O nerovnostech a nerovnicích

Kapitola 8. Lineární programování

In: František Veselý (author); Jan Vyšín (other); Jiří Veselý (other): O nerovnostech a nerovnicích. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 68–80.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404010

Kapitola 8.

LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Poměrně malé rozšíření středoškolského učiva o lineárních rovnicích a nerovnicích nám umožňuje, abychom v tomto článku ukázali na společné vlastnosti i metody řešení některých matematických úloh, které jsou spjaty s aktuálními problémy současného společenského života. Jejich podstatu je možno charakterizovat takto:

I. Daná úloha vede k sestavení lineárních rovnic nebo nerovnic o n neznámých, pro něž se mají nalézt řešení v oboru nezáporných čísel. Pro taková řešení budeme užívat názvu *přípustná řešení.*

II. V množině přípustných řešení mají být nalezena taková, pro něž veličina stanovená lineárním početním výrazem vzhledem k neznámým nabývá hodnoty co nejmenší nebo co největší, a to podle účelu, který má řešení úlohy sledovat. Předpis pro stanovení této nejmenší (minimální) nebo největší (maximální) hodnoty veličiny, kterou v našich úlohách budeme označovat písmenem m, nazveme *účelovou funkcí.*

Řešení úloh tohoto druhu objasníme na jednoduchých příkladech, při nichž přístup k němu ukážeme nejprve geomericky, a pak teprve vyložíme početní postup. Pro omezený rozsah této knížky budou příklady voleny tak, aby zahrnovaly vždy několik úloh.

Příklad 1. Hledejme takové řešení rovnice $3x + 2y - 15 = 0$, pro které platí $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ a pro které je číslo $m = x + 2y$ a) co nejmenší, b) co největší.

I. Množinu všech přípustných řešení této úlohy jsme již hledali početně v příkladu 5 kapitoly 6. Geometricky jí odpovídá množina všech bodů úsečky PQ na přímce r v obr. 2.

II. Rovnici $x + 2y = 0$ odpovídá přímka OR, označená p_0 v obr. 2. Body $[x, y]$, které jsou obrazy přípustných řešení, leží v $\bar{\varrho}(p_0)$, a platí pro ně tedy $x + 2y = m > 0$. Pro vzdálenost v bodu $[x, y]$ v polorovině $\bar{\varrho}(p_0)$ od přímky p_0 platí:

$$v = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{5}} = \frac{m}{\sqrt{5}}.$$

Bude-li m nejmenší, bude též v nejmenší a obráceně; z bodů úsečky PQ má od přímky p_0 nejmenší vzdálenost bod $P \equiv [5; 0]$ a v tom případě $m = 5$. Bude-li m největší, bude též v největší a obráceně; z bodů úsečky PQ má od přímky p_0 největší vzdálenost bod $Q \equiv [0; 7,5]$ a v tom případě $m = 15$.

Hledaná řešení daných úloh v tomto příkladě jsou: a) $x = 5$, $y = 0$, $m = 5$, b) $x = 0$, $y = 7,5$, $m = 15$.

Poznámka. Kdybychom úlohy řešené v předcházejícím příkladu obměnili tak, že bychom požadovali řešení v oboru celých čísel, pak by přípustná řešení byla zobrazena jen třemi body $[5; 0]$, $[3; 3]$, $[1; 6]$ na úsečce PQ (viz třetí odstavec předcházející kapitoly). V tomto případě by bylo nejmenší $m = 5$ pro $x = 5$, $y = 0$ a největší m pro $x = 1$, $y = 6$.

Příklad 2. Hledejme taková řešení nerovnic

$$
\begin{aligned}
y &\geqq 0,\\
x &\geqq 0,\\
x + 2y - 2 &\geqq 0,\\
x + 4y - 20 &\leqq 0,\\
2x + y - 12 &\leqq 0,
\end{aligned}
$$

pro která $m = x + 2y$ nabývá hodnoty a) nejmenší, b) největší.

I. Všechna přípustná řešení daných úloh jsou zobrazena body konvexního pětiúhelníku $PACBQ$ (viz příklad 5 předcházející kapitoly), jehož vrcholy dovedeme určit geometrickými konstrukcemi i analyticky.

II. Označíme-li p_0 přímku o rovnici $x + 2y = 0$, pak obrazy všech bodů, jejichž souřadnice udávají přípustná řešení dané úlohy, leží opět v $\bar{\varrho}(p_0)$. Obdobnou úvahou jako v předcházejícím příkladě dostaneme tyto výsledky:

a) Nejmenší hodnoty $m = 2$ nabývá m pro taková přípustná řešení x, y, jejichž obrazy $[x, y]$ leží na úsečce PQ. V tomto případě má úloha nekonečný počet řešení.

b) Největší hodnoty $m = 12$ nabývá m pro řešení $x = 4$, $y = 4$, jehož obrazem je bod C, který je nejvzdálenější od přímky p_0. V tomto případě má úloha jediné řešení.

Při různých účelových funkcích můžeme pochopitelně dostat různá řešení, i když přípustná řešení zůstanou stejná. Z geometrického názoru je zřejmé, že číslo m nabude některé krajní hodnoty, ať již minimální či maximální, buď jen v jednom vrcholu konvexního geometrického útvaru, jehož body jsou obrazy přípustných řešení, nebo v jeho dvou vrcholech, přičemž má pak úloha nekonečný počet řešení, jež odpovídají bodům na spojnici příslušných dvou sousedních vrcholů. Tento poznatek (který přijmeme za správný bez důkazu) nám umožní, abychom celou úlohu řešili početně. Určíme-li totiž početně všechny vrcholy konvexního pětiúhelníku $PACBQ$ postupem, který jsme vyložili v příkladu 5 předcházející kapitoly, je možno souřadnice těchto vrcholů dosadit do účelové funkce a zjistit pak příslušné řešení. Snadným výpočtem najdeme $P \equiv [2; 0]$, $A \equiv [6; 0]$, $C \equiv [4; 4]$, $B \equiv [0; 5]$, $Q \equiv [0; 1]$. Dosadíme-li souřadnice těchto vrcholů do účelové funkce, dostaneme pro ně čísla $m = 2, 6, 12, 10, 2$. Tak najdeme dva vrcholy P, Q, v nichž m nabývá minimální hodnoty 2, a bod C, v němž m nabývá maximální hodnoty 12.

Příklad 3. Výrobní podnik má 100 strojů druhu S_1 a 150 strojů druhu S_2, jež slouží k výrobě několika typů výrobků pro tuzemskou potřebu i pro vývoz do zahraničí. Z nich jen výrobky typu A a typu B jsou exportovány do SSSR a přinášejí našemu národnímu hospodářství zisk 5 rublů za 1 výrobek typu A a 4 ruble za 1 výrobek typu B. Ke zhotovení jednoho výrobku typu A je třeba 2 pracovních hodin na stroji S_1 a 4 pracovních hodin na stroji S_2, zatímco pro zhotovení jednoho výrobku typu B je třeba 2 pracovních hodin na stroji S_1 a 2 pracovních hodin na stroji S_2. Výrobní podnik je vázán státním plánem, aby zajistil denně zisk 1000 rublů pro naše socialistické hospodářství. Z provozních důvodů mohou pro export do SSSR pracovat stroje S_1 nejvýš ve 2 směnách po 8 hodinách a stroje S_2 nejvýš v 1 směně 8 hodin denně. Za těchto podmínek máme nalézt řešení tří úloh na stanovení pracovního plánu určujícího počet exportních výrobků typu A a typu B, aby byl splněn tento účel:

1. aby výrobní podnik zajistil co největší zisk z exportu do SSSR,

2. aby vyráběl co největší celkový počet výrobků pro export do SSSR,
3. aby byla co nejmenší spotřeba určité suroviny za předpokladu, že se jí spotřebuje 1 kg na jeden výrobek typu A nebo B.

I. Podmínky omezující výrobu exportních předmětů typu A nebo B jsou ve všech třech úlohách stejné. Označíme-li x plánovaný počet výrobků typu A a y plánovaný počet výrobků typu B, pak snadno sestavíme nerovnosti

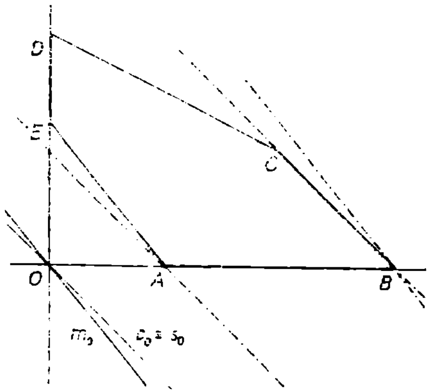
$$\begin{aligned} 2x + 4y &\leqq 100.8.2, \\ 2x + 2y &\leqq 150.8.1, \\ 5x + 4y &\geqq 1000. \end{aligned}$$

První dvě z nich vyjadřují, že počet pracovních hodin na strojích druhu S_1 nemůže překročit 100.8.2 pracovních hodin (100 strojů pracujících nejvýš ve dvou osmihodinových směnách) a na strojích druhu S_2 nemůže překročit 150.8 pracovních hodin (150 strojů pracujících nejvýš 8 hodin denně). Třetí nerovnost vyjadřuje, že zisk z exportu musí být aspoň 1000 rublů denně. Úpravou těchto tří nerovností a připojením podmínek, že čísla x, y nemohou být záporná, dostaneme tuto soustavu nerovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leqq 800, \\ x + y &\leqq 600, \\ 5x + 4y &\geqq 1000, \\ x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Grafickou metodou nebo početně určíme vrcholy konvexního pětiúhelníka $ABCDE$, v němž leží obrazy všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice představují přípustná řešení všech tří úloh.

Pětiúhelník *ABCDE* je znázorněn ve vhodném měřítku na obr. 4. Chce-li vedení výrobního podniku přihlédnout ke všem podmínkám, které byly uvedeny ve znění úloh, musí při stanovení výrobního plánu volit taková celá čísla x, y, aby vyhovovala podmínkám v nerovnicích



Obr. 4

(8.1), tj. aby body $[x, y]$ ležely v pětiúhelníku *ABCDE*. Rozhodne-li vedení podniku například, že se denně bude vyrábět 300 výrobků typu *A* a 200 výrobků typu *B*, bude vyhověno všem daným podmínkám, neboť stroje druhu S_1 budou pracovat 1400 hodin, stroje druhu S_2 1000 hodin a celkový zisk z vývozu do SSSR bude 2300 rublů denně. Snadno se přesvědčíte, že bod [300; 200] je bodem pětiúhelníka *ABCDE*.

Každému řešení nerovnic (8.1) odpovídá bod pětiúhelníka *ABCDE*, avšak není pravda, že by každému bodu pětiúhelníka odpovídalo řešení nerovnic (8.1), které lze ve výrobě realizovat. Musíme totiž v úlohách tohoto příkladu pamatovat na to, že plánovaný počet výrobků typu A i B musí být dán celým nezáporným číslem. Proto nás z bodů pětiúhelníka $ABCDE$ zajímají jen ty body, které jsou mřížovými body roviny.

II. Z množiny všech celočíselných přípustných řešení, která je pro všechny tři úlohy tohoto příkladu společná, musíme nyní vybrat taková řešení, aby jistá veličina, určená účelovou funkcí, nabývala maximální nebo minimální hodnoty. Nyní ukážeme postup při dalším řešení daných úloh.

Úloha 1. Označíme-li m celkový zisk z exportu do SSSR, který podnik denně zajišťuje, pak účelová funkce má tvar $m = 5x + 4y$. Přitom se má z přípustných celočíselných řešení vybrat takové, pro které je m největší. Označíme-li m_0 (viz obr. 4) přímku danou rovnicí $5x + 4y = 0$, pak všechna přípustná řešení mají obrazy v $\bar{\varrho}(m_0)$, takže pro ně platí $5x + 4y = m \geqq 0$. Veličina m bude největší pro ty body pětiúhelníka, které mají od přímky m_0 největší vzdálenost. Tuto vlastnost má jediný bod B pětiúhelníka $ABCDE$. Poněvadž $B \equiv [600; 0]$, plyne odtud odpověď na položenou otázku: Má-li podnik za daných podmínek dosahovat maximálního zisku z exportu do SSSR, musí vyrábět denně 600 výrobků typu A a zastavit výrobu typu B pro export; denní zisk podniku z exportu bude 3000 rublů.

Úloha 2. Označíme-li p celkový počet denně vyráběných výrobků typu A i B, pak má účelová funkce tvar $p = x + y$, přičemž hledáme z přípustných celočíselných řešení takové, pro které je p největší. Označíme p_0 přímku danou rovnicí $x + y = 0$ a opět vyhledáme v pětiúhelníku $ABCDE$ takové body, které mají od přímky p_0 vzdálenost co největší. Snadno zjistíme, že jsou to vrcholy B, C a s nimi všechny body na straně BC. Z nich nás zajímají jen ty body, které jsou mřížovými body roviny. Jsou to body [400; 200], [401; 199], [402; 198], ..., [599; 1], [600; 0]. V tomto případě má tedy úloha 201 řešení, z nichž si vedení podniku může vybrat kterékoli; přitom bude celkový počet denně vyráběných exportních výrobků 600.

Poznámka. Kdyby se požadovalo, aby celkový počet výrobků byl maximální, a současně též maximální zisk, pak by existovalo jediné řešení ($x = 600$, $y = 0$, $p = 600$, $m = 3000$).

Úloha 3. Označíme-li s velikost množství spotřebované suroviny, pak má účelová funkce tvar $s = x + y$, přičemž však požadujeme, aby s bylo co možná nejmenší. Snadno se ukáže, že obrazem příslušného řešení je bod $A \equiv [200; 0]$, který je nejméně vzdálen od přímky $s_0 \equiv p_0$. V tomto případě bude podnik vyrábět 200 výrobků typu A denně, spotřebuje 200 kg suroviny a bude přitom plnit závazný plán zisku 1000 rublů denně.

Sami si jistě rozřešíte všechny tři úlohy tohoto příkladu analyticky a bez pomoci jakýchkoli náčrtů. Přitom budete postupovat takto:

a) Najdete průsečíky všech dvojic hraničních přímek polorovin (8.1).

b) Určíte, které z nalezených bodů vyhovují všem nerovnicím (8.1), tj. najdete ty body, které jsou vrcholy geometrického útvaru popsaného nerovnicemi (8.1).

c) Určíte pro všechny vrcholy hodnoty té veličiny, která je mírou účelu sledovaného řešením, a rozhodnete, v kterých vrcholech nabývá požadované krajní hodnoty (maximální nebo minimální).

d) Nabývá-li tato veličina krajní hodnoty ve dvou vrcholech, což mohou být jen dva sousední vrcholy, pak mají tuto vlastnost též všechna přípustná řešení na spojnici obou vrcholů.

Různé otázky hospodářského života, strategické otázky vojenské i mnohé problémy průmyslové či zemědělské výroby vedou k podobným matematickým úlohám, s jakými jsme se setkali a které jsme řešili v této kapitole. Poněvadž při matematickém řešení těchto otázek jde o řešení lineárních rovnic a nerovnic s vedlejší podmínkou, která je vymezena rovněž lineární rovnicí vzhledem k neznámým, dostal tento obor matematiky název *lineární programování*. Je to jeden z nejmladších oborů aplikované matematiky, který začal vyrůstat v době, kdy matematikové za druhé světové války musili řešit některé otázky vojenských operací. Dnes se ho využívá k řešení nejrozmanitějších problémů civilního společenského života. Při řešení takových problémů ze skutečného života nejde však o jednoduché úlohy se dvěma neznámými, nýbrž o řešení úloh s velkým počtem neznámých, přičemž vztahy mezi nimi jsou určeny velkým počtem lineárních nerovnic nebo rovnic. Řešení takových úloh by však bylo velmi zdlouhavé a nákladné, kdyby k jejich řešení nebyla nalezena řada mnohem účinnějších metod (s kterými se ovšem zde nemůžeme seznamovat) a kdyby se pro jejich provádění nemohlo používat moderních, rychle pracujících samočinných počítačů. Naše úlohy vám zatím ukázaly jen pohled na podstatu úloh lineárního programování.

Poněvadž texty úloh z oboru lineárního programování jsou zpravidla dlouhé, neuvádíme tu další jednoduché příklady úloh se dvěma neznámými. Místo toho ukážeme řešení úlohy, v níž při sestavení příslušných rovnic a nerovnic zavedeme šest neznámých, avšak vztahy mezi nimi nám dovolí vyloučit čtyři z nich tak, že se pak řešení úlohy dá provést metodami nám již známými.

Příklad 4. Důl D_1 těží denně 800 tun, důl D_2 600 tun uhlí. Vytěžené uhlí se má dopravovat do tří spotřebních středisek S_1, S_2, S_3, z nichž S_1 potřebuje 500 tun, S_2 500 tun, S_3 400 tun denně. Jak je třeba rozvrhnout dodávky uhlí z dolů do spotřebních středisek, aby dopravní náklady byly minimální, jestliže dopravné za 1 tunu z dolu D_1 do S_1, S_2, S_3 stojí 16 Kčs, 10 Kčs, 15 Kčs a z dolu D_2 do S_1, S_2, S_3 stojí 10 Kčs, 12 Kčs, 10 Kčs.

Řešení úlohy se stane přehlednějším užitím těchto tabulek:

	S_1	S_2	S_3
D_1	16	10	15
D_2	10	12	10

	S_1	S_2	S_3
D_1	x	y	z
D_2	u	v	w

První z těchto tabulek udává dopravné za 1 tunu uhlí z obou dolů do spotřebních středisek S_1, S_2, S_3; druhá tabulka obsahuje proměnné, jimiž budou označena množství uhlí přepravovaného z obou dolů do spotřebních středisek S_1, S_2, S_3, přičemž za jednotku zvolíme 100 tun. Celkové dopravní náklady označíme písmenem m a za jejich jednotku zvolíme 100 Kčs. Nyní sestavíme 3 skupiny lineárních rovnic a nerovnic, jejichž smysl sami poznáte:

$$x + u = 5, \quad y + v = 5, \quad z + w = 4, \tag{8.2}$$

$$x + y + z = 8, \quad u + v + w = 6, \tag{8.3}$$

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0, \quad u \geqq 0, \tag{8.4}$$

$$v \geqq 0, \quad w \geqq 0.$$

Pro celkové dopravní náklady sestavme účelovou funkci

$$m = 16x + 10y + 15z + 10u + 12v + 10w\,. \quad (8.5)$$

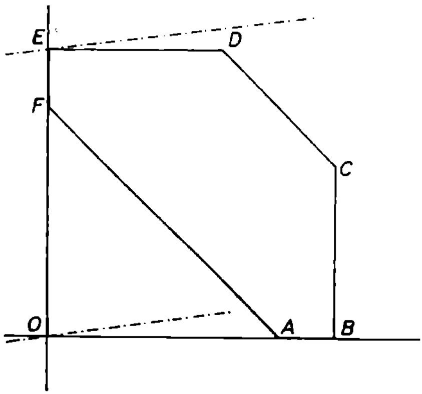
Z rovnic (8.2) a (8.3) vypočteme

$$u = 5 - x, \quad v = 5 - y, \quad w = 4 - z,$$
$$z = 8 - x - y$$

a po dosazení do (8.4) a (8.5) dostaneme po snadné úpravě

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 8,\ x \leqq 5,\ y \leqq 5, \quad (8.6)$$
$$x + y \geqq 4,$$

$$m = x - 7y + 190\,. \quad (8.7)$$



Obr. 5

Množina všech přípustných řešení, která vyhovují nerovnicím (8.6), je zobrazena body konvexního šestiúhelníka $ABCDEF$ (viz obr. 5). Z přípustných řešení se má vybrat takové, pro které m, určené rovnicí (8.7), nabývá hodnoty minimální. Rovnici $x - 7y + 190 = 0$ by odpovídala na obr. 5 přímka protínající souřadnicové osy x, y v bodech $P \equiv [-190; 0]$, $G \equiv \left[0; \frac{190}{7}\right]$, kterou si jen představíme. Je rovnoběžná s přímkou o rovnici $x - 7y = 0$, která prochází počátkem a je v obr. 5 zobrazena. Všechny body šestiúhelníka $ABCDEF$ leží v polorovině $x - 7y + 190 \geq 0$ a číslo $m = x - 7y + 190$ bude nejmenší pro bod $E \equiv [0; 5]$, pro který $m = 155$. Dopravní náklady ve výši 15 500 Kčs budou tedy nejmenší, když distribuce dodávek uhlí bude provedena tak, jak je zřejmé z následující tabulky:

	S_1	S_2	S_3
D_1	0	5	3
D_2	5	0	1

V této tabulce znamená ovšem jednotka dodávku 100 tun uhlí.

Analytické řešení této úlohy si provedete jistě sami jako cvičení. Přitom se jednoduchým výpočtem můžeme přesvědčit, že roční úspora na dopravném při nejlepším rozvržení může přesahovat milión Kčs proti jinému, nepříznivějšímu rozvržení dodávek, ač jsme zvolili pro náš příklad jen dva doly s nízkou těžbou. Proto si jistě dovedete udělat správnou představu o úsporách, jichž je možno dosáhnout, když se pro celostátní distribuci uhlí ze všech dolů použije nejvýhodnějšího řešení, které získáme pracovními metodami lineárního programování. Obdobně je možné dosáhnout velkých úspor při rozvrhování dodávek cihel z různých cihelen na početná staveniště, dodávek mouky z velkomlýnů do velkých pekáren apod. Z těchto příkladů vybraných z jediného oboru užité matematiky si můžete udělat představu o významu celé matematiky, která umožňuje ve státě socialisticky organizovaném hospodárné využití energie i pracovních sil k prospěchu všeho lidu.