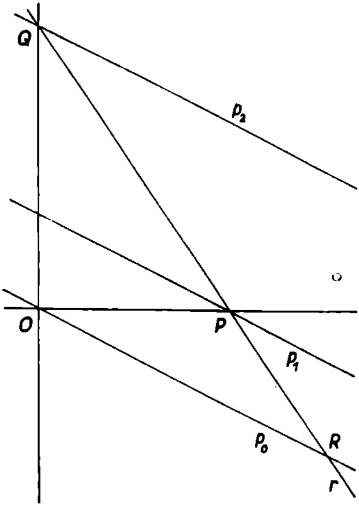
Kapitola 7.

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC A NEROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH

Ve škole jste řešili soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, přičemž grafické znázornění rovnic vám usnadnilo jejich řešení. Vaše vědomosti v tomto oboru chceme nyní osvěžit a trochu rozšířit, a to zejména tím, že budeme uvažovat též soustavy lineárních rovnic i nerovnic o dvou neznámých. Nerovnicím o dvou neznámých odpovídají při geometrickém znázornění poloroviny, jak jste se o tom poučili již v kap. 2, kterou si před studiem této kapitoly znovu přečtěte. Pro omezený rozsah této knížky vás na příkladech seznámíme hlavně s těmi novými poznatky, které budete potřebovat ke studiu dalšího článku. Pro úsporu místa nejsou v této knížce otištěny takové obrázky, které si sami snadno narýsujete podle znění textu.

Jedna lineární rovnice o dvou neznámých, např. $3x + 2y - 15 = 0$, má nekonečný počet řešení. Každému z nich odpovídá bod $[x, y]$ přímky, která je grafickým znázorněním příslušné rovnice. V případě námi zvoleném je to přímka $r \equiv PQ$ v obr. 2. Body $P \equiv [5; 0]$, $Q \equiv \left[0; \frac{15}{2}\right]$ najdete snadno jako průsečníky dané přímky se souřadnicovými osami.

Rýsujete-li obraz přímky na čtverečkovaném papíře, pak někdy velmi snadno postřehnete, že přímka prochází několika *mřížovými body* roviny, tj. takovými body, jejichž obě souřadnice jsou čísla celá. Souřadnice těchto bodů pak představují řešení dané rovnice v oboru celých čísel. Tak např. u přímky r snadno najdete mřížové body



Obr. 2

[—1; 9], [1; 6], [3; 3], [5; 0], [7; —3] atd. Všimnete-li si dobře zápisu těchto po sobě jdoucích mřížových bodů na přímce, pak snadno objevíte, že při přechodu od jednoho bodu k druhému za ním následujícímu se první souřadnice zvětší o 2, druhá se zmenší o 3. Zvolíme-li některý bod z této množiny za základní, pak můžeme všechna celočíselná řešení dané rovnice zapsat jednoduchým způsobem. Zvolíme-li např. bod [1; 6] za základní, pak pro všechny mřížové body roviny na přímce r platí: $x = 1 + 2t$, $y = 6 - 3t$, kde t je libovolné celé číslo.

Snadno lze dokázat, že na každé přímce souřadnicové roviny leží buď nekonečně mnoho mřížových bodů, nebo jen jeden, nebo žádný. Řešení rovnic v oboru celých čísel, patří k velmi starým oborům aritmetiky. Jejich řešením se zabýval mimo jiné též řecký matematik *Diofantos* (žil koncem 3. stol. n. l.). Proto se někdy též užívá názvu diofantické rovnice. Poznámky tohoto odstavce nesměřovaly k tomu, abyste se naučili řešit diofantické rovnice, nýbrž jen k tomu, abyste něco věděli o existenci těchto problémů, které patří do číselné teorie.

Je-li dána soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad (7.1)$$

v nichž koeficienty při obou neznámých nejsou současně rovné nule, pak při řešení této soustavy mohou nastat tyto případy:

a) Je $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ a platí $a_2 = ra_1$, $b_2 = rb_1$, $c_2 = rc_1$, kde r je reálné číslo různé od nuly. Po dosazení do druhé rovnice soustavy (7.1) a po vytknutí r dostaneme $r(a_1x + b_1y + c_1) = 0$, což ukazuje, že tato rovnice je ekvivalentní s první rovnicí soustavy. Soustava rovnic, která je v tomto případě znázorněna dvěma splývajícími přímkami, má nekonečný počet řešení.

b) Je $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, avšak $a_1 : c_1 \neq a_2 : c_2$, resp. též $b_1 : c_1 \neq b_2 : c_2$, pak jde o tzv. sporné rovnice, které nemají společné řešení. Dvě rovnice soustavy (7.1) jsou v tomto případě znázorněny různými rovnoběžnými přímkami, které nemají žádný společný bod.

c) Nenastane-li žádný z předcházejících výjimečných případů, soustava rovnic (7.1) má pak jediné řešení. V tomto případě jsou rovnice znázorněny dvěma různoběžnými přímkami a souřadnice x, y jejich průsečíku udávají řešení dané soustavy.

Je-li dána soustava n lineárních rovnic o dvou neznámých

$$a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \qquad (7.2)$$

kde pro všechna i platí $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, pak má jediné řešení jen tehdy, když všechny přímky odpovídající jednotlivým rovnicím soustavy (7.2) procházejí jedním bodem. Neexistuje-li bod, jímž všechny přímky procházejí, nemá soustava (7.2) žádné řešení. Nekonečný počet řešení by měla soustava (7.2) v tom případě, kdyby všechny přímky odpovídající jednotlivým rovnicím splynuly v jedinou. V tom případě by všechny rovnice byly nenulovými násobky jedné z nich.

Jestliže v dané soustavě rovnic je některá rovnice nenulovým násobkem jiné rovnice soustavy, můžeme jednu z těchto navzájem ekvivalentních rovnic ze soustavy vypustit, čímž si vyšetřování soustavy rovnic zjednodušíme. O tom, jak lze početní cestou vyšetřit řešitelnost soustavy rovnic a vzájemné vztahy mezi jednotlivými rovnicemi, vás poučí následující příklady.

Příklad 1. Vyšetřeme řešitelnost soustavy lineárních rovnic

$$x - 3y - 4 = 0,$$

$$2x + y - 8 = 0,$$

$$2x + 5y - 16 = 0,$$

$$-2x + y - 2 = 0.$$

Označme p_1, p_2, p_3, p_4 přímky, jež odpovídají daným rovnicím v pořadí, v němž jsou v úloze uvedeny, a hledejme průsečíky všech dvojic přímek. Abychom měli přehled o postupu výpočtu a nezapomněli vypočíst průsečík některé dvojice přímek, zapišme získané výsledky do tabulky (7.3). Souřadnice průsečíku přímek p_1p_2 jsou uvedeny v tabulce tam, kde se protíná řádek označený záhlavím p_1 se sloupcem se záhlavím p_2 a obdobně pro všechny ostatní dvojice přímek. Tabulka je „čtvercová", neboť má stejný počet řádek i sloupců. Ze zřejmých důvodů je souměrná podle úhlopříčky jdoucí z levého horního rohu do pravého dolního a místa na úhlopříčce zůstanou nezaplněna.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\
\hline
p_1 & * & [4; 0] & \left[\frac{68}{11}; \frac{8}{11}\right] & [-2; -2] \\
p_2 & [4; 0] & * & [3; 2] & \left[\frac{3}{2}; 5\right] \\
p_3 & \left[\frac{68}{11}; \frac{8}{11}\right] & [3; 2] & * & \left[\frac{1}{2}; 3\right] \\
p_4 & [-2; -2] & \left[\frac{3}{2}; 5\right] & \left[\frac{1}{2}; 3\right] & *
\end{array} \tag{7.3}$$

Prohlédneme-li si tabulku (7.3), zjistíme, že všechny průsečíky různých dvojic přímek jsou různé, takže daná soustava nemá řešení. Všechny čtyři přímky odpovídající daným rovnicím se protínají po dvou v šesti bodech.

K tomu, abychom zjistili, že daná soustava nemá řešení, stačilo ovšem zjistit, že pouze dva body v tabulce (7.3) jsou různé. Užitečnost tabulky (7.3) poznáme ještě později při jiné příležitosti. Kdybychom však chtěli dokázat, že soustava má řešení, museli bychom zjistit, že všecky body v tabulce (7.3) splývají.

Příklad 2. Vyšetřeme řešitelnost soustavy lineárních rovnic

$$x - 3y - 4 = 0,$$

$$-2x + y + 8 = 0,$$

$$6x + 7y - 24 = 0,$$

$$-2x + y - 2 = 0.$$

Označme q_1, q_2, q_3, q_4 přímky odpovídající rovnicím dané soustavy a sestavme příslušnou tabulku pro průsečíky dvojic přímek.

	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	*	[4; 0]	[4; 0]	[—2; —2]
q_2		*	[4; 0]	$\parallel$
q_3			*	$\left[\frac{1}{2} 3;\right]$
q_4				*

(7.4)

V tabulce (7.4) jsou zapsány průsečíky jednotlivých dvojic přímek již jen v horní části čtvercové tabulky, a to nad její úhlopříčkou vyznačenou hvězdičkami. (Kdybychom označení v záhlaví jednotlivých řádek přesunuli doprava až na místo příslušných hvězdiček, dostali bychom snad ještě přehlednější „trojúhelníkovou“ tabulku.) Ze zápisů v tabulce je zřejmé, že průsečíky přímek q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3 splývají, což znamená, že přímky q_1, q_2, q_3 procházejí bodem [4; 0]; přímky q_2 a q_4 jsou navzájem rovnoběžné, což bylo na příslušném místě tabulky vyznačeno značkou užívanou v geometrii pro rovnoběžnost. Z hlediska algebraického to znamená, že soustava rovnic utvořená z prvních tří rovnic dané soustavy má řešení a že čtvrtá rovnice je ve sporu s druhou rovnicí dané soustavy.

Příklad 3. Vyšetřeme soustavu přímek, které jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ x &= 0, \\ x + 2y - 2 &= 0, \\ x + 4y - 20 &= 0, \\ 2x + y - 12 &= 0, \end{aligned}$$

a vyhledejme všechny body, v nichž se protínají aspoň dvě přímky této soustavy.

Označme r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 přímky v tom pořadí, jak jsou dány rovnicemi. Ze zkušenosti z předcházející tabulky víme, že do první řádky tabulky máme zapsat průsečíky přímek r_1r_2, r_1r_3, r_1r_4, r_1r_5, do druhé řádky průsečíky přímek r_2r_3, r_2r_4, r_2r_5, do třetí řádky průsečíky přímek r_3r_4, r_3r_5 a do čtvrté řádky průsečík přímek r_4r_5. Jestliže tento výpočet provedeme a zapíšeme průsečíky v uvedeném pořadí, dostaneme celkem 10 různých bodů, v nichž se protínají přímky dané soustavy, a to: [0; 0], [2; 0], [20; 0], [6; 0], [0; 1], [0; 5], [0; 12], [—16; 9], $\left[\frac{22}{3};\ -\frac{8}{3}\right]$, [4; 4].

I když tabulkové metody nebudeme již mnoho používat, vyvodíme jejím užitím vzorec pro nejvyšší možný počet všech bodů, v nichž se protínají přímky dané soustavy. Čtvercová tabulka n-řadová obsahuje celkem n^2 polí, z nichž je třeba vyplnit jen $n^2 - n$ polí, avšak jen polovina z nich stačí pro zápis nejvyššího možného počtu bodů. Je jich tedy $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ čili $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Co se týká soustav lineárních nerovnic o dvou neznámých, je dobře mít stále na paměti, že nerovnicím

$$ax + by + c \geqq 0, \quad -ax - by - c \geqq 0 \qquad (7.5)$$

vyhovují souřadnice bodů ve dvou navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou o rovnici $ax + by + c = 0$. Sjednocením množin bodů těchto dvou polorovin je množina všech bodů celé roviny, jejich průnikem hraniční přímka. V 2. kapitole jsme se též naučili pravidlu, podle něhož lze rychle rozhodnout, kterou polorovinu daná nerovnice popisuje. Další úvahy o geometrických útvarech popsaných dvěma nebo několika nerovnicemi ukážeme na příkladech, v nichž místo písmen a, b, c v nerovnicích tvaru (7.5) budou zvolena určitá čísla. Přitom budeme pamatovat na to, že množina všech bodů, které vyhovují aspoň jedné nerovnici dané soustavy, je sjednocením množin, z nichž každá je popsána jednou nerovnicí. Množinu všech bodů, které vyhovují současně všem nerovnicím dané soustavy, najdeme, když vyhledáme průnik, tj. společné body množin, které jsou popsány jednotlivými nerovnicemi. Vyhledávání průniku několika polorovin budeme častěji potřebovat, a proto je budeme více procvičovat.

Příklad 4. Vyšetřeme, které poloroviny jsou popsány nerovnicemi

1. $x + 2y \geqq 0$,
2. $x + 2y - 5 \geqq 0$,
3. $-x - 2y + 15 \geqq 0$,

$$4.\ -3x - 2y + 15 \geqq 0,$$

a popišme sjednocení a průniky některých těchto polorovin.

Hraniční přímky těchto polorovin označíme p_0, p_1, p_2, r v tom pořadí, v jakém byly uvedeny poloroviny jimi vyťaté. Tyto přímky jsou zobrazeny na obr. 2. Po označení hraničních přímek polorovin můžeme dané poloroviny podle úmluvy v kapitole 2 zapsat stručně takto: 1. $\bar{\varrho}(p_0)$; 2. $\bar{\varrho}(p_1)$; 3. $\varrho(p_2)$; 4. $\varrho(r)$. V prvních dvou případech jde o poloroviny nad přímkou p_0, resp. p_1, neboť koeficient při y je kladný, ve druhých dvou případech o poloroviny pod přímkou p_2, resp. r, neboť koeficient při y je v posledních dvou nerovnicích záporný.

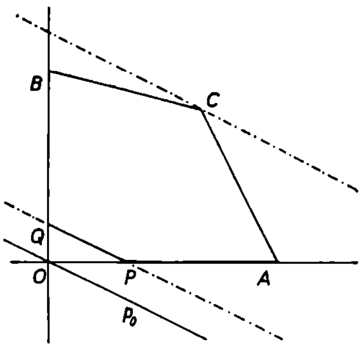
Sjednocením $\bar{\varrho}(p_0)$ a $\bar{\varrho}(p_1)$ je $\bar{\varrho}(p_0)$, jejich průnikem je $\bar{\varrho}(p_1)$. Sjednocením polorovin $\bar{\varrho}(p_1)$ a $\varrho(p_2)$ je množina všech bodů celé roviny, jejich průnikem množina bodů, které tvoří pás ohraničený rovnoběžkami p_1, p_2; stejné sjednocení i průnik mají množiny bodů tří polorovin $\bar{\varrho}(p_0)$, $\bar{\varrho}(p_1)$, $\varrho(p_2)$.

Průnikem $\bar{\varrho}(p_0)$ a $\varrho(r)$ je část roviny tvořící ostrý úhel ORQ. Jejich sjednocením je množina právě těch bodů roviny, které v ní zůstanou po vynětí vnitřních bodů průniku polorovin opačných k polorovinám $\bar{\varrho}(p_0)$ a $\varrho(r)$, tj. tedy průniku polorovin $\varrho(p_0)$, $\bar{\varrho}(r)$. Pokud nejste ještě vycvičeni v určování sjednocení a průniku dvou polorovin, můžete použít této pomůcky: Vyšrafujte polorovinu $\bar{\varrho}(p_0)$ šrafy rovnoběžnými s hraniční přímkou p_0 a polorovinu $\varrho(r)$ šrafy rovnoběžnými s hraniční přímkou r. Do sjednocení množin všech bodů obou polorovin patří pak právě všechny body z těch částí roviny, které jsou šrafovány jakkoli, do průniku body té části roviny, která má šrafy obojího směru.

Příklad 5. Vyhledejme množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice vyhovují současně nerovnicím:

$$\begin{aligned} y &\geqq 0, \\ x &\geqq 0, \\ x + 2y - 2 &\geqq 0, \\ x + 4y - 20 &\leqq 0, \\ 2x + y - 12 &\leqq 0. \end{aligned}$$

Hraničními přímkami polorovin popsaných těmito nerovnicemi jsou přímky, které jsme v příkladu 3 tohoto článku označili písmeny r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. Jde tedy o to najít průnik polorovin $\bar{\varrho}(r_1)$, $\bar{\varrho}(r_2)$, $\bar{\varrho}(r_3)$, $\varrho(r_4)$, $\varrho(r_5)$. Snad jste si povšimli, že v posledních dvou nerovnicích tohoto příkladu jsou značky $\leqq$, a že je tedy nutné znásobit



Obr. 3

tyto nerovnice číslem —1 nebo jiným záporným číslem, aby všechny nerovnice měly souhlasnou značku $\geqq$; v tom případě je pak koeficient při y záporný, a podle pravidla v kapitole 2 je hned zřejmé, že poslední dvě nerovnice popisují poloroviny pod přímkami r_4, r_5. Do množiny všech bodů, které vyhovují prvním dvěma nerovnicím této úlohy, patří právě ty body souřadnicové roviny, které vyplňují pravý úhel s vrcholem v počátku O; jeho rameny jsou kladné části os x, y, a je to tedy neomezená část roviny (sledujte obr. 3). Průnikem tohoto pravého úhlu s třetí polorovinou $\bar{\varrho}(r_3)$ je opět neomezená část roviny v kvadrantu I, která je ohraničena polopřímkami PA, QB a úsečkou PQ. Do množiny všech bodů, které vyhovují jen posledním dvěma nerovnicím, patří právě všechny body neomezené části roviny, kterou tvoří tupý úhel ACB. Průnikem všech pěti polorovin je pak pětiúhelník $PACBQ$.

Rozmyslíme si obecně, jaké rovinné útvary vznikají jako průnik dvou polorovin v závislosti na jejich vzájemné poloze. Jsou-li hraniční přímky polorovin totožné, je průnikem polorovina nebo přímka; jsou-li hraniční přímky rovnoběžné, ale různé, je průnikem polorovina, nekonečný pás nebo prázdná množina. Konečně jsou-li hraniční přímky různoběžné, je průnikem úhel.

Podobně pro tři poloroviny mohou vzniknout stejné útvary jako v případě dvou polorovin (rozmyslete si kdy) a ještě útvary další. Jsou-li např. hraniční přímky navzájem různoběžné, může být průnikem omezený útvar (trojúhelník, bod nebo prázdná množina) nebo neomezený útvar ohraničený dvěma polopřímkami a jednou úsečkou. Sami si již dovedete promyslit a načrtnout různé příklady průniku několika daných polorovin. Ty body, které jsou krajními body úseček nebo polopřímek ohraničujících geometrický útvar vzniklý průnikem několika polorovin, budeme v dalším textu nazývat vrcholy tohoto útvaru, ať jde o útvar omezený nebo neomezený.

V závěru kap. 4 jste se seznámili s pojmem konvexní geometrický útvar a s poznatkem, že průnik konvexních útvarů je též konvexní útvar. Poněvadž polorovina je útvar konvexní, jsou všechny útvary vzniklé průnikem několika polorovin konvexní. Přitom vrcholy těchto útvarů mají zvláštní postavení mezi ostatními body útvarů, které jsou průnikem několika polorovin, a to tím, že kterýkoli z nich můžete z útvaru vyjmout, přičemž útvar zůstane konvexní. Vynětím vnitřního bodu hraniční úsečky nebo polopřímky se konvexita útvaru poruší. Zůstala by však zachována, kdybychom z útvaru vyňali všechny body některé hraniční úsečky nebo polopřímky.

Nakonec rozhodneme ještě otázku, zda lze vrcholy konvexního útvaru, který je průnikem několika polorovin popsaných nerovnicemi, určit početní cestou. Uvažme, že vrcholem takového konvexního útvaru může být jen takový bod, v němž se protínají aspoň dvě hraniční přímky daných polorovin. Ty dovedeme určit tak, jak jsme to ukázali v příkladech 1, 2, 3 tohoto článku. Obecně při n daných polorovinách existuje nejvýše

$\frac{1}{2}n(n-1)$ takových bodů, které přicházejí v úvahu

jako hledané vrcholy. Musíme z nich vybrat však jen ty, které leží ve všech polorovinách, tj. vyhovují všem daným nerovnostem. Body, které jsou průsečíky hraničních přímek polorovin z příkladu 5, byly nalezeny již v příkladu 3. Prvním z nich je bod [0; 0], který vyhovuje všem daným nerovnostem s výjimkou třetí; není tedy hledaným vrcholem. Bod [2; 0] vyhovuje všem daným nerovnostem, a patří tedy k hledaným vrcholům. Takovou početní cestou určíme mezi 10 body nalezenými v příkladu 3 všechny vrcholy konvexního pětiúhelníku $PACBQ$ bez pomocných náčrtů.

Cvičení

7.1 Dokažte, že na každé z daných přímek

a) $x\sqrt{2} + y = 0$, b) $x - x\sqrt{3} + 1 = 0$

leží právě jeden mřížový bod roviny.

7.2 Jsou dány čtyři lineární rovnice o dvou neznámých:

$5x + 3y - 8 = 0$, $2x - 4y - 11 = 0$,

$4x + 18y + 17 = 0$, $x + 11y + 14 = 0$.

Sestavte tabulku řešení všech dvojic rovnic vybraných z daných čtyř rovnic a z výsledku vyvoďte závěr o vlastnostech dané soustavy rovnic i přímek jim odpovídajících.

7.3 Z daných pěti rovnic vyberte co největší počet takových rovnic, které tvoří řešitelnou soustavu:

$x + 2y - 4 = 0$, $x - y - 1 = 0$,

$4x - y + 11 = 0$, $2x - y - 19 = 0$,

$x + 5y - 13 = 0$.

7.4 Na grafu dané přímky vyhledejte několik mřížových bodů roviny a určete pak početní výrazy, které parametricky udávají celočíselná řešení dané rovnice:

a) $5x - 3y - 2 = 0$, b) $4x + 3y - 8 = 0$.

7.5 Jsou-li $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ dva mřížové body na přímce p, pak $[x, y]$ je rovněž mřížový bod roviny na přímce p, jestliže pro něj platí

$x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t$, $y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t$, kde t je libovolné celé číslo. Jsou-li $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ dva sousední mřížové body roviny na přímce p, pak uvedené vzorce zahrnují všechny mřížové body roviny na přímce p. Dokažte.

7.6 Početně určete vrcholy geometrického útvaru, jehož body $[x, y]$ vyhovují nerovnicím:

$$y - 2 \leqq 0, \qquad x + y - 7 \leqq 0,$$
$$-3x + 2y - 4 \leqq 0, \qquad x - 4y - 2 \leqq 0.$$

Po výpočtu proveďte kontrolu s užitím náčrtu.

7.7 Řešte předcházející úlohu s tou obměnou, že první nerovnici nahradíte nerovnicí $y - 2 \geqq 0$.

7.8 Které geometrické útvary v rovině jsou popsány nerovnicemi: a) $|x| < 5$, b) $|y| < 3$, c) $|x| > 5$, d) $|y| > 3$, e) $|x| < 5$, $|y| > 3$, f) $|x| \geqq 5$, $|y| \geqq 3$, g) $3 < |x| < 5$, $1 < |y| < 2$?

7.9 Načrtněte obrazy geometrických útvarů, jejichž body $[x, y]$ vyhovují nerovnicím: a) $|x - 3| < 2$, b) $|y + 2| < 1$, c) $|x - 3| < 2$, $|y + 2| < 1$, d) $|x + y| < 2$, $|x - y| < 2$.

7.10 Je-li $[x_1, y_1]$ daný bod v rovině a ε libovolné kladné číslo, pak množina všech bodů, které vyhovují podmínce

a) $|x - x_1| < \varepsilon$, $|y - y_1| < \varepsilon$, se nazývá *čtvercové (kvadratické) okolí bodu* $[x_1, y_1]$,

b) $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \varepsilon$, se nazývá *kruhové (cyklické) okolí bodu* $[x_1, y_1]$.

Zdůvodněte tyto názvy množin.