O náhodě a pravděpodobnosti

4. kapitola. Četnost jevu. Pravděpodobnost jevu

In: Adam Płocki (author); Eva Macháčková (translator); Vlastimil Macháček (illustrator): O náhodě a pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 37–49.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404033

4. kapitola

ČETNOST JEVU PRAVDĚPODOBNOST JEVU

4.1. O JISTÉ PRAVIDELNOSTI, KTERÁ SE PROJEVUJE PŘI HÁZENÍ MINCÍ

Sedlák měl dva syny, Petra a Pavla, a ještě 100 ovcí. Mezi ovcemi byly některé pěkné, jiné horší. Otec se rozhodl, že ovce rozdělí synům. Vznikl tak problém, jak to udělat, aby dělení bylo objektivní a žádný syn ho neobvinil z nespravedlnosti. Otec se rozhodl, že čí bude která ovce, neurčí on, ale náhoda. „Hodím mincí, a padne-li lev, dostane ovci Pavel. Když padne panna, vezme si ovci Petr," řekl synům.

Než byly ovce rozděleny, bylo třeba stokrát hodit mincí. Dopadlo to takto:

lplllplpll pllppppllpp llplplplpl lplplllllpl pllllppllp
ppllppplpp lpplplppll ppplllppll llplppplpp lpppppplpp

Po prvních deseti hodech se Petrovi zdálo, že mu křivdí, ale ve druhé desítce dostal víc ovcí. Čím víc bylo hodů, tím méně se lišily počty Petrových a Pavlových ovcí. Jaký byl konečný výsledek dělení?

Petr dostal ovcí 51 a Pavel 49. Je překvapivé, že dělení, při němž se uplatňovala náhoda (vždyť náhoda rozhodovala o dělení), dopadlo tak spravedlivě. Způsob dělení ovcí, který otec navrhl, je opravdu velmi objektivní. Těžko můžeme minci obvinit z nadržování. Mince dávala Petrovi a Pavlovi stejnou šanci, když se rozhodovalo, čí bude ovce.

Pravděpodobnost, která se při mnohonásobném hodu mincí*) projevuje, spočívá v tom, že počty hozených lvů a panen se vyrovnávají, přesněji řečeno, stabilizují.**)

Z tabulky výsledků otcových hodů vyplývá následující závěr: Házíme-li mincí mnohokrát za sebou, pak přibližně stejně často padá lev i panna. Oba výsledky jsou stejně možné. Oba mají stejnou šanci.

Tento závěr jsme mohli očekávat. Když je mince souměrná, není žádný důvod k tomu, aby padala nahoru jednou stranou častěji než druhou, aby jeden výsledek měl větší šanci než druhý. Kdybychom házeli s-kostkou, byly by také dva možné výsledky. Ale s-kostka má pětkrát víc stěn bez tečky než s tečkou. Výsledek ⊡ má pětkrát menší šanci než výsledek □. Při házení s-kostkou padne pětkrát častěji □ než ⊡. Můžete si to ověřit pokusem. Jen je třeba házet mnohokrát. (Místo s-kostky můžete použít obyčejnou kostku.)

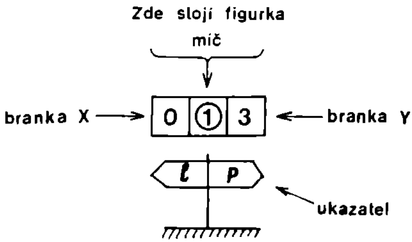
4.2. STEJNÉ ŠANCE. MENŠÍ ŠANCE. VĚTŠÍ ŠANCE

Příklad 4.1. (Hra lev-panna.) Je to jednoduchá náhodná hra. Účastní se jí hráči X a Y. Na obr. 4.1 vidíte jednoduché hřiště. Padne-li při hodu mincí p, vyhrává X a míč padne do branky Y. Padne-li l, vyhrává Y a míč padne do branky X.

Je důležité, kdo hází mincí? Ovšemže ne! A je důle-

*) Uvažujeme stejnorodou minci pravidelného tvaru.

**) *Pozn. recenzenta:* Přesněji řečeno: stabilizuje se poměr počtu lvů k počtu panen.



Obr. 4.1.

žité, kdy se mincí házelo? Bylo-li to minutu, hodinu, rok nebo ještě déle před vstřelením míče do příslušné branky? To jistě nemá význam. Když je tomu tak, nemusejí hráči X a Y vůbec mincí házet. Provedl to za ně Pavlův a Petrův otec. Hráči mohou klidně využít seznam sedlákových výsledků (výsledků stonásobného hodu mincí). Říkejme mu sedlákova tabulka.

Teď už se nemusí házet mincí. Stačí jen z tabulky číst postupně výsledky a příslušným způsobem kopat do míče a dávat body. Tabulka stačí až ke stonásobnému opakování hry. Kolikrát vyhraje X? Kolikrát vyhraje Y? Budeme to zaznamenávat tak, že po každém hodu (tj. po přečtení každého písmene ze sedlákovy tabulky) uděláme čárku do tabulky

vyhrál X			tolikrát vyhrál X
vyhrál Y			tolikrát vyhrál Y

Podíváme-li se na vyplněnou tabulku, zjistíme, že oba hráči mají v této hře stejné šance. Vyplývá to z toho, že při mnohonásobném hodu mincí padá lev i panna přibližně stejně často.

Uvedená hra lev-panna je příklad velmi jednoduché náhodné hry, tj. hry, v níž o výsledku rozhoduje výlučně náhoda a ne schopnosti, dovednosti nebo umění hráčů, jako např. při hře v šachy.

Příklad 4.2. Obměňme předcházející hru. Změníme pravidla. Teď bude třeba mincí hodit dvakrát. Padne-li alespoň jednou lev, bude míč putovat do branky Y (bod získá X). Padne-li při obou hodech panna, vyhraje Y a míč se vstřelí do branky X. Výsledky dvojitého hodu mincí zakódujeme dvojicemi. Házet mincí vůbec nemusíme. Stačí jen číst ze sedlákovy tabulky po dvou písmenech. Klidně můžeme číst od konce. Sedlákova tabulka stačí k padesátinásobnému opakování hry. Jaké teď budou šance hráčů? To se dá zjistit, přesněji řečeno, odhadnout.

Prostor výsledků dvojího hodu mincí je množina $\Omega = \{ll, lp, pl, pp\}$ (nakreslete strom). Pro výhru hráče X jsou příznivé výsledky ll, lp a pl. Pro výhru hráče Y je příznivý jen výsledek pp. Pro jev A — vyhraje hráč X — jsou příznivé tři výsledky: ll, lp, pl. Jev A je množina $\{ll, lp, pl\}$. Pro jev B — vyhraje hráč Y — je příznivý jen výsledek pp, takže $B = \{pp\}$.

Všechny čtyři výsledky z Ω jsou stejně možné. Každý ze čtyř výsledků má stejnou šanci. Třikrát víc těchto stejně možných výsledků je příznivých pro výhru X (jev A). Tato krátká úvaha nás vede k tomu, abychom hráči X přiznali třikrát větší šanci než hráči Y.

Potvrdí to praxe, tj. pokus? Už teď můžeme hru padesátkrát opakovat. Nezabere nám to mnoho času, vždyť házet mincí nemusíme. Poznamenejme si opět výsledky těchto padesáti her do tabulky

vyhrál X		37	tolikrát vyhrál X
vyhrál Y		13	tolikrát vyhrál Y

Tabulka umožňuje odhadnout šanci hráčů v naší nové hře. A odhad, jak vidíme, zcela potvrzuje náš předpokládaný poměr šancí.

Úloha 4.1. Zavedeme teď ještě jiné pravidlo kopání míče na hřišti z obr. 4.1. Padnou-li při dvojím hodu mincí samí lvi nebo samé panny, vyhraje X. Padne-li jednou lev a jednou panna (nezáleží na tom, v jakém pořadí), vyhraje Y. Jaké teď mají hráči šance? Ověřte svůj odhad tak, že opět budete hru padesátkrát opakovat (s použitím sedlákovy tabulky).

Úloha 4.2. Budeme si hrát s kostkou, která má stěny dvou typů (s tečkou a bez tečky). Padne-li stěna s tečkou, vyhraje X, padne-li prázdná stěna (bez tečky), vyhraje Y. Kolikrát menší šanci bude mít hráč X než hráč Y, jde-li o nám známou s-kostku? Kolik stěn s tečkou musí mít kostka, aby byly šance obou hráčů stejné? Kolik stěn s tečkou musí mít kostka, aby hráč X měl dvakrát menší šanci než hráč Y?

4.3. POMĚRNÁ ČETNOST JEVU. PRAVDĚPODOBNOST JEVU

Snažili jsme se odhadnout šanci, že nastanou určité jevy (vyhraje X, prohraje X apod.). Zkusme teď tyto šance ohodnotit, vyjádřit je číselně. Dostaneme tak informaci o budoucnosti, můžeme toho využít k jakémusi „předpovídání“ budoucnosti. Z čeho budeme při hodnocení šance vycházet? Asi spíše z toho, co se už stalo, tedy z minulosti. Vyjdeme z toho, co bylo, a zkusíme usoudit, co bude.

Pro některé jevy šanci ohodnotíme snadno, pro jiné to zatím tak snadné nebude.

Už jsme o výsledcích některých náhodných pokusů říkali, že jsou stejně možné. Tak tomu bylo, když jsme házeli mincí, obyčejnou hrací kostkou, když jsme pracovali s přístrojem pro tah koulí očíslovaných různými čísly. Mince padala stejně často jednou i druhou stranou nahoru. Potvrdil to pokus. Když jsme stokrát hodili mincí, počty lvů a panen se zpočátku velice lišily, ale s rostoucím počtem hodů jsme zjistili překvapivou tendenci k jejich vyrovnávání.

S vyprávěním o sedlákovi souvisejí tyto jevy:

A: Ovci dostane Pavel.

B: Ovci dostane Petr.

Jsou to jevy spojené s náhodným výběrem jedné ovce, čili s jedním hodem mincí. Pro každý z těchto jevů je příznivý jeden výsledek. Když mluvíme o šanci, že nastane jev A, mluvíme zároveň o šanci výsledku l. Šance jevu B je zároveň šancí výsledku p.

Na otázku, jak často nastal jev A, jak často dostal ovci Pavel, by dal odpověď poměr počtu případů, kdy nastal jev A (tomuto počtu říkáme *četnost jevu* A), k počtu všech přidělování jedné ovce. Tento poměr je $\frac{49}{100}$.

Pro jev B je to poměr $\frac{51}{100}$. Poměr, o kterém právě mluvíme, je tzv. *poměrná četnost jevu.* Při stu hodech jsou poměrné četnosti obou našich jevů A, B velmi blízké ke zlomku $\frac{1}{2}$. Poměrné četnosti jsou si skoro rovny. Šance jevu A a B jsme už předtím pokládali za stejné. Hovorově bychom řekli, že jevy A a B, nebo — na tom nezáleží — výsledky hodu mincí l a p, jsou stejně pravděpodobné.

Šance jevů A a B jsou v poměru 1 : 1. Šance každého z nich je tedy vyjádřena zlomkem $\frac{1}{1+1}$, čili $\frac{1}{2}$. Právě tomuto zlomku je blízká poměrná četnost jevu A. Číslo $\frac{1}{2}$ budeme chápat jako pravděpodobnost jevu A a zapisovat takto:

P (ovci dostane Pavel) $= \frac{1}{2}$, nebo stručně $\mathsf{P}(A) = \frac{1}{2}$, nebo také $\mathsf{P}(l) = \frac{1}{2}$. Podobně u jevu B píšeme P(ovci dostane Petr) $= \frac{1}{2}$, nebo stručně $\mathsf{P}(B) = \frac{1}{2}$, nebo také $\mathsf{P}(p) = \frac{1}{2}$.

Jak najdeme číslo, které chápeme jako pravděpodobnost jevu? Toto číslo úzce souvisí s výsledky pokusů (s minulostí). Způsob jeho určování už známe.

Nechť jev A souvisí s jistým náhodným pokusem, který můžeme za stejných podmínek mnohokrát opakovat. Opakujme ho n-krát. Spočteme, kolikrát byl výsledek příznivý jevu A (kolikrát nastal jev A). Toto číslo označme $c_n(A)$. Zajímavější by však byl poměr této četnosti k číslu n, tj. zlomek

$$\frac{c_n(A)}{n}.$$

Zlomek vyjadřuje, při jaké části opakovaných pokusů nastal jev A. Tento zlomek, tento poměr je právě poměrná četnost jevu A.

Definice 4.1. Zlomek

$$f_n(A) = \frac{c_n(A)}{n} = \frac{\text{četnost jevu } A \text{ při } n\text{-násobném opakování pokusu}}{\text{počet všech opakování pokusu}}$$

se nazývá *poměrná četnost jevu A*.

V příkladu se sedlákem jsme měli

$$f_{100}(A) = \frac{49}{100}, \; f_{100}(B) = \frac{51}{100}.$$

Občas, aby byl zápis srozumitelnější, napíšeme do závorek místo písmen A nebo B slovní popis příslušného jevu, např.

$$f_{100}(\text{ovci dostal Pavel}) = \frac{49}{100}.$$

Je-li pro jev A příznivý jen jeden výsledek ω, budeme stručně mluvit o poměrné četnosti toho výsledku a zapisovat ji $f_n(\omega)$. Poslední rovnost budeme zapisovat také $f_{100}(l) = \frac{49}{100}$.

Úloha 4.3. Zde jsou výsledky mnohokrát opakovaného hodu hrací kostkou:

56426 61555 26233 54142 46321 62645 12263 34111
33216 54443 31232 53412

Určete poměrnou četnost každého ze šesti výsledků. Nechť A, B, C, D jsou jevy popsané slovy v příkladu 3.1. Najděte $f_{60}(A)$, $f_{60}(B)$, $f_{60}(C)$ a $f_{60}(D)$. Potvrzují tyto poměrné četnosti naše očekávání, naše hodnocení šance, že jevy nastanou? Proveďte podobné výpočty pro výsledky vašeho pokusu např. také šedesátinásobného hodu hrací kostkou.

S rostoucím n má poměrná četnost $f_n(A)$ (A je opět jev z příkladu o sedlákovi) podivuhodnou tendenci ke stabilizaci, k oscilování kolem určitého čísla. V příkladě se sedlákem oscilovaly $f_n(A)$ a $f_n(B)$ kolem čísla $\frac{1}{2}$.

Toto číslo budeme chápat jako ideální poměrnou četnost. Je to vhodný kandidát na číselnou míru šance, že nastane daný jev. Ideální poměrné četnosti jevu budeme říkat *pravděpodobnost jevu.*

Stabilizace poměrných četností $f_n(l)$ a $f_n(p)$ je dobře vidět z následující tabulky

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$
p	3	9	20	51
l	7	11	30	49
$f_n(p)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{51}{100}$
$f_n(l)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{30}{50}$	$\frac{49}{100}$

Při házení mincí je $\Omega = \{l, p\}$. Tabulka nás vede, abychom stanovili $\mathsf{P}(l) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(p) = \frac{1}{2}$.

Příklad 4.3. Ve skutečném světě, který nás obklopuje, se setkáváme s mnoha příklady stabilizace poměrných četností. Už známe příklad (vzatý ze života) náhodného pokusu, který provádějí rodiče očekávající potomka. Opakování tohoto pokusu je zjišťování pohlaví u narozených dětí (nemusejí to být děti týchž rodičů, protože proces utváření pohlaví probíhá vždy stejně). Statistické ročenky nám poskytují zajímavé údaje — jak počty provedených zjištění (čísla n), tak čísla $c_n(♀)$ a $c_n(♂)$. Sestavme z těchto údajů tabulku podobně jako při házení mincí. Údaje uvádějí počet chlapců a děvčat narozených v Polsku v letech 1928, 1929 a 1930.*)

	1928	1928—1929	1928—1930
	n = 990 993	n = 1 985 094	n = 3 007 905
♀	477 339	956 675	1 451 414
♂	513 654	1 028 419	1 556 491
$f_n(♀)$	0,482	0,482	0,483
$f_n(♂)$	0,518	0,518	0,517

Pohlaví narozeného dítěte bylo tedy zjištěno celkem 3 007 905krát. To je velmi mnoho. Při uvažovaném náhodném pokusu je $\Omega = \{♀, ♂\}$. Tabulka umožňuje stanovit následující odhad hodnoty ideálních četností čili pravděpodobností:

$$\mathsf{P}(♀) \doteq 0{,}48, \qquad \mathsf{P}(♂) \doteq 0{,}52.$$

Řekneme-li tedy, že $\mathsf{P}(♀) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(♂) = \frac{1}{2}$, nebudeme daleko od pravdy. Nyní nám pokus připomíná hod mincí.

*) *Pozn. recenzenta:* Obdobné údaje novějšího data pro ČSSR lze nalézt v každoročně vydávané Statistické ročence ČSSR.

Mnohonásobné opakování jiných zjišťování, jako např. počtu úmrtí v roce, počtu telefonních hovorů vedených v daném časovém úseku přes danou ústřednu, počtu zápalek v automaticky plněných krabičkách (náhoda rozhoduje, kolik se tam dostane zápalek), zjišťování velikosti inteligenčního kvocientu a čísla bot náhodně vybraných dospělých lidí, poskytuje zajímavé údaje. Je z nich patrna stabilizace poměrných četností výsledků. Z velkého chaosu vystupuje překvapivá tendence k jistým zákonitostem. Ty pak slouží k prognózám, k předpovídání, co se stane.

Mnohonásobné opakování daného náhodného pokusu umožňuje odhadnout hodnotu pravděpodobnosti jevu. Tato hodnota je mírou šance, že jev nastane, a umožňuje v jistém smyslu předpovědět budoucnost. Byla určena na základě minulosti, odhadli jsme ji podle toho, co se dělo dříve, v minulosti, během pokusu.

Všimněme si, že tabulka z příkladu 4.2 umožňuje odhadnout pravděpodobnosti některých jevů souvisejících s dvojím hodem mincí.

$$\mathsf{P}\,(\text{alespoň jednou padne lev}) \doteq \frac{37}{50},$$

$$\mathsf{P}\,(\text{padnou dvě panny}) \doteq \frac{13}{50}.$$

Jednoduchá úvaha (vycházející z toho, co víme o světě, který nás obklopuje, vedla k závěru, že šance uvažovaných jevů jsou v poměru 3 : 1. Zlomek $\frac{3}{3+1}$, čili $\frac{3}{4}$, je tedy ideální poměrná četnost jevu, že alespoň jednou padne lev.

$$\mathsf{P}\,(\text{alespoň jednou padne lev}) = \frac{3}{4},$$

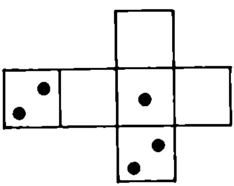
$$\mathsf{P}\,(\text{padnou dvě panny}) = \frac{1}{4}.$$

Příklad 4.4. Při házení krychlovou kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Je-li kostka pravidelná, měla by se každá stěna objevovat nahoře stejně často. Je tedy $\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \ldots = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}$. K tomu závěru jsme nedošli na základě pokusu, ale na základě našich zkušeností. Kdyby se někomu chtělo mnohokrát házet kostkou, pokus by náš závěr určitě potvrdil. Pro s-kostku je $\Omega = \{\square, \boxdot\}$, $\mathsf{P}(\square) = \frac{5}{6}$, $\mathsf{P}(\boxdot) = \frac{1}{6}$.

Úloha 4.4. Porovnejte šance, že nastanou jevy A a B, pro následující dvojice jevů:

A: 1. července bude v Praze sněžit.
B: 1. července bude v Praze pršet.
A: Při příštím tahu sportky uhodnu číslo 5.
B: Při příštím tahu sportky uhodnu aspoň jedno číslo.
A: Příští středu potkám na ulici spolužáka.
B: Příští středu potkám na ulici Karla Gotta.

Úloha 4.5. Házíme kostkou, jejíž síť je na obr. 4.2, a po dopadu zjistíme, která stěna je nahoře. Určete prostor výsledků. Určete pravděpodobnost každého výsledku. Na základě čeho jste ji určili?



Obr. 4.2.

Úloha 4.6. Při dvojím hodu mincí je $\Omega = \{ll, lp, pl, pp\}$. Doplňte:

$$\mathsf{P}(ll) = \qquad \mathsf{P}(pp) =$$
$$\mathsf{P}(lp) = \qquad \mathsf{P}(pl) =$$

Úloha 4.7. Dejme tomu, že jsme mnohokrát hodili pravidelným dvacetistěnem s očíslovanými stěnami (viz str. 9). Po dopadu jsme zjišťovali číslo horní stěny a výsledek pokusu jsme kódovali tímto číslem. Na poslední stránce této knížky jsou pod nadpisem Tabulka náhodných čísel uvedeny výsledky hodů. Uvažujte prvních 300 výsledků (prvních šest řádků). Vypočtěte $f_{300}(0), f_{300}(1), f_{300}(2), \ldots, f_{300}(9)$. Potvrzují tyto výsledky, že každá číslice (každý výsledek) má tutéž šanci, že každá číslice je stejně pravděpodobná? Doplňte

f_{300} (padla sudá číslice) $=$
f_{300} (padla lichá číslice) $=$