O náhodě a pravděpodobnosti

3. kapitola. Jev

In: Adam Płocki (author); Eva Macháčková (translator); Vlastimil Macháček (illustrator): O náhodě a pravděpodobnosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 26–36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404032

3. kapitola

JEV

3.1. JISTÝ, NEMOŽNÝ, MOŽNÝ

Vezměme si krabičku U se dvěma červenými a dvěma zelenými kostkami. Trojí náhodný výběr kostky bez vracení určí věž. O tom, jaká to bude věž, rozhodne náhoda. Zkusme před výběrem předpovědět jeho výsledek, tj. přesně popsat, jaká věž vznikne. Můžeme si ji předem nakreslit, pak táhnout kostky, postavit věž a porovnat předpověď s tím, co se stalo. Předpověď, výběr a porovnání můžeme považovat za jednoduchou hru. Kdo předpověděl správně, vyhraje, komu se předpověď nepodařila, prohraje. Odkud to známe? Podobnou hrou se přece každý týden baví dospělí. Napřed vyplní sázenky sportky. To je pokus o přesnou předpověď, jak tah čísel sportky dopadne. Pak se koná tah a potom se (netrpělivě a nervózně) porovnává výsledek tahu s předpovědí. A také se buď vyhrává, nebo prohrává (ale nehraje se o body).

Uhodli jste, jaká bude věž? Většinou ne. Stejně jako se většinou nepodaří uhodnout čísla sportky.

Při naší hře jsme se snažili přesně uhodnout výsledek. Předpovídání však nemusí jít do všech podrobností. Hru si obměníme. Teď se smí na lístek napsat slovy, co se stane, ale není nutné přesně určit, jakou barvu budou mít jednotlivá patra věže. Podaří-li se nám tato obecnější předpověď, získáme bod.

Dejme tomu, že tři hráči X, Y a Z na své lístky napsali:

X: Ve věži bude červená a zelená kostka.

Y: Věž bude jednobarevná.

Z: Ve věži bude víc červených kostek než zelených.

Dále přijde trojí tah kostky bez vracení, stavba věže a porovnání s předpovědí každého z hráčů.

Záleží na tom, kdo bude provádět tah? Samozřejmě že ne! Šanci, že vytáhne takovou a ne jinou kostku, má X, Y i Z stejnou, stejnou jako kdokoliv jiný ochotný se zúčastnit. Bude těžké ohodnotit výhry hráčů? Každý napsal, jaká věž se podle něho po tahu objeví. Na jejich lístcích jsou popsány slovy určité jevy. Jak to bude s výhrou u každého z nich?

Hráč X má jisté, že vyhraje. Ve věži bude jistě červená i zelená kostka. Je nemožné, aby vyhrál Y (jak to odůvodníte?). Hráč Z nemá výhru jistou, není však nemožná. Je možné, že vyhraje.

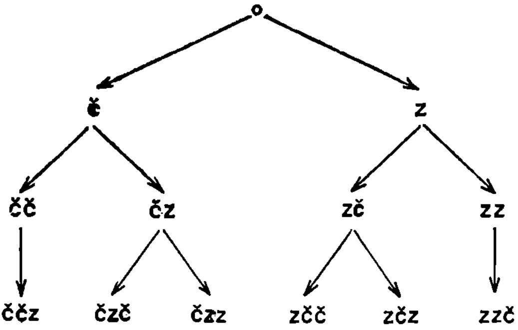
3.2. JEV

Každý hráč vsadil na nějaký jev, který popsal slovy. Označme tyto jevy postupně A, B, C. Jev A je *jistý*. Jev B je *nemožný*. Jev C je *možný*.

Na obr. 3.1 je strom uvedeného vybírání kostek z krabičky U. Když ze stromu otrháme všechny výsledky, dostaneme prostor výsledků

$$\Omega = \{\check{c}\check{c}z,\ \check{c}z\check{c},\ \check{c}zz,\ z\check{c}\check{c},\ z\check{c}z,\ zz\check{c}\}.$$

Dostali jsme tak všechny možné věže (zakódované posloupnostmi), které mohou uvedeným náhodným výběrem vzniknout.



Obr. 3.1. Náhodný výběr kostek bez vracení z krabičky, ve které jsou dvě kostky *č* a dvě kostky *z*

Dejme tomu, že výsledek byla věž *čzč*. Kdo v tom případě vyhrál? Pro koho byl tento výsledek příznivý? Jistě vyhrál X. Vyhrál také Z. Výsledek *čzč* je pro výhru těchto dvou hráčů příznivý. Říkáme, že výsledek je příznivý pro jev, na který vsadil X, a pro jev, na který vsadil Z. Stručně řekneme, že výsledek *čzč* je *příznivý pro jev A*. Výsledek *čzč* je také příznivý pro jev C. Výsledek *čzč* však *není příznivý pro jev B*.

Pro jev C jsou příznivé ještě další dva výsledky *ččz* a *zčč*. Množina {*čzč*, *ččz*, *zčč*} je množina všech výsledků z Ω, které jsou příznivé pro jev C. Tuto množinu můžeme chápat jako kód jevu C. Pišme tedy $C =$ {*čzč*, *ččz*, *zčč*}. Jev popsaný slovy se tak dá vyjádřit jako podmnožina prostoru výsledků, a to jediným způsobem.

Pro jev A je příznivý každý výsledek. Jev A tedy zakódujeme množinou Ω, $A = \Omega$.

Co s jevem B? Pro jev B není příznivý žádný výsledek. Jeho kód je prázdná množina, $B = \emptyset$.

Úloha 3.1. Jevy A, B a C, které hráči popsali slovy, souvisely s náhodným výběrem kostek bez vracení a se stavbou věží. Můžeme samozřejmě uvažovat ještě mnoho dalších jevů souvisejících s tímto pokusem, například:

D: Přízemí věže bude zelené.
E: Přízemí a I. patro budou mít stejnou barvu.
F: Přízemí a I. patro budou červené.
G: Aspoň jedno podlaží (přízemí nebo některé patro) budou zelené.

Zakódujte tyto jevy, vyjádřete je jako podmnožiny množiny Ω. Pro jev F je příznivý jen jeden výsledek *ččz*. Kód jevu F bude jednoprvková množina {*ččz*}. Píšeme F = {*ččz*}.

Přišli jsme na kloub tomu, jak kódovat jevy související s náhodným pokusem, máme-li zakódovány jeho výsledky.

Příklad 3.1. Množina Ω = {⚁, ⚃, ⚀, ⚂, ⚅, ⚄} je, jak si snadno domyslíme, prostor výsledků při hodu obyčejnou kostkou a zjištění horní stěny po jejím dopadu. Popišme slovy různé jevy:

A: Padne sudý počet teček.
B: Padne stěna, na níž je počet teček dělitelný sedmi.
C: Na stěně, která se objeví nahoře, bude aspoň 5 teček.
D: Počet teček na horní stěně nebude větší než 6.

Tyto jevy zapíšeme jako podmnožiny prostoru Ω takto:

A = {⚃, ⚁, ⚅}, $B = \emptyset$, C = {⚅, ⚄}, $D = \Omega$.

Úloha 3.2. Popište slovy zakódované jevy:

E = {⚃, ⚂, ⚁}, F = {⚀, ⚁}

Úloha 3.3. Pomocí rulety č. 4 vybíráme (náhodně) dvakrát po jedné z deseti číslic. Výsledek výběru bude dvojice číslic. Prostor výsledků bude

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

neboli $\Omega = \{xy : x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$.

Zakódujte následující jevy:

A: Vybraná dvojice číslic bude tvořit dvojciferné číslo.
B: Vybraná dvojice bude číslo dělitelné číslem 25.
C: Dostaneme dvojici, která bude tvořit číslo ne větší než 90.
D: Vybraná dvojice bude tvořit číslo dělitelné třemi.
E: Vybraná dvojice bude číslo dělitelné 51.
F: Vybraná dvojice číslic bude tvořit číslo dělitelné jedenácti.

Pozor: Dvojice xy znamená číslo, v němž x jsou desítky a y jednotky. Nespleťte si to s označením xy pro součin x, y, které se užívá v algebře!

Jevy kódujeme množinami. Množinu můžeme popsat buď výčtem všech jejích prvků, nebo nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby prvek do množiny patřil. Podmínky, které popisují některé z množin A až F, jsou kritéria dělitelnosti. Zopakujte si je.

Příklad 3.2. V příkladu 2.7 rodiče sledovali pohlaví svých tří dětí, jak se postupně rodily. To je zajímavý příklad náhodného pokusu. Množina {♀♀♀, ♀♂♀} je podmnožina prostoru výsledků. Všimněme si prvků této množiny. Charakteristická společná vlastnost obou (všech) prvků této množiny je, že nejstarší i nejmladší dítě jsou děvčata. Žádný další výsledek z Ω už tuto vlastnost nemá. Uvažovaná množina je jev A, který slovy popíšeme takto: nejmladší a nejstarší z trojice dětí bude děvče. Jevu B — nejmladší dítě je chlapec — bude odpovídat množina

$$\{♀♀♂, ♀♂♂, ♂♀♂, ♂♂♂\}.$$

Úloha 3.4. Popište slovy jev $C = \{♀♀♂, ♀♀♀\}$. Zakódujte jevy

D: Nejmladší dítě bude děvče.
E: Všechny děti budou děvčata.
F: Chlapců bude víc než děvčat.
G: Narodí se právě jeden chlapec a dvě děvčata.

Příklad 3.3. V příkladu 2.5 nastupovaly paní *X* a *Y* do tramvajové soupravy. Věnujme jim trochu pozornosti. Prostor výsledků bude $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$. Podmnožina $A = \{11, 22, 33\}$ je množina právě těch výsledků, kdy obě paní nastoupily do stejného vozu. *A* je následující jev: Obě paní nastoupily do téhož vozu. Jevu *B* — paní nastoupily do různých vozů — odpovídá množina $B = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$.

Úloha 3.5. Popište slovy jev $C = \{12, 11, 13\}$. Zakódujte jevy popsané slovy takto:

D: Paní *X* nastoupí do prostředního vozu.
E: Paní *X* ani paní *Y* nenastoupí do prvního vozu.

Teď je vhodná chvíle, abychom definovali jev. Definici jevu zatím zformulujeme pro případ, že souvisí s náhodným pokusem, při němž je množina všech možných výsledků konečná.

Definice 3.1. *Náhodný jev*, který souvisí s náhodným pokusem o konečném počtu všech možných výsledků, budeme říkat každé podmnožině prostoru výsledků tohoto náhodného pokusu. Často budeme místo náhodný jev říkat jenom *jev*.

V našich příkladech a úlohách se vyskytovaly jevy, pro které byl příznivý každý výsledek. Kódovali jsme je množinou všech možných výsledků, tj. celým prostorem výsledků. Kdybychom si na tyto jevy vsadili, měli bychom výhru jistou. Mezi všemi podmnožinami prostoru výsledků má celý prostor výsledků významné postavení.

Definice 3.2. Prostor výsledků (jako jedna z podmnožin téhož prostoru výsledků) se nazývá *jistý jev.*

Definice 3.3. Prázdné množině (to je podmnožina prostoru výsledků) se říká *nemožný jev.*

Příklad 3.4. Hoďme dvakrát kostkou č. 1 a pokaždé sledujme, která stěna se objeví nahoře. Výsledky kódujme (podle úmluvy z příkladu 2.4) dvojicemi počtů teček, které se objevily (po dopadu) na horních stěnách. Prostor výsledků si nejlépe znázorníme čtvercovou tabulkou

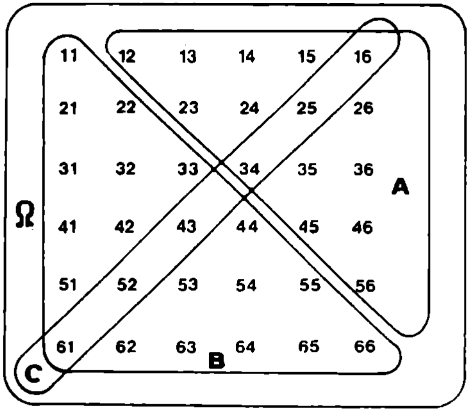
	11	12	13	14	15	16
	21	22	23	24	25	26
	31	32	33	34	35	36
	41	42	43	44	45	46
Ω	51	52	53	54	55	56
	61	62	63	64	65	66

Do tabulky zaneseme jevy

A: Počet teček při prvním hodu bude menší než při druhém hodu.

B: Při druhém hodu nepadne víc teček než při prvním.

C: Součet teček z obou hodů bude 7.
D: Při prvním hodu padne stěna se šesti tečkami.
E: Při prvním hodu padne nanejvýš 5 teček.
F: Součet teček z obou hodů bude menší než 20.
G: Součet teček z obou hodů bude 13.



Obr. 3.2. Některé podmnožiny prostoru výsledků (jevu) při dvojím hodu obyčejnou kostkou

Úloha 3.6. Zakódujte (vyznačením v tabulce) ostatní jevy z minulého příkladu.

Je-li výsledek pro jev příznivý, patří výsledek do množiny, kterou je jev zakódován (stručně: do množiny, která je ten jev). Povede-li pokus k tomuto výsledku, řekneme, že nastal příslušný jev.

Jestliže výsledek dvojitého hodu kostkou byla dvojice 66, pak nastal jev *D* a také nastal jev *B*. Výsledek 66 je příznivý pro oba jevy. V tomto případě nenastal jev *E*, ani *A*, ani *C*.

3.3. JAK SE SJEDNOCUJÍ JEVY? CO JE TO PRŮNIK JEVŮ? OPAČNÉ JEVY. DISJUNKTNÍ JEVY

Jevy jsou vlastně množiny. Můžeme proto mluvit o sjednocení jevů a o průniku jevů. Také má smysl mluvit o disjunktních jevech. Operace s jevy nejsou nic jiného než nám dobře známé operace s příslušnými množinami.

Příklad 3.5. Vraťme se k jevům z minulého příkladu a všimněme si, že $A \cap B = \emptyset$. Jevy A a B jsou disjunktní. Co to znamená? Žádný výsledek příslušného náhodného pokusu není současně příznivý pro první i druhý jev. Dále platí $A \cup B = \Omega$, sjednocení jevů A, B je jistý jev. Obě tyto vlastnosti můžeme souhrnně vyjádřit tak, že pro jev B jsou příznivé právě ty výsledky, které nejsou příznivé pro jev A. Do množiny (jevu) B patří právě ty výsledky z Ω, které nepatří do množiny (jevu) A.

Definice 3.4. Jev B, do kterého patří (pro který jsou příznivé) právě ty výsledky z Ω, které nepatří do jevu A, nazveme *jev opačný* k A a označíme symbolem A'. Je-li jev B opačný k A, je také jev A opačný k B. O těchto jevech můžeme tedy stručně říkat, že jsou *opačné*.

Jev B z minulého příkladu je opačný k A, tj. $B = A'$. Dva jevy jsou opačné, právě když jsou disjunktní, a jejich sjednocení je jistý jev.

Úloha 3.7. V příkladech, které jsme probrali, najděte opačné jevy.

Úloha 3.8. V přístroji pro tah koulí jsou čtyři kuličky očíslované 0, 1, 2, 3. Dvakrát táhneme s vracením po jedné kuličce. Říkáme, že táhneme číslo, kterým je kulička očíslována. Výsledek náhodného pokusu je dvojice číslic. Tuto dvojici budeme považovat za číslo. Číslice tažená jako první znamená počet desítek, druhá počet jednotek. Dvojice 03 je prostě číslo 3. Vyjádřete průběh tohoto náhodného pokusu stromem. Sestavte prostor výsledků. Následuje několik jevů souvisejících s naším pokusem:

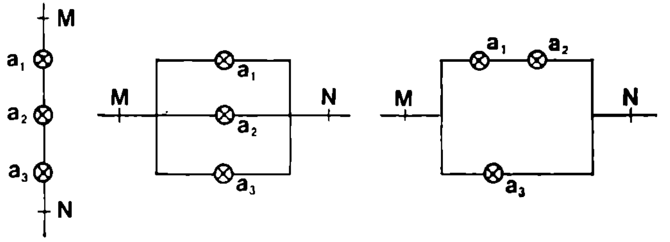
A: Dostaneme číslo dělitelné čtyřmi.
B: Dostaneme liché číslo.
C: Číslo, které náhodným výběrem dostaneme, bude dělitelné dvěma.
D: Číslo bude dvojciferné.
E: Číslo bude dělitelné třemi.
F: Číslo bude dělitelné číslem 33.
G: Dostaneme číslo větší než 33.
H: Číslo bude větší než 21.

Zakódujte tyto jevy. Popište slovy jevy $C \cap E$, $B \cup C$, $B \cup A$. Uveďte disjunktní jevy. Uveďte opačné jevy.

Úloha 3.9. Řidič projíždí městečkem. Na jeho trase jsou tři rušné křižovatky řízené světly. Signalizace není synchronizována, tj. řízení jedné křižovatky nesouvisí s řízením ostatních. O tom, se kterou barvou se řidič setká, rozhoduje náhoda. Očíslujeme křižovatky tak, jak jdou za sebou, a sledujme, s kterými barvami (*č* - červená, *z* - zelená, *o* - oranžová) se řidič na křižovatkách postupně setká. Sestavte strom tohoto třietapového náhodného pokusu. Popište prostor výsledků. Zakódujte jevy

A: Řidič nebude muset na křižovatkách zastavit.
B: Zastaví ho jen světla na křižovatce č. 2.

C: Řidič bude muset zastavit nejvýše na dvou křižovatkách.



Obr. 3.3.

Úloha 3.10. Na obr. 3.3 jsou části MN tří elektrických obvodů. Sledujme v určitém okamžiku žárovky a_1, a_2, a_3 zapojené do obvodu (žárovka je buď dobrá - 1, nebo spálená - 0). Budeme předpokládat, že ke spálení žárovky dochází náhodně. Naše pozorování je tedy náhodný pokus. V každém z případů a) b) c) ho znázorněte stromem a sestavte prostor výsledků. Označme A_k jev, že žárovka a_k je spálená. Vyjádřete jevy A_k jako podmnožiny prostoru výsledků. Pomocí jevů A_k vyjádřete jevy

B: Proud nebude obvodem procházet, neboť je obvod přerušen.

C: Proud bude procházet.

Návod: V případě b) je např. $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.