IX. KAPITOLA

NĚKOLIK DŮLEŽITÝCH ÚLOH

V této kapitole vyřešíme několik obtížnějších úloh. Významné jsou jejich výsledky, protože souvisejí s jinými zajímavými problémy v kombinatorice, teorii pravděpodobnosti, teorii informace a statistické fyzice, a také typické postupy, jimiž budou odvozeny.

Úloha 11. *Kolik je všech pořadí n prvků $m_1, m_2, \ldots, m_n$, v nichž není pro žádné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ prvek m_i na i-tém místě?*

1. *řešení.* Hledaný počet označme d_n. Buď $n > 1$. Všechna pořadí, která nemají požadovanou vlastnost, rozdělme na disjunktní skupiny podle toho, pro kolik $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je v nich prvek m_i na i-tém místě. Skupina, v níž to platí právě pro s prvků, obsahuje, jak snadno uvážíme, právě $\binom{n}{s} d_{n-s}$ pořadí pro každé $s \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Je tedy

$$d_n = n! - \binom{n}{1} d_{n-1} - \binom{n}{2} d_{n-2} - \ldots - \binom{n}{n-1} d_1 - 1\,.$$

(Jednička na konci odpovídá jedinému pořadí, v němž je právě n prvků m_i na i-tém místě, totiž pořadí $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.) Vyjdeme-li od zřejmé počáteční hodnoty $d_1 = 0$, můžeme postupně počítat podle právě odvozeného rekurentního vzorce hodnoty d_n pro $n = 2, 3, \ldots$.

2. *řešení*. Buď $n > 2$. Rozdělme všech d_n uvažovaných pořadí podle toho, který prvek je v nich na prvním místě, na $(n - 1)$ disjunktních skupin (prvek m_1 na začátku být nemůže). Dále se zabývejme skupinou pořadí, která mají na prvním místě prvek m_k (je tedy $k > 1$). Ta se dále rozpadá na dvě disjunktní podskupiny: V první jsou pořadí, která mají prvek m_1 na k-tém místě, a těch je zřejmě d_{n-2}. Kolik je pořadí ve druhé podskupině, složené ze všech pořadí, v nichž prvek m_1 není na k-tém místě? Právě tolik, kolik je všech pořadí $n - 1$ prvků

$$m_2, \ldots, m_{k-1}, m_1, m_{k+1}, \ldots, m_n, \tag{27}$$

v nichž žádný prvek není na tom místě, kde je napsán v (27), totiž d_{n-1}. Celkem je tedy

$$d_n = (n - 1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

Tento rekurentní vzorec umožňuje, vyjdeme-li od počátečních hodnot $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, postupně počítat d_n pro další n. K praktickým účelům se hodí lépe než vzorec, ke kterému jsme došli v 1. řešení.

3. *řešení*. Užijeme principu inkluze a exkluze. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ označme M_i množinu všech pořadí n prvků $m_1, m_2, \ldots, m_n$, v nichž je na i-tém místě prvek m_i. Bude tedy

$$d_n = n! - |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n|.$$

Pro každou neprázdnou podmnožinu $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ je, jak snadno uvážíme,

$$|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}| = (n - r)!.$$

Podle principu inkluze a exkluze pak

a tedy

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \tag{28}$$

Podařilo se nám tak přímo vyjádřit závislost čísla d_n na hodnotě n. Pro numerický výpočet jsou výhodnější rekurentní vzorce, zejména vzorec z 2. řešení nebo vzorec ze cvič. 9.7. Vyjádření (28) zase umožňuje odhadnout d_n pro velká n a najít přibližně jeho hodnotu.

Poznámka pro vzdělanější čtenáře. Součet v závorce na pravé straně (28) je částečný součet nekonečné řady, která konverguje k součtu $\frac{1}{e}$ (kde $e = 2{,}718\ldots$ je konstanta, s níž se v matematice setkáváme na každém kroku). Je tedy

$$\frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e} + c_n\,,$$

kde pro chybu c_n platí

$$|c_n| < \frac{1}{(n+1)!}\,.$$

Vidíme, že přesnost přibližného vyjádření

$$d_n \doteq \frac{n!}{e}$$

se rychle zlepšuje s rostoucím n, neboť chyba je menší než $\dfrac{1}{n+1}$.

V jiné souvislosti je úloha 11 řešena v 38. svazku Školy mladých matematiků, brožuře J. Bosáka *Latinské štvorce.*

Cvičení

9.1 Tajná abeceda spočívá v tom, že se každé z 26 písmen zamění určitým jiným písmenem, přičemž samozřejmě písmena přiřazená různým písmenům jsou různá. Kolik je všech možných tajných abeced?

9.2 Vojenský lékař a vojenský zubař mají prohlédnout 360 nováčků. Každý svede prohlídku za 10 vteřin. Kolika způsoby si mohou rozdělit práci, aby byla celá akce za hodinu hotova?

9.3 Kolika způsoby lze k dlouhému stolu s n židlemi po každé straně posadit n manželských párů tak, aby všichni muži seděli na jedné straně a aby žádní manželé neseděli proti sobě?

9.4 Do třídy chodí z žáků a v knihovničce je k různých knížek. Každý žák si vypůjčil právě jednu knížku. Pak si žáci knížky navzájem vyměnili, takže nikomu nezůstala stejná knížka. Kolik je všech možností?

9.5 Kolika způsoby lze vybarvit n barvami pole šachovnice o $n \times n$ polích tak, aby v každé vodorovné řadě byly všechny barvy a přitom v žádné svislé řadě nebyla dvě sousední pole vybarvena stejnou barvou?

9.6 Dokažte vzorec (28) matematickou indukcí.

9.7 Odvoďte rekurentní vzorec

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

a porovnejte ho s ostatními rekurentními vzorci, které jsme pro d_n odvodili, pokud jde o vhodnost pro numerický výpočet.

9.8 Kolik je všech pořadí $2n$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_{2n}$, v nichž pro žádné liché $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ není prvek m_i na i-tém místě?

9.9 Kolik je všech pořadí k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$, v nichž pro žádné $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ není prvek m_i na i-tém místě a přitom prvky m_1, m_2 jsou vedle sebe?

Úloha 12. *Kolik je všech pořadí $n > 1$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_n$, v nichž pro žádné $i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ není prvek m_{i+1} bezprostředně za prvkem m_i?*

1. *řešení.* Množinu všech uvažovaných pořadí označme C_n a jejich počet c_n. Buď $n > 2$. Pro každé pořadí z C_n platí: Odstraníme-li z něho prvek m_n, dostaneme pořadí $n - 1$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, v němž buď pro žádné nebo pro jediné $i \in \{1, 2, \ldots, n - 2\}$ je prvek m_{i+1} hned za prvkem m_i. Množina C_n se podle toho rozpadá na dvě disjunktní podmnožiny. Z každého pořadí první z nich — označme ji C'_n — dostaneme vynecháním prvku m_n nějaké pořadí z množiny C_{n-1}. Přitom každé pořadí p z množiny C_{n-1} takto dostaneme právě z $n - 1$ pořadí z C'_n (totiž právě z pořadí vzniklých přidáním prvku m_n k pořadí p na některé z n míst (dopředu, dozadu a do mezer) s jedinou výjimkou; ne za m_{n-1}). Je tedy

$$|C'_n| = (n - 1)\,|C_{n-1}| = (n - 1)\,c_{n-1}.$$

Každé pořadí druhé skupiny — označme ji C''_n — obsahuje trojici za sebou bezprostředně následujících prvků m_j, m_n, m_{j+1} pro nějaké $j \in \{1, 2, \ldots, n - 2\}$. Proveďme následující transformaci: odstraňme prvky m_n a m_{j+1} a prvky m_i zaměňme prvky m_{i-1} pro všechna

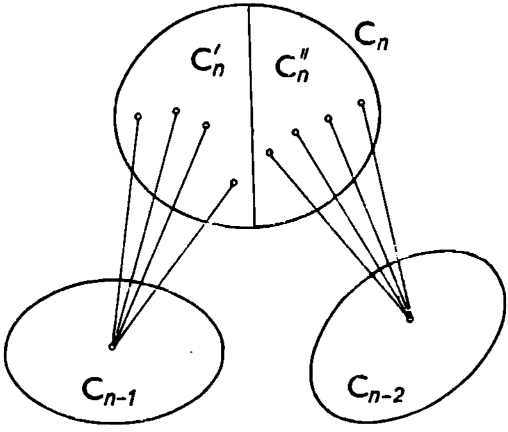
$i \in \{j + 2, \ldots, n - 1\}$. Tak dostaneme pořadí $n - 2$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_{n-2}$, které patří do množiny C_{n-2}. Přitom každé pořadí p z C_{n-2} takto dostaneme právě z $n - 2$ pořadí z C_n'' (totiž právě z pořadí vzniklých z p přidáním prvku m_n za některý z $n - 2$ prvků m_j, záměnou prvků m_i za m_{i+1} pro všechna $i \in \{j + 1, \ldots, n - 2\}$ a přidáním prvku m_j za prvek m_n). Je tedy

$$|C''_n| = (n - 2)\,|C_{n-2}| = (n - 2)\, c_{n-2}.$$

Celkem dostáváme

(29) $$c_n = (n - 1)\, c_{n-1} + (n - 2)\, c_{n-2}.$$

Snadno zjistíme počáteční hodnoty: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$.



2. *řešení*. Užijeme principu inkluze a exkluze. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ označíme M_i množinu všech

pořadí n prvků $m_1, m_2, \ldots, m_n$, v nichž je prvek m_{i+1} hned za prvkem m_i. Buď

$$\emptyset \neq \{r_1, r_2, \ldots, r_v\} \subset \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

přičemž $r_1 < r_2 < \ldots < r_v$. Množina $M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \ldots \cap M_{r_v}$ obsahuje tedy všechna pořadí oněch n prvků, v nichž prvek m_{r_i+1} následuje hned za prvkem m_{r_i} pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, v\}$. Tyto dvojice po sobě bezprostředně následujících prvků se však někdy mohou skládat v delší bloky po sobě následujících prvků; tak např. pro $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4, r_4 = 7, r_5 = 10, r_6 = 11$ dostáváme tři bloky (m_2, m_3, m_4, m_5), (m_7, m_8), (m_{10}, m_{11}, m_{12}). Všechna tato pořadí dostaneme zřejmě tak, že utvoříme všechna pořadí takovýchto bloků a prvků, které v nich nejsou. Je-li bloků b, je v nich celkem $b + v$ prvků a není v nich tedy $n - b - v$ prvků, takže

$$|M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \ldots \cap M_{r_v}| = (b + n - b - v)! = (n - v)!,$$

a to naštěstí nezávisí na počtu bloků.

Podle principu inkluze a exkluze je pak počet všech pořadí n prvků obsahujících alespoň jednu zakázanou dvojici sousedů roven

$$|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{n-1}| = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{n-1}{r} (n-r)! = (n-1)! \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} \frac{(n-r)}{r!}.$$

Hledaný počet dostaneme odečtením tohoto součtu od $n!$, vyjde

$$c_n = (n-1)!\left(n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Cvičení

9.10 Police je běžným způsobem naplněna knihami. Kolika způsoby je můžeme přerovnat tak, aby žádné dvě desky, které se dříve stýkaly, už nebyly vedle sebe?

9.11 Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ je
$c_n = d_n + d_{n-1}$.

9.12 Pokuste se vyřešit variantu úlohy 12, jestliže jsou zakázány nejen dvojice sousedů (m_i, m_{i+1}), ale i (m_{i+1}, m_i). Pokud nebudete úspěšní, uvědomte si, proč jste ztroskotali, zatímco v úloze 12 vše prošlo.

Úloha 13. *Kolik existuje j-prvkových variací s opakováním z k prvků takových, že každá obsahuje všech k prvků?*

1. *řešení.* Hledaný počet označme $z(j, k)$. Je zřejmé, že pro $j < k$ je $z(j, k) = 0$. Předpokládejme nadále, že $j \geqq k > 1$. Všechny uvažované variace se rozpadají na k disjunktních skupin podle toho, který prvek mají na prvním místě. Každá skupina se dále rozpadá na dvě disjunktní podskupiny podle toho, vyskytuje-li se prvek stojící na prvním místě ještě na některém jiném místě nebo ne. První podskupina zřejmě obsahuje právě $z(j-1, k-1)$ variací a ve druhé je jich právě $z(j-1, k)$. Platí tedy

$$z(j, k) = k[z(j-1, k-1) + z(j-1, k)]. \tag{30}$$

To umožňuje vyjít od počátečních hodnot

$$z(1, 1) = z(2, 1) = z(3, 1) = \ldots = 1$$

a postupně vypočítat

$$z(2, 2), z(3, 2), z(3, 3), z(4, 2), z(4, 3), z(4, 4), z(5, 2)$$

atd.

2. *řešení*. Rozdělíme-li uvažované variace na disjunktní skupiny podle toho, kolikrát se v nich každý z prvků vyskytuje, dostaneme

$$z(j, k) = \sum \frac{j!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!} ,$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané k-tice přirozených (tedy nenulových) čísel $(r_1, r_2, \dots, r_k)$, pro něž $r_1 + r_2 + \dots + r_k = j$. Vzhledem k tomu, že sčítanci nezávisejí na uspořádání čísel $r_1, r_2, \dots, r_k$, dostaneme sečtením stejných sčítanců

$$z(j, k) = \sum \frac{j!\, k!}{s_1!\, s_2! \dots s_k!\, c_1!\, c_2! \dots c_j!} ,$$

kde se sčítá přes všechny k-tice přirozených čísel

$$s_1 \geqq s_2 \geqq \dots \geqq s_k ,$$

pro něž $s_1 + s_2 + \dots + s_k = j$.

Čísla c_i jsou přitom pro každé $i \in \{1, 2, \dots, j\}$ definována jako počet čísel $s_1, s_2, \dots, s_k$, která jsou rovna i. (Tak např. pro

$$(s_1, s_2, \dots, s_5) = (7, 5, 5, 5, 2)$$

je $c_7 = 1$, $c_5 = 3$, $c_2 = 1$ a ostatní z čísel $c_1, \dots, c_{24}$ jsou rovna nule.) Koeficient

$$\frac{k!}{c_1!\, c_2! \dots c_j!}$$

tedy pro každou k-tici $s_1, \dots, s_k$ udává počet všech uspořádaných k-tic $(r_1, r_2, \dots, r_k)$, z nichž vznikla srovnáním členů podle velikosti, tedy počet příslušných stejných sčítanců.

To můžeme vyjádřit ještě jiným způsobem:

$$(31)\quad z(j, k) = \sum \frac{j!\,k!}{(t_1!)^{d_1}\,(t_2!)^{d_2}\ldots(t_m!)^{d_m}\,d_1!\,d_2!\ldots d_m!},$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané m-tice $(d_1, d_2, \ldots$ $\ldots, d_m)$ a přes všechny m-tice

$$t_1 > t_2 > \ldots > t_m$$

přirozených čísel, pro něž

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m = k$$

a

$$d_1t_1 + d_2t_2 + \ldots + d_mt_m = j.$$

Není těžké si uvědomit, jak jsme sčítance přepsali. Např. sčítanci odpovídajícímu

$$(s_1, s_2, \ldots, s_m) = (7, 5, 5, 5, 2)$$

bude nyní odpovídat

$$t_1 = 7, t_2 = 5, t_3 = 2,$$
$$d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 2.$$

3. *řešení*. Užijeme princip inkluze a exkluze. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ označme M_i množinu všech j-prvkových variací z k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$, které neobsahují prvek m_i. Pro každou neprázdnou podmnožinu $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ je tedy $M_{v_1} \cap M_{v_2} \cap \ldots \cap M_{v_r}$ množina všech j-prvkových variací s opakováním z $(k - r)$ prvků $(\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} - \{m_{v_1}, m_{v_2}, \ldots, m_{v_r}\})$ a proto

$$|M_{v_1} \cap M_{v_2} \cap \ldots \cap M_{v_r}| = (k - r)^j.$$

Podle principu inkluze a exkluze je

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r+1}\binom{k}{r}(k - r)^j.$$

Odečtením od počtu k^j všech j-prvkových variací s opakováním z k prvků dostaneme:

$$(32) \qquad z(j, k) = k^j - \binom{k}{1}(k-1)^j + \binom{k}{2}(k-2)^j - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}.$$

Cvičení

9.13 V každém z p podniků má být současně provedena kontrola. Kolika způsoby se na to může rozdělit k kontrolorů?

9.14 Vysvětlete, proč pro každé přirozené číslo p platí

a) $$\binom{p}{0}p^p - \binom{p}{1}(p-1)^p + \binom{p}{2}(p-2)^p + \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} = p!$$

b) $$\binom{p+1}{0}(p+1)^p - \binom{p+1}{1}p^p + \binom{p+1}{2}(p-1)^p + \ldots + (-1)^p\binom{p+1}{p-1} = 0\,.$$

9.15 Dokažte vzorec (32) matematickou indukcí.

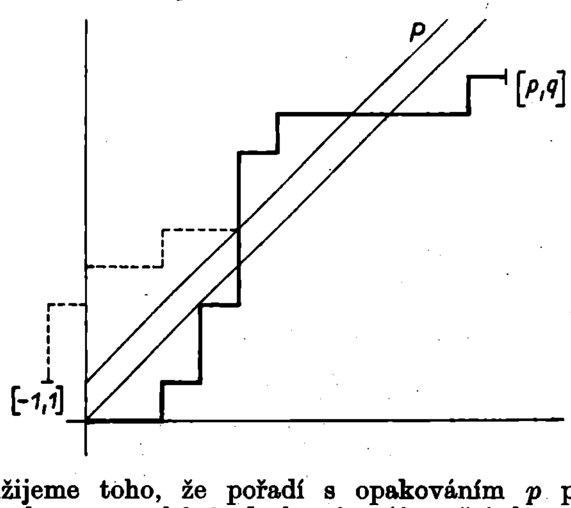
9.16 Jsou dány dvě neprázdné konečné množiny P, Q. Určete počet všech

a) zobrazení množiny P do množiny Q,
b) prostých zobrazení množiny P do množiny Q,
c) zobrazení množiny P na množinu Q,
d) prostých zobrazení množiny P na množinu Q,
e) zobrazení z množiny P do množiny Q,
f) prostých zobrazení z množiny P do množiny Q,
g) zobrazení z množiny P na množinu Q,
h) prostých zobrazení z množiny P na množinu Q.

9.17 Jak se změní součet na pravé straně (31), připouštějí-li se i nulová t_i?

Úloha 14. *Jsou dána dvě nezáporná celá čísla p, q. Kolik existuje pořadí s opakováním p prvků* 1. *druhu a q prvků* 2. *druhu, která mají pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, p + q\}$ na počátečních i místech alespoň tolik prvků* 1. *druhu jako* 2. *druhu?*

Řešení. Hledaný počet označíme $f(p, q)$. Pro $p < q$ je zřejmě $f(p, q) = 0$. Předpokládejme nadále, že $p \geqq q$. Na čtverečkovaném papíru zvolme dvě kolmé linky a zaveďme tak přirozeným způsobem souřadnou soustavu s jednotkou délky rovnou rozměru čtverečku.



Využijeme toho, že pořadí s opakováním p prvků 1. druhu a q prvků 2. druhu si vzájemně jednoznačně odpovídají s lomenými čarami, které vedou po linkách z počátku do bodu $[p, q]$ bez oklik, tj. buď doprava nebo vzhůru (srovnej cvič. 1.11). Jak uvidíme, geometrické znázornění podstatně přispěje k řešení úlohy.

Pořadím, jejichž počet hledáme, odpovídají právě ty čáry (stále budeme mít na mysli lomené čáry bez oklik), které nezasahují nad přímku určenou body $[0, 0]$ a $[1, 1]$, tj. které nemají žádný společný bod s přímkou P určenou body $[0, 1]$ a $[1, 2]$. Nalezneme počet $a(p, q)$ čar vedoucích z bodu $[0, 0]$ do bodu $[p, q]$, které uvedenou vlastnost nemají.

Každé z těchto čar L přiřaďme čáru L' následujícím způsobem: Úsek mezi počátkem a prvním průsečíkem čáry L s přímkou P nahradíme čarou, která je s ním souměrná podle přímky P; zbývající část čáry L necháme beze změny. Čára L', kterou jsme dostali, vede z bodu $[-1, 1]$ do bodu $[p, q]$. Celou transformaci jsme dělali proto, že *každá* čára L' vedoucí z bodu $[-1, 1]$ do bodu $[p, q]$ vznikne popsaným způsobem z některé z $a(p, q)$ uvažovaných čar L, a to z jediné. Totiž z té, která vznikne nahrazením úseku čáry L' mezi body $[1, 1]$ a prvním jejím průsečíkem s přímkou P (ten vždy existuje, neboť body $[-1, 1]$ a $[p, q]$ leží v opačných polorovinách určených přímkou P) jeho obrazem v souměrnosti podle přímky P. Zjistili jsme, že $a(p, q)$ je rovno počtu *všech* čar vedoucích z bodu $[-1, 1]$ do bodu $[p, q]$, tedy

$$a(p, q) = \binom{p+q}{p+1}.$$

Odtud dostáváme

$$f(p, q) = \binom{p+q}{p} - \binom{p+q}{p+1}.$$

Cvičení

9.18 Alenka dostává každý den od maminky korunu. Někdy si koupí nanuka, jindy si korunku schová. Tatínek ji nabádá, aby si polovinu peněz šetřila na něco pořádného. Občas se podívá do pokladničky, a není-li tam alespoň polovina korun, řeční. Kolika způsoby si může Alenka během prvních 30 dnů kupovat nanuky, aby jich snědla co nejvíc a přitom měla klid? Maminka jí víc než jeden nanuk denně nedovolí.

9.19 V poledne byly všechny schránky automatické úschovny zavazadel obsazeny. Během odpoledne si jednotlivě přišlo v lidí vyzvednout a u lidí uložit zavazadlo. Kolika způsoby mohli přicházet (bez ohledu na to, kdy jim jede vlak), aby nikdo nemusel čekat, než se některá schránka uvolní?

9.20 Podívejte se do Vilenkinovy Kombinatoriky, kde je rozebráno několik variant úlohy 14 a jiné s ní související úlohy.

Úloha 15. *Kolika způsoby lze kolem kulatého stolu rozesadit na $2n$ židlí n manželských párů tak, aby se muži střídali se ženami a žádný pár neseděl vedle sebe?*

Řešení. Nejprve se musíme rozhodnout, která rozesazení budeme pokládat za různá. Pokládejme tedy dvě rozesazení za různá, existuje-li židle, na níž při nich sedí různé osoby. (Pokud bychom nerozlišovali rozesazení, která se liší jen pootočením celé společnosti o několik míst, dostali bychom $2n$-krát méně různých rozesazení. Nebylo by nepřirozené ani kdybychom za stejná pokládali taková dvě rozesazení, při nichž má každá osoba tytéž sousedy. Pak bychom dostali — pokud $n > 1$ — ještě dvakrát méně různých rozesazení.)

Všechna rozesazení, jejichž počet hledáme, rozdělme do $2.n!$ disjunktních skupin podle toho, jak jsou v nich rozesazeny ženy. Abychom našli počet rozesazení v jedné ze skupin, je třeba najít pro pevné rozesazení žen počet m_n všech rozesazení mužů, při nichž žádný z nich nesedí vedle své ženy. K tomu užijeme princip inkluze a exkluze.

Označme M_i množinu všech rozesazení mužů, při nichž i-tý z nich sedí vedle své ženy.

Podle principu inkluze a exkluze pak bude

$$
(33) \qquad n! - m_n = |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| = \\
= \Sigma(-1)^{r+1} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_r}|,
$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pro každou takovou podmnožinu označme $q(i_1, i_2, \ldots \ldots, i_r)$ počet rozesazení mužů, při nichž příslušných r mužů sedí vedle svých žen (a o ostatních se nic netvrdí). Je tedy

$$
|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_r}| = \\
= (n - r)!\, q(i_1, i_2, \ldots, i_r).
$$

Pro různé r-prvkové podmnožiny se však hodnoty $q(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ mohou značně lišit (sedí-li příslušné ženy pohromadě, je pro muže méně možností, než jsou-li rozptýleny) a jejich chování je obtížné postihnout. Jednotlivé sčítance v (33) vpravo se tedy nedají dobře zvládnout. Naštěstí lze celkem snadno spočíst jejich částečné součty

$$
s_r = \Sigma\, |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_r}| = \\
= (n - r)!\, \Sigma q(i_1, i_2, \ldots, i_r),
$$

kde se sčítá přes všechny r-prvkové podmnožiny $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom bude

$$n! - m_n = s_1 - s_2 + \ldots + (-1)^{r+1} s_r.$$

Přistupme k výpočtu čísla

$$q_r = \Sigma q\,(i_1, i_2, \ldots, i_r),$$

které znamená souhrnný počet všech rozesazení všech r-tic mužů vedle jejich žen. Představme si proto, jak nějaká r-tice mužů sedí vedle svých žen, a označme mezery mezi židlemi, na nichž sedí manželské páry. Tak bude označeno právě r mezer, přičemž žádné dvě nebudou vedle sebe. To by totiž znamenalo, že buď nějaký muž sousedí z obou stran se svou ženou, nebo nějaká žena se svým mužem. Obráceně: označme r mezer mezi židlemi tak, aby žádné dvě nebyly vedle sebe. Označené mezery pak budou mezi r páry sousedních židlí, z nichž po jedné je obsazeno ženami a na zbývající se vedle nich mohou posadit jejich manželé.

Číslo q_r je tedy rovno počtu způsobů, jak z $2n$ mezer vybrat r-prvkovou podmnožinu tak, aby žádné dvě vybrané mezery nebyly vedle sebe. Teď si jen stačí vzpomenout na úlohu 7. Podle ní je

$$q_r = \frac{2n}{2n-r}\binom{2n-r}{r}.$$

Manželské páry lze tedy rozesadit právě

$$2n!\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,(n-r)!\,\frac{2n}{2n-r}\binom{2n-r}{r} \tag{34}$$

způsoby.

I tato úloha se v jiné souvislosti vyskytuje v již citované knížce J. Bosáka *Latinské štvorce.*

Cvičení

9.21 Dosadíte-li do vzorce (34) $n = 1$, vyjde -2. Vysvětlete, proč pro $n = 1$ vzorec neplatí.