděpodobných výsledků, je* $\mathsf{P}(A) = \dfrac{k}{n}$.

Věta o klasickém prostoru tvrdí, že je-li prostor výsledků klasický, k určení $\mathsf{P}(A)$ stačí znát jen počet prvků prostoru výsledků a počet prvků množiny A.

Teď by prospělo, kdybyste si zopakovali vzorce pro počet prvků různých množin, které jste probírali v kombinatorice.

Příklad 9.1. V přízemí pětipatrového domu nastupují do výtahu tři navzájem cizí lidé. Budeme sledovat, kdo v kterém patře vystoupí. Očíslujme patra i osoby. Až výtah vyjede nahoru, dostaneme konkrétní výsledek našeho náhodného pokusu. Můžeme ho zakódovat trojicí čísel z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, což jsou čísla pater. Trojici rozšifrujeme takto:



Prostor Ω je množina všech trojic prvků množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kolik je jich? To snadno spočteme pomocí stromu. Pokus má tři etapy. První etapa je volba patra, ve kterém vystoupí osoba č. 1. Je pět možností, kterým odpovídá pět hran stromu. Druhá etapa je volba patra, v němž vystoupí druhá osoba. Opět je pět možností. Z každého uzlu stromu bude vycházet dalších pět hran. Podobně to bude pro třetí etapu. Celkem dostaneme 5.5.5 čili 5^3 větví. Tolik bude i výsledků. Je to počet tříprvkových variací s opakováním z pěti prvků. Každé patro má stejnou šanci, že si je zvolí kterákoliv osoba. Všechny možné způsoby, kterými mohou osoby vystoupit z výtahu, pokládáme za stejně pravděpodobné, každému způsobu přiznáme stejnou pravděpodobnost. Prostor Ω je klasický.

Uvažujme několik jevů souvisejících s naším pokusem:

A: Všichni vystoupí ve 3. patře.
B: Každý vystoupí v jiném patře.
C: Osoba č. 2 vystoupí ve 3. patře.

K určení $\mathsf{P}(B)$ potřebujeme znát počet výsledků příznivých pro jev B. Jsou to právě ty výsledky, které jsou zakódovány trojicemi s různými složkami (každý v jiném patře). Např. $123 \in B$, ale $232 \notin B$. Jsou to variace bez opakování a je jich 5.4.3. Množina (jev) B má 5.4.3 prvků, prostor Ω má 5^3 prvků. Podle věty o klasickém prostoru je

$$\mathsf{P}(B) = \frac{5.4.3}{5^3} = \frac{4.3}{5^2} = \frac{12}{25}.$$

Úloha 9.2. Určete $\mathsf{P}(A)$ a $\mathsf{P}(C)$.

Úloha 9.3. Určete $\mathsf{P}(A)$, $\mathsf{P}(B)$ a $\mathsf{P}(C)$ pomocí simulace sta opakování cesty výtahem. Porovnejte výsledky.

Příklad 9.2. Určíme pravděpodobnost pro nástup paní X a Y do tramvajové soupravy se třemi vozy. Prostor výsledků je klasický a má 3^2 čili 9 prvků. Uvažujme jevy z příkladu 5.6. Je

$$A = \{11, 22, 33\} \text{ a tedy } \mathsf{P}(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

$$B = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\} \text{ a tedy } \mathsf{P}(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$C = \{22\} \text{ a tedy } \mathsf{P}(C) = \frac{1}{9}.$$

Úloha 9.4. a) Určete pravděpodobnosti

P(paní X nastoupí do vozu č. 1),

P(ani jedna paní nenastoupí do třetího vozu).

b) Na stanici přišla ještě jedna cizí paní Z. Určete pravděpodobnosti

P(všechny paní nastoupí do téhož vozu),

P(každá paní nastoupí do jiného vozu),

P(paní X a Y nastoupí do druhého vozu),

P(ani jedna paní nenastoupí do třetího vozu).

Úloha 9.5. Ředitel napsal tři dopisy. V úloze 5.12 jsme se dověděli, co s nimi sekretářka provedla. Určete pravděpodobnost jevů uvedených ve zmíněné úloze (tam jsme je odhadli opakováním velkého množství pokusů). Porovnejte výsledky.

Úloha 9.6. Dvakrát hodíme hrací kostkou a body, které padly, sečteme. Označme A_k jev, že dostaneme součet k. Určete pravděpodobnost $\mathsf{P}(A_k)$ pro všechna možná k. Pro které k je $\mathsf{P}(A_k)$ největší?

Návod: Výsledky kódujte dvojicemi bodů, které jste získali při 1. a 2. hodu. Dostanete první z následujících dvou tabulek. Druhá vznikne z první nahrazením každé dvojice součtem.

počet bodů získaných 1. hodem

počet bodů získaných druhým hodem

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

V úloze 9.6 jsme prostor výsledků Ω zobrazili do množiny čísel (každému výsledku z Ω jsme přiřadili příslušný počet bodů). Takovýmto funkcím se budeme zanedlouho věnovat.

Úloha 9.7. Určete pravděpodobnost, že vyhrajete I. pořadí

a) ve sportce,

b) v sazce.

Úloha 9.8. V sérii n výrobků je jich m vadných. Výrobky přišly do prodejny. Nákup r výrobků je náhodný výběr r prvků z urny, která obsahuje uvažovanou sérii. Určete pravděpodobnost, že mezi r zakoupenými výrobky bude k vadných (vada se projeví až při užívání, v prodejně ne).

Úloha 9.9. V krabici je 100 šroubů a 10 z nich je vadných. Z krabice vytáhneme poslepu 10 šroubů. Určete pravděpodobnost, že všechny vytažené šrouby budou dobré.

9.3. GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

V tomto odstavci se budeme zabývat některými nekonečnými prostory.

Příklad 9.3. Na obvod terče rulety je navinut interval $\langle 0,1)$. Každému bodu obvodu terče odpovídá právě jedno reálné číslo z tohoto intervalu. Pozorujeme-li, v kterém bodě se zastaví roztočená šipka rulety, dostaneme číslo. Bude to číslo náhodně vybrané ruletou a budeme jím kódovat výsledek tohoto náhodného pokusu. Je-li ruleta dobrá, má každý výsledek stejnou šanci, stejně jako tomu bylo u rulety č. 4. Rozdíl je v tom, že teď je výsledků nekonečně mnoho, $\Omega = \langle 0,1)$. Uvažujme následující dva jevy související s naším pokusem:

A: ruleta vybere číslo větší než $\frac{1}{2}$.

B: ruleta vybere číslo $\frac{1}{3}$.

Těmto jevům odpovídají podmnožiny $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ prostoru výsledků. Poměru počtu výsledků příznivých pro jev A k počtu všech výsledků bude teď odpovídat poměr délky množiny A k délce celého prostoru. Naše úvahy o klasickém prostoru můžeme zobecnit následujícím způsobem: Je-li prostor výsledků úsečka a všechny výsledky jsou stejně možné, je

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\text{délka množiny } A}{\text{délka prostoru } \Omega}. \tag{1}$$

Je-li prostor výsledků úsečka, jevy budou takové její podmnožiny, které mají délku. Množina jevů $\boldsymbol{S}$ bude množina podmnožin prostoru Ω, které mají délku.

Dostáváme odtud

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}\,,$$

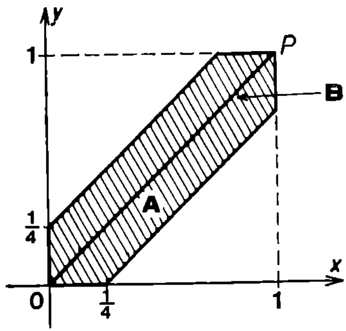
$$\mathsf{P}(B) = 0\,,$$

i když $B \neq \emptyset$. K čemu nám může jev B posloužit? Kde jsme hledali příklad takového jevu?

Příklad 9.4. Dva rytíři X a Y se mají utkat v souboji. Utkání má proběhnout v časovém rozmezí, které označíme jako interval $\langle 0,1)$. Každý rytíř si pomocí rulety (z minulého příkladu) vybere dobu, kdy se objeví na určitém místě. Podle dohody nebude jeden na druhého čekat déle než čtvrt hodiny. Náhoda může tedy způsobit, že se neutkají, souboj pak bude zrušen. K tomu dojde, bude-li časový rozdíl mezi jejich příchody na místo souboje větší než $\frac{1}{4}$.

Výběr doby příchodu na místo souboje je náhodný pokus. Písmenem x označme dobu, kterou si vybral rytíř X, a písmenem y dobu rytíře Y. Prostor výsledků je množina všech dvojic (x, y) takových, že $x \in \langle 0,1)$ a $y \in \langle 0,1)$. Každé dvojici čísel odpovídá bod roviny. Prostor výsledků bude tedy podmnožina roviny, a to čtverec (obr. 9.1).

Ruleta zaručuje, že každý výsledek (každý bod) je stejně možný. Prostor výsledků je opět nekonečný a výsledky jsou — podobně jako u klasického prostoru — stejně možné. Uvažujme dva jevy související s naším soubojem.



Obr. 9.1. Doba příchodu na souboj

A: k souboji dojde,
B: oba rytíři si vyberou tutéž dobu.

Pro jev A jsou příznivé právě ty dvojice (x, y), pro něž $|x - y| \leqq \frac{1}{4}$. Pro jev B dvojice, v nichž $x = y$. Jevu A odpovídá vyšrafovaný šestiúhelník, jevu B úsečka OP (viz obr. 9.1).

Prostor výsledků svým charakterem opět připomíná klasický prostor. Pravděpodobnost jevu bude poměr obsahu jevu k obsahu celého prostoru výsledků.

Je-li prostor výsledků podmnožinou roviny, má-li obsah a jsou-li všechny výsledky stejně možné, je

$$(2) \qquad \mathsf{P}(A) = \frac{\text{obsah množiny } A}{\text{obsah prostoru } \Omega}.$$

V tomto případě budou jevy takové podmnožiny prostoru Ω, které mají obsah. Všechny takovéto podmnožiny vytvoří množinu jevů $\boldsymbol{S}$.

Pravděpodobnost definovaná vzorci (1) a (2) se nazývá geometrická pravděpodobnost.

Úloha 9.10. Určete $\mathsf{P}(A)$ a $\mathsf{P}(B)$ pro jevy A, B z příkladu 9.4.

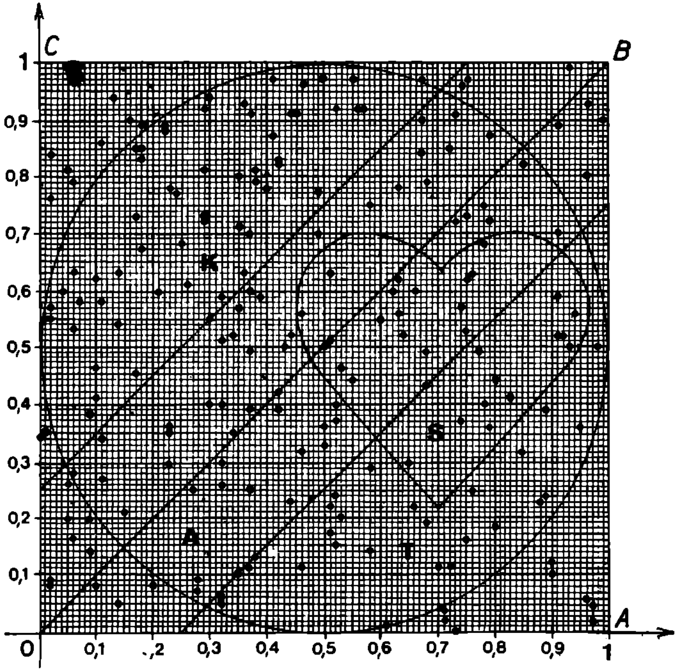
Příklad 9.5. Při střelbě do terče je prostor výsledků terč. Je to podmnožina roviny, která má obsah (terč je kruh). Výsledky však v tomto případě nejsou stejně možné. Sledujeme-li, jak jsou zásahy rozloženy, vidíme, že častěji jsou zasahovány body poblíž středu (vždyť na střed míříme). V případě tohoto nekonečného prostoru výsledků nelze tedy pravděpodobnost definovat vzorcem (2).

Úloha 9.11. Mezi místy A a B vzdálenými 10 km bylo přerušeno telefonní spojení. Určete pravděpodobnost, že místo poruchy je od místa A vzdáleno méně než 500 m.

Úloha 9.12. Pomocí rulety s navinutým intervalem $\langle 0,1)$ vybíráme dvě čísla b, c. Určete pravděpodobnost, že rovnice $x^2 + 2\sqrt{b}x + c = 0$ bude mít řešení v oboru reálných čísel.

9.4. URČOVÁNÍ GEOMETRICKÝCH PRAVDĚPODOBNOSTÍ A METODA MONTE CARLO

Na milimetrovém papíru vyznačme čtverec o straně 10 cm a považujme ho za jednotkový čtverec. Bude znázorňovat prostor výsledků pro náhodný výběr dvou čísel z intervalu $\langle 0,1)$ pomocí rulety. Výběr můžeme simulovat pomocí tabulek náhodných čísel. Dvojici číslic z tabulky budeme chápat jako první a druhou číslici za desetinnou čárkou vybraného čísla. Např. dvojici 32 odpovídá číslo 0,32. Náhodné číslice budeme číst po



Obr. 9.2. Čtverec s náhodnými body

čtyřech. Např. čtveřici 3206 odpovídá výsledek z prostoru Ω — dvojice čísel (0,32; 0,06).

Vezměme naši tabulku a čtěme čtveřice číslic od začátku. Příslušné body zakreslujme do čtverce Ω. Zakreslíme-li 200 bodů, bude čtverec poset náhodnými body. Jejich celkem rovnoměrné rozložení potvrzuje stejné šance všech bodů (teď jde o body s racionálními souřadnicemi). Pro pravděpodobnost $\mathsf{P}(A)$ dostáváme

(3) $$\mathsf{P}(A) \doteq$$

$$\doteq \frac{\text{počet zakreslených bodů, které padly do množiny } A}{\text{počet všech zakreslených bodů}} .$$

Do množiny odpovídající jevu A z příkladu 9.4 padlo 87 bodů. Simulací jsme dostali hodnotu $\mathsf{P}(A) \doteq \frac{87}{200} \doteq$ $\doteq 0{,}435$. V úloze 9.10 jsme dostali $\mathsf{P}(A) = \frac{7}{16} \doteq 0{,}4375$. Vidíme, že výsledky se liší jen nepatrně.

Na obr. 9.2 je ve čtverci kromě náhodných bodů zakresleno několik útvarů. Jsou to trojúhelník $T =$ $= \Delta OAB$, srdce S a kruh K. Představme si hru, při které se ruletou vybírá dvojice čísel z intervalu $\langle 0,1)$. Padne-li příslušný bod do srdce S, vyhráváte s korun. Jevu, že vyhrajete s korun, odpovídá množina S. Pokládáme-li obsah prostoru výsledků za jednotkový, je podle vzorce (2) $\mathsf{P}(S) =$ obsah útvaru S. Na druhé straně pomocí simulace dostáváme

$$\mathsf{P}(S) \doteq \frac{\text{počet náhodných bodů, které padly do } S}{\text{celkový počet náhodných bodů}} .$$

Vidíme, že tak můžeme určovat obsah rovinných útvarů obsažených v Ω:

(4) $$\text{obsah útvaru } F \doteq$$

$$\doteq \frac{\text{počet náhodných bodů, které padly do } F}{\text{celkový počet náhodných bodů}} .$$

A to je podstata *metody Monte Carlo*.

Obsah trojúhelníku T je roven $\frac{1}{2}$. Podle (3) dostaneme, že obsah trojúhelníku T je přibližně $\frac{95}{200}$. Do trojúhelníku T totiž padlo 95 bodů. Vidíme, že obě hodnoty se jen málo liší.

Obsah kruhu K o poloměru $\frac{1}{2}$ je roven $\frac{1}{4}\pi$. Metoda Monte Carlo určuje, že obsah kruhu K je přibližně $\frac{162}{200} \doteq 0{,}81$. Odtud dostáváme $\frac{1}{4}\pi \doteq 0{,}81$ neboli $\pi \doteq 4 . 0{,}81 = 3{,}24$. Určili jsme tak přibližnou hodnotu čísla π. Kdybychom měli náhodných bodů více, určili bychom ji ještě přesněji.

Pro útvar S dostaneme, že jeho obsah je přibližně roven $\frac{31}{200} \doteq 0{,}155$.

Na průhlednou fólii můžeme kreslit rozmanité útvary obsažené v našem čtverci. Přiložíme-li fólii na obrázek se zakreslenými náhodnými body a počítáme příslušné body, určíme přibližně obsah obrazců metodou Monte Carlo.