X. KAPITOLA

JEŠTĚ NĚKOLIK ÚLOH

Úloha 16. *Kolika způsoby můžete z tabulky*

$$\begin{array}{c}
M \\
M\ A\ M \\
M\ A\ T\ A\ M \\
M\ A\ T\ E\ T\ A\ M \\
M\ A\ T\ E\ M\ E\ T\ A\ M \\
M\ A\ T\ E\ M\ A\ M\ E\ T\ A\ M \\
M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ A\ M\ E\ T\ A\ M \\
M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ I\ T\ A\ M\ E\ T\ A\ M \\
M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ I\ K\ I\ T\ A\ M\ E\ T\ A\ M \\
M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ I\ K\ A\ K\ I\ T\ A\ M\ E\ T\ A\ M
\end{array}$$

přečíst název svého nejoblíbenějšího koníčka?

Řešení. Pokud není vaším nejoblíbenějším koníčkem matematika, je hledaný počet roven 0. Pokud ano, jistě si všimnete, že jednotlivé způsoby si vzájemně jednoznačně odpovídají s lomenými čarami, které vedou z písmen M na ramenech trojúhelníka do písmene A ve středu základny a směřují vždy buď dolů nebo doprava (u cest začínajících na levém rameni) či doleva (u cest začínajících na pravém rameni). Pro každé z obou krajních M v i-tém řádku zdola tak dostaneme právě $\binom{9}{i-1}$ způsobů (srv. cvičení 1.11). Celkem dostaneme

$$\binom{9}{9} + 2\sum_{j=0}^{8}\binom{9}{j} = 2\sum_{j=0}^{9}\binom{9}{j} - 1 = 2 \cdot 2^9 - 1 = 2^{10} - 1 =$$
$$= 1023$$

způsobů.

Úloha 17. *Najděte všechny řádky Pascalova trojúhelníka, ve kterých jsou jen lichá čísla.*

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé celé nezáporné číslo k se 2^k-tý řádek Pascalova trojúhelníka skládá jen z lichých čísel. V tomto řádku jsou kombinační čísla

$$\binom{2^k - 1}{j} = \frac{(2^k - 1)(2^k - 2) \ldots (2^k - j)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j} . \tag{35}$$

Vzhledem k tomu, že pro každá dvě přirozená čísla $n \leqq k$, r je $2^k - r$ dělitelno číslem 2^n, právě když je r dělitelno číslem 2^n, je v rozkladech čitatele i jmenovatele kombinačního čísla (35) na prvočinitele prvočíslo 2 ve stejné mocnině a číslo (35) je tedy liché.

Ještě ukážeme, že každý jiný řádek Pascalova trojúhelníka obsahuje sudé číslo. To plyne z toho, že pokud v-tý řádek obsahuje samá lichá čísla, je uprostřed $(v + 1)$-tého řádku $v - 1$ sudých čísel, která vznikla jako součty sousedních čísel v-tého řádku, uprostřed $(v + 2)$-tého řádku je $v - 2$ sudých čísel pocházejících ze sudých čísel $(v - 1)$-tého řádku, atd. Tento klín sudých čísel zasahuje až do $(2v - 1)$-tého řádku, kde je uprostřed sudé číslo. Vidíme, že jsou-li ve v-tém řádku jen lichá čísla, pak první další řádek, kde to může opět nastat, je až $2v$-tý řádek.

Úloha 18. *V kocourkovském generálním štábu je 13 generálů. Rozhodli se, že si na tajné materiály pořídí trezor,* *který půjde otevřít, právě když bude přítomna nadpoloviční většina generálů. Jaký je nejmenší možný počet zámků, které budou na trezoru? Jaký je nejmenší možný počet klíčů, které s sebou bude nosit kocourkovský generál?*

Řešení. Předpokládejme, že existuje systém zámků a klíčů, který splňuje požadavky úlohy. Sejde-li se jen 6 generálů, trezor neotevřou. Pro každou šestici generálů tedy existuje zámek, od kterého nemá žádný z nich klíč. Pro různé šestice jsou tyto zámky různé. Kdyby totiž dvě různé šestice generálů nedokázaly otevřít tentýž zámek, nedokázali by to ani generálové ze sjednocení obou šestic, jichž je alespoň 7 a tvoří tedy nadpoloviční většinu, což odporuje požadavkům úlohy. Vidíme, že na trezoru je alespoň $\binom{13}{6}$ zámků.

K tomu, aby jakákoliv sedmice generálů otevřela všechny zámky, je nutné, aby každý generál měl pro každou šestici generálů klíč od zámku, který těmto šesti generálům schází. Každý generál má tedy alespoň $\binom{12}{6}$ klíčů.

Ukážeme, že více než $\binom{13}{6}$ zámků potřeba nebude. Každé sedmici generálů přiřaďme jeden zámek tak, aby různým sedmicím byly přiřazeny různé zámky, a dejme právě jim od něho po klíči. Je hned vidět, že sejde-li se pak méně než 7 generálů, existuje zámek, ke kterému nemají klíč, totiž zámek přiřazený některé sedmici z ostatních generálů. Sejde-li se 7 generálů, otevřou kterýkoliv zámek. Kdyby se jim to totiž u některého zámku nepodařilo, znamenalo by to, že je přiřazen nějaké sedmici z ostatních generálů. Ostatních generálů je však jen 6. Systém tedy splňuje podmínky úlohy a přitom je na trezoru právě $\binom{13}{7} = \binom{13}{6} = 1716$ zámků. Každý generál dostal právě tolik klíčů, kolika sedmic je členem, tedy $\binom{12}{6} = 964$ klíčů.

Úloha 19. *Dřevěnou krychli natřeli na červeno a pak ji rozřezali na n^3 stejně velkých krychliček. Kolika způsoby je možno z krychliček složit červenou krychli původních rozměrů?*

Řešení. K tomu, aby byl povrch složené krychle celý červený, je nutné a stačí, aby se pro žádnou krychličku nedostala při skládání červená stěna dovnitř. Tak tomu bude, právě když se 8 krychliček se třemi červenými stěnami dostane do vrcholů skládané krychle, $12(n - 2)$ krychliček s právě dvěma červenými stěnami na ostatní místa na hranách, $6(n - 2)^2$ krychliček s jedinou červenou stěnou na zbylá místa na stěnách a $(n - 2)^3$ bezbarvých krychliček přijde dovnitř. Krychli můžeme tedy složit právě

$$8![12(n - 2)]!\,[6(n - 2)^2]!\,[(n - 2)^3]!$$

způsoby, pokud nerozlišujeme způsoby, které se liší jen různými polohami krychličky na stejném místě. Pokud bychom takové způsoby rozlišovali, dostali bychom vzhledem k tomu, že počet poloh, při nichž jsou všechny červené stěny na povrchu, je u krychliček 1. druhu 3, u 2. druhu 2, u 3. druhu 4 a u 4. druhu 24,

$$3^8 2^{12(n-2)}\, 4^{6(n-2)^2}\, 24^{(n-2)^3}$$

-krát více způsobů.

Na druhé straně není nepřirozené nerozlišovat způsoby, při nichž krychle složená jedním způsobem se dostane z krychle složené jiným způsobem změnou polohy celé složené krychle. Pak bychom museli počet způsobů vydělit číslem 24.

Úloha 20. *Je dáno prvočíslo $p > 2$ a přirozené číslo n. Kolika způsoby lze obarvit vrcholy pravidelného p-úhelníka pomocí n barev? Způsoby, při nichž se po otočení p-úhelníka barvy shodují, nepokládáme za různé.*

Řešení. Neřekneme-li nic jiného, budeme pokládat za různé i způsoby, u nichž je to v textu úlohy vyloučeno. Dostaneme tak n^p obarvení. Množinu všech $n^p - n$ obarvení alespoň dvěma barvami označme M. Množinu všech obarvení alespoň dvěma barvami různých podle úlohy označme M'. Otáčením p-úhelníka obarveného alespoň dvěma barvami dostaneme právě $p - 1$ dalších různých obarvení. Pokud by totiž po otočení o nenulový úhel obarvení splynula, snadno bychom ukázali, že p není prvočíslo. Každému prvku $o \in M'$ tedy odpovídá p-prvková podmnožina množiny M složená ze všech obarvení, která nejsou ve smyslu úlohy různá od o. Různým prvkům množiny M' přitom odpovídají disjunktní podmnožiny a každý prvek množiny M do některé z nich patří. Je tedy

$$|M'| = \frac{|M|}{p} = \frac{n^p - n}{p}.$$

Připočteme-li ještě n obarvení jedinou barvou, dojdeme k výsledku

$$\frac{n^p - n}{p} + n.$$

(Všimněte si, že jsme vlastně dokázali Fermatovu větu, o které byla zmínka na str. 57.)

Úloha 21. *Je dáno přirozené číslo $n > 2$ a množina M, jejíž prvky jsou slova složená z písmen X a Y, přičemž každé slovo má právě n písmen a jakákoliv dvě různá slova se liší alespoň na třech místech. Dokažte nerovnost*

$$|M| \leqq \frac{2^n}{n+1} .$$

Řešení. Označme $|M| = m$. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ sestrojme množinu M_i, jejíž prvky budou i-té slovo z množiny M a všechna slova, která z něho vzniknou změnou jediného písmene. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ je tedy $|M_i| = n + 1$. Množiny $M_1, M_2, \ldots, M_m$ jsou disjunktní, neboť libovolná dvě slova patřící do různých z těchto množin se liší alespoň na jednom místě. Uvědomíme-li si, že existuje právě 2^n slov délky n složených ze dvou písmen, dostáváme

$$2^n \geqq |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m| = |M_1| + |M_2| + \\ + \ldots + |M_m| = m(n+1)$$

čili

$$m \leqq \frac{2^n}{n+1} .$$

Úloha 22. *Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y. Diferencí slova budeme rozumět číslo, které udává, kolikrát v něm jsou vedle sebe různá písmena. Dokažte, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je počet slov s diferencí $n - k$ roven počtu slov s diferencí $n + k$.*

Řešení. Budeme se zabývat jen slovy složenými z n písmen X a n písmen Y. V každém slově se střídají bloky písmen X s bloky písmen Y. Počet slov, která se skládají z x bloků X a y bloků Y a začínají písmenem X, je $\binom{n-1}{x-1}\binom{n-1}{y-1}$, neboť každému takovému slovu přirozeným způsobem odpovídá vzájemně jednoznačně rozdělení n písmen X na x bloků a n písmen Y na y bloků. Stejný je počet slov, která začínají písmenem Y.

Dále určíme, kolik slov má diferenci d. Je-li d liché číslo, $d = 2c + 1$, skládá se každé takové slovo z $c + 1$ bloků X a $c + 1$ bloků Y. Celkem je jich tedy právě $2\binom{n-1}{c}^2$. Je-li d sudé, $d = 2c$, skládá se každé slovo s diferencí d z $c + 1$ bloků počátečního písmene a z c bloků druhého písmene. V tomto případě tedy existuje právě $2\binom{n-1}{c-1}\binom{n-1}{c}$ slov.

Čísla $n - k$, $n + k$ mají stejnou paritu, neboť se liší o $2k$. Jsou-li lichá, existuje právě

$$2\binom{n-1}{\frac{n-k-1}{2}}^2$$

slov s diferencí $n - k$ a právě

$$2\binom{n-1}{\frac{n+k-1}{2}}^2$$

slov s diferencí $n + k$. Oba tyto počty jsou stejné, protože podle vzorce (2) je

$$\binom{n-1}{\frac{n-k-1}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+k-1}{2}}.$$

Jsou-li čísla $n - k$, $n + k$ sudá, existuje právě

$$2\binom{n-1}{\frac{n-k}{2}-1}\binom{n-1}{\frac{n-k}{2}}$$

slov s diferencí $n - k$ a právě

$$2\binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1}\binom{n-1}{\frac{n+k}{2}}$$

slov s diferencí $n + k$. I v tomto případě jsou oba počty stejné, protože podle (2) je

$$\binom{n-1}{\frac{n-k}{2}-1} = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}},$$

$$\binom{n-1}{\frac{n-k}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1}.$$

Úloha 23. *Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y. Slovům, která nelze rozdělit na dvě slova, z nichž každé obsahuje stejně X i Y, budeme říkat slova* 1. *druhu. Slovům, která lze takto rozdělit jediným způsobem, budeme říkat slova* 2. *druhu. Dokažte, že slov* 2. *druhu je dvakrát tolik než slov* 1. *druhu.*

Řešení. Množina všech slov 1. druhu se rozpadá na dvě disjunktní podmnožiny podle toho, kterým písmenem začínají. Obě tyto podmnožiny zřejmě mají stejný počet prvků. Množina všech slov 2. druhu se rozpadá na čtyři disjunktní podmnožiny podle toho, kterým písmenem začíná první část a kterým druhá část. Všechny čtyři podmnožiny mají zřejmě stejný počet prvků. Stačí tedy dokázat, že počet všech slov 1. druhu začínajících písmenem X (nazveme je slova typu A) je roven počtu všech slov 2. druhu, v nichž obě části začínají písmenem X (slova typu B). Provedeme to tak, že sestrojíme vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech slov typu B na množinu všech slov typu A.

Každému slovu typu A a B přiřaďme uspořádanou $2n$-tici přirozených čísel, ve které je pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ na i-tém místě rozdíl počtu prvků X a počtu prvků Y na prvních i místech slova. Této pomocné $2n$-tici budeme říkat charakteristika slova. Pro každé slovo typu A a B začíná zřejmě charakteristika číslem 1 a končí číslem 0, je složena z celých nezáporných čísel a sousední čísla se liší o 1. Podle definice typů A a B se v charakteristice slova kromě koncové už žádná jiná 0 nevyskytuje, právě když jde o slovo typu A, a vyskytuje se na jediném jiném místě, právě když jde o slovo typu B.

Definujme na množině všech slov typu B zobrazení z jako přesunutí prvního písmene (X) druhé části slova na začátek slova. Bylo-li přesunuté písmeno na p-tém místě a mělo-li původní slovo s charakteristiku

$$(c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$$

(takže $c_{p-1} = 0$), bude mít obraz $z(s)$ charakteristiku

$$(1, c_1 + 1, c_2 + 1, \ldots, c_{p-1} + 1, c_{p+1}, \ldots, c_{2n}).$$

Vidíme, že v ní je nula jen na posledním místě a slovo $z(s)$ je tedy typu A. Snadno zjistíme, že zobrazení z je prosté, tj. že různým vzorům přiřazuje vždy různé obrazy. Zbývá ještě ukázat, že zobrazení z zobrazuje množinu všech slov typu B na množinu všech slov typu A, tj. že každé slovo typu A je obrazem některého slova typu B. Zvolme libovolné slovo t typu A. Jeho charakteristika je $(d_1, d_2, \ldots, d_{2n})$. Nechť $r > 1$ je nejmenší index, pro který je $d_r = 1$. Ze slova t utvořme slovo t' tak, že první písmeno (X) přesuneme mezi r-té a $(r+1)$-té písmeno slova t. Slovo t' bude mít charakteristiku

$$(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{r-1} - 1, 0, 1, d_{r+1}, \ldots, d_{2n}).$$

Vidíme, že slovo t' je typu B a přitom $z(t') = t$.

Úloha 24. *Je dáno přirozené číslo n. Pro kolik pořadí $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ čísel 1, 2, …, n nabývá součet*

$$|p_1 - 1| + |p_2 - 2| + \ldots + |p_n - n|$$

maximální hodnoty?

Řešení. Nahradíme-li pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ člen $|p_j - j|$ rozdílem $p_j - j$ nebo $j - p_j$ podle toho, který z nich je nezáporný, dostaneme pro každé pořadí součet $2n$ sčítanců

$$1, 1, 2, 2, \ldots, n, n, \tag{36}$$

přičemž právě u n z nich bude znaménko minus. Upravíme-li tento součet na tvar

$$\begin{aligned}1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + n + n + 2z &= \\ = n(n+1) + 2z,&\end{aligned}$$

kde z je součet zmíněných n záporných sčítanců, vidíme, že je maximální právě když záporné znaménko je u prvních n sčítanců (36) — pokud to však pro nějaké pořadí nastane. Pro pořadí $(n, n-1, \ldots, 1)$ to tak skutečně je. Snadno zjistíme, že pro lichá n je maximální součet roven $\frac{n^2-1}{2}$ a pro sudá n je $\frac{n^2}{2}$, což můžeme souhrnně vyjádřit jako $\left[\frac{n^2}{2}\right]$.

My však máme určit, pro kolik ze všech $n!$ pořadí příslušný součet tohoto maxima nabývá. Budeme uvažovat zvlášť pro sudá a lichá n.

Je-li $n = 2k$, maximum se nabývá právě pro všechna pořadí, kterým odpovídají součty, v nichž jsou záporná znaménka u sčítanců 1, 1, 2, 2, ..., k, k. Ukážeme, že to jsou právě všechna pořadí, pro která je

$$
\begin{aligned}
&\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}, \\
&\{p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_{2k}\} = \{1, 2, \ldots, k\}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Kdyby totiž pro nějaké $r \in \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ bylo $p_r > k$, dostalo by se ze členu $|p_r - r|$ do součtu buď p_r nebo r se záporným znaménkem a součet by pak nebyl maximální. Aby byl součet maximální, musí tedy platit (37). Pro každé pořadí, které vyhovuje podmínce (37), však součet zřejmě maximální je. Dostáváme tak právě $(k!)^2$ pořadí.

V případě $n = 2k + 1$ je součet maximální, právě když záporná znaménka jsou u sčítanců

$$1, 1, 2, 2, \ldots, k, k, k+1.$$

Analogicky jako v předešlém případě zjistíme, že nutná podmínka pro maximalitu součtu je

$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots, p_{2k+1}\} \subset \{1, 2, \ldots, k+1\}.$$

Aby byl součet maximální, musí tedy platit

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\} = \{k + 2, k + 3, \ldots, 2k + 1\} \cup \{v\},$$
(38)
$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots, p_{2k+1}\} = \{1, 2, \ldots, k + 1\} - \{v\},$$
kde $v \in \{1, 2, \ldots, k + 1\}$.

Vyšetříme každou z $k + 1$ disjunktních skupin pořadí, která splňují (38). Nejjednodušší situace je pro $v = k + 1$. Je totiž zřejmé, že pro každé pořadí, pro něž
$$\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\} = \{k + 1, k + 2, \ldots, 2k + 1\},$$
$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots, p_{2k+1}\} = \{1, 2, \ldots, k\}$$
a kterých je právě $k!(k + 1)!$, je součet maximální.

Dále předpokládejme, že $v < k + 1$. Aby byl součet maximální, musí být $p_{k+1} = v$. Jinak by totiž bylo $v = p_j$ pro některé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ a z členu $|p_j - j| = |v - j|$ by se do součtu dostalo buď v nebo j s kladným znaménkem, takže by součet nebyl maximální. Nutná podmínka pro maximalitu je v tomto případě tedy
$$\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} = \{k + 2, k + 3, \ldots, 2k + 1\},$$
$$p_{k+1} = v,$$
$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots, p_{2k+1}\} = \{1, 2, \ldots, k + 1\} - \{v\}.$$
Ihned je však vidět, že tato podmínka je pro maximalitu také postačující. Pro každé $v \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tak dostáváme právě $(k!)^2$ pořadí.

Zjistili jsme, že pro liché n je součet maximální právě pro
$$k!(k + 1)! + k(k!)^2 = (2k + 1)(k!)^2$$
pořadí.

Úloha 25. *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí*

$$2^{4n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1}.$$

Řešení. Podle vzorců (2), (3) a (6) postupně dostáváme

$$2^{4n-1} = (1+1)^{4n-1} = \sum_{i=0}^{4n-1} \binom{4n-1}{i} = \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n-1}{2j} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n-1}{2j+1} = \sum_{j=0}^{2n-1} \left[\binom{4n-1}{2j} + \binom{4n-1}{2j+1} \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n}{2j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4(n-1-i)+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{4n}{4j+1} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1.}.$$

Úloha 26. *Řekneme, že systém $\mathscr{S}$ podmnožin nějaké množiny je dokonalý, jestliže pro žádné dvě podmnožiny $A \in \mathscr{S}$, $B \in \mathscr{S}$ neplatí $A \subset B$. Jaký je největší možný počet podmnožin tvořících dokonalý systém podmnožin n-prvkové množiny?*

Řešení. Budeme mluvit jen o podmnožinách dané n-prvkové množiny. Pro každé přirozené $k \leq n$ je zřejmě systém všech k-prvkových podmnožin dokonalý. Vzhledem k tomu, že z kombinačních čísel $\binom{n}{k}$ je největší $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ pro sudé n a $\binom{n}{\frac{n+1}{2}} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ pro liché n (viz cvič. 2.9), existuje dokonalý systém podmnožin, který se skládá z $\binom{n}{\frac{n}{2}}$, resp. $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ podmnožin (souhrnně řečeno z $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ podmnožin). Ukážeme, že větší dokonalé systémy neexistují.

Předpokládejme, že $\mathscr{S}$ je dokonalý systém podmnožin a největší jeho podmnožina je $k+1$-prvková. Vynechme z něho všechny $k+1$-prvkové podmnožiny (jejich počet označme t) a nahraďme je všemi jejich k-prvkovými podmnožinami (jejich počet označme t'). Dostaneme tak systém $\mathscr{S}'$, o němž se snadno přesvědčíme, že je také dokonalý. Z každé z t podmnožin $k+1$-prvkových vznikne právě $k+1$ podmnožin k-prvkových. Každá z těchto k-prvkových podmnožin přitom může vzniknout nejvýše z $n-k$ podmnožin $k+1$-prvkových. Platí tedy

$$t' \geqq \frac{k+1}{n-k}\, t\,.$$

Vidíme, že pro $k+1 \geqq \frac{n+1}{2}$ platí $t' \geqq t$ a tedy $|\mathscr{S}'| \geqq |\mathscr{S}|$; pro $k+1 > \frac{n+1}{2}$ platí dokonce $|\mathscr{S}'| > > |\mathscr{S}|$.

Analogickou úvahu provedeme pro nejmenší podmnožiny. Nechť jsou $m-1$-prvkové a je jich s. Nahradíme-li je všemi jejich m-prvkovými nadmnožinami, jejichž počet označíme s', bude platit

$$s' \geqq \frac{n-m+1}{m}\, s\,,$$

neboť z každé $m - 1$-prvkové podmnožiny vznikne právě $n - m + 1$ nadmnožin m-prvkových a každá z nich takto vznikne nejvýš z m podmnožin $n - 1$-prvkových. Pro $m - 1 \leqq \frac{n-1}{2}$ bude pak platit $s' \geqq s$ a pro $m - 1 < \frac{n-1}{2}$ dokonce $s' > s$.

Z nerovností, které jsme právě odvodili, ihned vyplývá: Obsahuje-li dokonalý systém $\mathscr{S}$ p-prvkovou podmnožinu, kde $p > \frac{n+1}{2}$ nebo $p < \frac{n-1}{2}$, existuje dokonalý systém $\mathscr{S}'$, který se skládá z většího počtu podmnožin než $\mathscr{S}$. Je-li tedy n sudé, je největší dokonalý systém určen jednoznačně a je to systém všech $\frac{n}{2}$-prvkových podmnožin. Pro liché n platí, že každý největší dokonalý systém se skládá jen z $\frac{n+1}{2}$-prvkových a $\frac{n-1}{2}$-prvkových podmnožin a žádný z nich neobsahuje více podmnožin než systém všech $\frac{n+1}{2}$-prvkových podmnožin nebo systém všech $\frac{n-1}{2}$-prvkových podmnožin.

Tím je úloha vyřešena. Prozkoumejme však ještě podrobněji případ lichého n a ptejme se, existují-li kromě zmíněných dvou ještě jiné největší dokonalé systémy. Takový systém $\mathscr{S}$ by, jak víme, obsahoval nenulový počet $\frac{n-1}{2}$-prvkových množin, ale ne všechny. K tomu, aby se při popsaném přechodu od

$\frac{n-1}{2}$-prvkových k $\frac{n+1}{2}$-prvkovým množinám jejich počet nezvětšil, je nutné, aby každá nová $\frac{n+1}{2}$-prvková množina vznikla ze všech svých $\frac{n+1}{2}$ podmnožin $\frac{n-1}{2}$-prvkových. Vezměme dvě $\frac{n-1}{2}$-prvkové podmnožiny M_1 a M_2, z nichž jedna leží v systému $\mathscr{S}$ a druhá ne. Označme M průnik obou množin (může být i prázdný). Množinu M_1 můžeme z množiny M_2 dostat tak, že postupně zaměňujeme prvky množiny $M_1 - M$ jeden po druhém za prvky množiny $M_2 - M$. Tak vznikne konečná posloupnost $\frac{n-1}{2}$-prvkových množin, z nichž každé dvě sousední se liší v jediném prvku, tj. jejich sjednocení je $\frac{n+1}{2}$-prvková množina. V této posloupnosti zřejmě existují dvě sousední množiny, z nichž jedna patří do systému $\mathscr{S}$ a druhá ne, takže jejich sjednocení nemůže při dříve zmíněném přechodu vzniknout z druhé množiny. Přechodem se proto počet množin zvětší. Zjistili jsme, že v případě lichého n existují právě dva největší dokonalé systémy.

Jiné řešení. Nechť dokonalý systém podmnožin n-prvkové množiny se skládá z s podmnožin. Počty prvků těchto podmnožin označme $i_1, i_2, \ldots, i_s$. Uvažujme všechna pořadí n prvků, která mají na počátečních i_r místech prvky r-té podmnožiny — těch je $i_r!(n - i_r)!$. Vzhledem k tomu, že jde o dokonalý systém podmnožin, nemá žádné takové pořadí na počátečních místech všechny prvky jiné z podmnožin systému, takže

$$i_1!(n-i_1)! + i_2!(n-i_2)! + \ldots + i_s!(n-i_s)! \leqq n!,$$

neboť v součtu vlevo není žádné pořadí započteno víckrát než jednou. To můžeme přepsat

$$\frac{1}{\binom{n}{i_1}} + \frac{1}{\binom{n}{i_2}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n}{i_s}} \leqq 1.$$

Poněvadž ze všech kombinačních čísel $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ je největší $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$, je

$$\frac{s}{\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leqq 1$$

a tedy

$$s \leqq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Úloha 27. *Jsou dána reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taková, že $|x_i| \geqq 1$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a libovolné reálné číslo r. Dokažte, že v otevřeném intervalu $(r, r+2)$ neleží víc než $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ čísel tvaru $\sum_{i=1}^{n} e_i x_i$, kde pro každé $i \in \{1, 2, \ldots \ldots n\}$ je $e_i = 1$ nebo $e_i = -1$.*

Řešení. Uvažujme dvě n-tice $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a $(e'_1, e'_2, \ldots, \ldots, e'_n)$ a dva příslušné součty s, s'. Označme M množinu všech $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, pro která mají čísla e_i, x_i stejná znaménka. Analogicky definujeme množinu indexů M'. Jestliže $M \subset M'$, je

$$s' - s = 2 \sum_{i \in M' - M} |x_i| \geqq 2$$

a tedy v intervalu $(r, r + 2)$ leží nanejvýš jeden ze součtů s, s'. Jsou-li tedy $s_1, s_2, \ldots, s_k$ všechny součty uvažovaného tvaru, které padnou do intervalu $(r, r + 2)$, tvoří příslušné množiny $M_1, M_2, \ldots, M_k$ dokonalý systém podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Podle úlohy 26 je $k \leqq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Poznamenejme ještě, že např. pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ jsou všechny součty, v nichž je právě $\left[\frac{n}{2}\right]$ koeficientů e_i rovno $+1$, stejné, takže hranici $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ dál zmenšit nemůžeme.

Úloha 28. *Dokažte, že pro každé prvočíslo p je číslo*

$$[(2 + \sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$$

dělitelné číslem p. (Hranaté závorky označují celou část.)

Řešení. Z binomických rozvojů vidíme, že číslo

$$(\sqrt{5} + 2)^p - (\sqrt{5} - 2)^p$$

je celé, a protože

$$0 < (\sqrt{5} - 2)^p < 1,$$

je

$$[(2+\sqrt{5})^p] = (2+\sqrt{5})^p - (\sqrt{5}-2)^p =$$

$$= 2\left(2^p + \binom{p}{2} 2^{p-2}.5 + \ldots + \binom{p}{p-1} 2.5^{\frac{p-1}{2}}\right).$$

Je tedy

$$[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1} = \binom{p}{2} c_2 + \binom{p}{4} c_4 + \ldots + \binom{p}{p-1} c_{p-1},$$

kde $c_2, c_4, \ldots, c_{p-1}$ jsou přirozená čísla. Teď už stačí jen dokázat pomocnou větu, která je zajímavá a užitečná sama o sobě: *Je-li p prvočíslo a $j < p$ přirozené číslo, je číslo $\binom{p}{j}$ dělitelné číslem p.* Kombinační číslo $\dfrac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{j!}$ je číslo celé a tedy $j!$ dělí číslo $p(p-1)\ldots(p-j+1)$. Protože $p > j$, je prvočíslo p nesoudělné s $j!$ a tedy $j!$ dělí $(p-1)\ldots(p-j+1)$. Důkaz je proveden.

Úloha 29. *Dokažte, že pro libovolná dvě přirozená čísla m, n platí*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{m} + \binom{n}{2m} + \ldots = \frac{2^n}{m} \sum_{k=1}^{m} \cos^n \frac{k\pi}{m} \cos \frac{nk\pi}{m}.$$

(Na levé straně je součet kombinačních čísel $\binom{n}{km}$, kde se sčítá přes k, dokud $km \leq n$.)

Řešení. Dvěma způsoby sečteme

$$A = (1+e_1)^n + \ldots + (1+e_m)^n,$$

kde $e_1, e_2, \ldots, e_m$ jsou komplexní jednotky

$$e_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Využijeme přitom aparátu komplexních čísel, zejména Moivreovy věty.

I. Podle binomické věty je

$$A = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(e_1^r + \ldots + e_m^r)$$

a dále

$$e_1^r + \ldots + e_m^r = e_1^r + \ldots + e_1^{(m-1)r} + 1.$$

Odtud vidíme, že je-li r dělitelné m, je

$$e_1^r + \ldots + e_m^r = m,$$

a není-li r dělitelno m, je $e_1^r \neq 1$ a

$$e_1^r + \ldots + e_m^r = \frac{1-(e_1^r)^m}{1-e_1^r} - \frac{1-e_1^{rm}}{1-e_1} = 0.$$

Je tedy

$$A = m\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{m} + \binom{n}{2m} + \ldots\right).$$

II. Pro každé přirozené k je

$$(1+e_k) = 1 + \cos\frac{2k\pi}{m} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{m} =$$

$$= 1 + \left(\cos\frac{k\pi}{m} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{m}\right)^2 =$$

$$= \cos^2\frac{k\pi}{m} + \sin^2\frac{k\pi}{m} + \cos^2\frac{k\pi}{m} - \sin^2\frac{k\pi}{m} +$$

$$+ 2\,\mathrm{i} \cos \frac{k\pi}{m} \sin \frac{k\pi}{m} = 2 \cos \frac{k\pi}{m} \left(\cos \frac{k\pi}{m} + \mathrm{i} \sin \frac{k\pi}{m}\right)$$

a tedy

$$A = 2^n \sum_{k=1}^{m} \cos^n \frac{k\pi}{m} \left(\cos \frac{nk\pi}{m} + \mathrm{i} \sin \frac{nk\pi}{m}\right).$$

Podle I je A reálné číslo a tedy

$$A = 2^n \sum_{k=1}^{m} \cos^n \frac{k\pi}{m} \cos \frac{nk\pi}{m}\,.$$

Porovnáme-li obě vyjádření pro A, dostaneme dokazovaný vzorec.