Kombinatorika

VIII. kapitola. Jiný pohled na princip inkluze a exkluze

In: Antonín Vrba (author): Kombinatorika. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1980. pp. 64–72.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403971

VIII. KAPITOLA

JINÝ POHLED NA PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE*)

Mějme dány konečné množiny $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Sjednocení těchto množin označme M a dále označme pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ jako a_j počet prvků množiny M ležících v alespoň j z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$, jako p_j počet prvků množiny M ležících právě v j z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ a konečně položme

$$s_j = \Sigma |M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \ldots \cap M_{r_j}|,$$

kde se sčítá přes všechny j-prvkové podmnožiny $\{r_1, r_2, \ldots, r_j\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$. Definovali jsme tak tři soustavy čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_k,$$
$$p_1, p_2, \ldots, p_k,$$
$$s_1, s_2, \ldots, s_k$$

a budeme se snažit vždy čísla jedné soustavy vyjádřit pomocí druhé soustavy.

Vztah mezi prvními dvěma soustavami je triviální. Z definice je hned vidět, že pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ platí

$$(21) \qquad a_j = p_j + p_{j+1} + \ldots + p_k,$$

$$(22) \qquad p_j = a_j - a_{j+1}$$

(pro $j = k$ se poslední vztah redukuje na $p_k = a_k$).

*) Na tuto kapitolu se dále nenavazuje.

Zajímavější budou souvislosti třetí soustavy s ostatními. Jeden speciální případ už známe. Princip inkluze a exkluze (15) totiž říká, že

$$a_1 = s_1 - s_2 + \ldots + (-1)^{k+1} s_k .$$

Zvolme libovolný prvek m množiny M a $M_{v_2}, M_{v_2}, \ldots, \ldots, M_{v_q}$ buďte právě ty z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$, v nichž prvek m leží (v ostatních tedy neleží). Buď $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ a spočtěme, v kolika množinách typu

$$M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \ldots \cap M_{r_i} \tag{23}$$

prvek m leží. Leží právě v těch, pro něž platí

$$\emptyset \neq \{r_1, r_2, \ldots, r_i\} \subset \{v_1, v_2, \ldots, v_q\} .$$

Pro $i \leqq q$ leží tedy prvek m v právě $\binom{q}{i}$ množinách typu (23) a pro $i > q$ v žádné takové množině. Vidíme, že každý prvek ležící v právě q z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ je v součtu s_j započten právě $\binom{q}{j}$-krát pro každé $q \in \in \{j, j + 1, \ldots, k\}$ a není započten vůbec pro $q < j$. Platí tedy

$$s_j = p_j + \binom{j+1}{j} p_{j+1} + \ldots + \binom{k}{j} p_k \tag{24}$$

pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Vyjádřili jsme tak čísla $s_1, s_2, \ldots, s_k$ pomocí čísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

K tomu, abychom odvodili obrácenou souvislost, dívejme se na právě odvozené vztahy

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
p_1+\binom{2}{1}p_2+\binom{3}{1}p_3+\dots+\binom{k-1}{1}p_{k-1}+\binom{k}{1}p_k &= s_1\\
p_2+\binom{3}{2}p_3+\dots+\binom{k-1}{2}p_{k-1}+\binom{k}{2}p_k &= s_2\\
\dots\\
p_{k-1}+\binom{k}{k-1}p_k &= s_{k-1}\\
p_k &= s_k
\end{aligned}
$$

jako na soustavu k lineárních rovnic o k neznámých $p_1, p_2, \dots, p_k$. Tu není obtížné vyřešit, postupujeme-li zdola nahoru, neboť má výhodný trojúhelníkový tvar. Z poslední rovnice dostáváme

$$p_k = s_k\,,$$

z předposlední

$$p_{k-1} = s_{k-1} - \binom{k}{k-1}p_k = s_{k-1} - \binom{k}{k-1}s_k$$

atd. Postupně vyjde pro $j = k, k-1, \dots, 2, 1$

$$(26)\qquad p_j = s_j - \binom{j+1}{j}s_{j+1} + \dots + (-1)^{k-j}\binom{k}{j}s_k.$$

Pro $j = k$ (i pro $j = k-1$) jsme se o tom už přesvědčili.

Buď $r \in \{2, 3, \dots, k\}$. Platí-li (25) pro všechna $j \in \{r, r+1, \dots, k\}$, dostaneme z $(r-1)$-té rovnice

$$p_{r-1} = s_{r-1} - \sum_{v=r}^{k}\binom{v}{r-1}p_v\,.$$

Dosadíme-li sem za $p_r, p_{r+1}, \dots, p_k$ podle (26) a upravujeme, vychází

$$p_{r-1} = s_{r-1} - \sum_{v=r}^{k} \binom{v}{r-1} \sum_{w=v}^{k} (-1)^{v+w} \binom{w}{v} s_w =$$

$$= s_{r-1} - \sum_{v=r}^{k} \sum_{w=v}^{k} (-1)^{v+w} \binom{v}{r-1} \binom{w}{v} s_w =$$

$$= s_{r-1} - \sum_{v=r}^{k} \sum_{w=v}^{k} (-1)^{v+w} \binom{w}{r-1} \binom{w-r+1}{v-r+1} =$$

$$= s_{r-1} - \sum_{w=r}^{k} \sum_{v=r}^{k} (-1)^{v+w} \binom{w}{r-1} \binom{w-r+1}{v-r+1} =$$

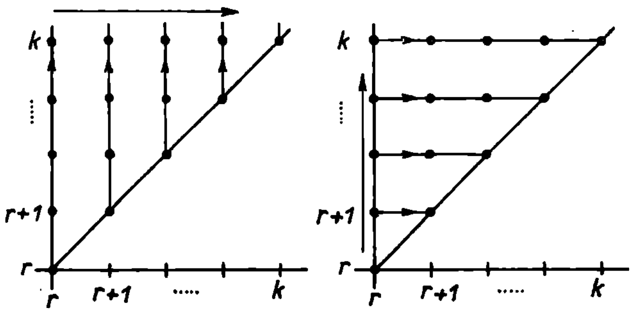
$$= s_{r-1} - \sum_{w=r}^{k} (-1)^{w} \binom{w}{r-1} s_w \sum_{v=r}^{w} (-1)^{v} \binom{w-r+1}{v-r+1} =$$

$$= s_{r-1} - \sum_{w=r}^{k} (-1)^{r+w} \binom{w}{r-1} s_w .$$

Při úpravách jsme mj. užili vztahu

$$\binom{v}{r-1} \binom{w}{v} = \binom{w}{r-1} \binom{w-r+1}{v-r+1}$$

(viz cvič. 2.12), obrátili jsme pořadí sčítání, jak je znázorněno na obrázku, a užili jsme rovnosti



$$\sum_{v=r}^{w} (-1)^v \binom{w-r+1}{v-r+1} = (-1)^r$$

(viz (8)). Dokázali jsme vzorec (26).

Poznámka pro čtenáře, kteří znají základy lineární algebry: K tomu, abychom dokázali, že řešení soustavy lineárních rovnic (25) má tvar (26), stačí ověřit, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{k-1}{1} & \binom{k}{1} \\ 0 & 1 & \binom{3}{2} & \dots & \binom{k-1}{2} & \binom{k}{2} \\ & & & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \binom{k}{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & (-1)^k\binom{k-1}{1} & (-1)^{k+1}\binom{k}{1} \\ 0 & 1 & -\binom{3}{2} & \dots & (-1)^{k+1}\binom{k-1}{2} & (-1)^k\binom{k}{2} \\ & & & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\binom{k}{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou navzájem inverzní: Buďte $p \in \{1, 2, \dots, k\}$, $q \in \{1, 2, \dots, k\}$ a vypočtěme skalární součin p-tého řádku první matice a q-tého sloupce druhé matice. Je-li $p > q$, je roven nule z triviálních důvodů. Pro $p = q$ je zřejmě roven 1. V případě $p < q$ vyjde

$$\sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{s}{p} \binom{q}{s} = \sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{q}{p} \binom{q-p}{q-s} =$$

$$= \binom{q}{p} \sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{q-p}{q-s} = 0 .$$

Součin obou matic je tedy skutečně jednotková matice.

To je vidět také z následující skutečnosti: Uvažujme vektorový prostor, jehož prvky jsou všechny mnohočleny nejvýše k-tého stupně s nulovým absolutním členem. Jeho dvě báze jsou

$$x, x^2, \ldots, x^k,$$

$$x, (x+1)^2 - 1, \ldots, (x+1)^k - 1 .$$

Vzhledem k tomu, že pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ platí podle binomické věty

$$(x+1)^j - 1 = \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} x^s - 1 = \sum_{s=1}^{j} \binom{j}{s} x^s ,$$

$$x^j = [(x+1) - 1]^j = \sum_{s=0}^{j} (-1)^s \binom{j}{s} (x+1)^s =$$

$$= \sum_{s=1}^{j} (-1)^s \binom{j}{s} [(x+1)s - 1] ,$$

je první matice maticí přechodu od první báze k druhé bázi a druhá matice je maticí přechodu od druhé báze k první bázi. Obě matice jsou proto navzájem inverzní.

Zbývá ještě vyjádřit čísla a_j pomocí čísel $s_1, s_2, \ldots, s_k$ a obráceně. Podle (21) a (26) je pro každé $j \in \{1, 2, \ldots. k\}$

$$a_j = \sum_{v=j}^{k} p_v = \sum_{v=j}^{k} \sum_{w=v}^{k} (-1)^{v+w} \binom{w}{v} s_w =$$

$$= \sum_{w=j}^{k} \sum_{v=j}^{w} (-1)^{v+w} \binom{w}{v} s_w = \sum_{w=j}^{k} (-1)^w s_w \sum_{v=j}^{w} (-1)^v \binom{w}{v} =$$

$$= \sum_{w=j}^{k} (-1)^{w+j} \binom{w-1}{w-j} s_w .$$

Pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tedy platí

$$a_j = s_j - \binom{j}{1} s_{j+1} + \ldots + (-1)^{k-j} \binom{k-1}{k-j} s_k.$$

Pro $j = 1$ to není nic jiného než princip inkluze a exkluze (15).

Cvičení

8.1 Kolik sportovců z příkladu na str. 49 pěstuje
a) právě dva sporty,
b) alespoň dva sporty?

8.2 Při testování jedné série televizorů jich bylo deset shledáno vadnými. Přitom vadná součástka byla v sedmi z nich, vadný kontakt v pěti a poškozená skříň u čtyř. Vadnou součástku i kontakt a přitom bezvadnou skříň měl jeden televizor, jeden měl vadný kontakt i skříň a přitom bezvadné součástky a dva měly vadnou součástku i skříň a přitom bezvadné kontakty.
a) U kolika televizorů byly všechny tři závady?
b) Kolik televizorů mělo pouze poškozenou skříň?

8.3 Vyjádřete čísla $s_1, s_2, \ldots, s_k$ pomocí soustavy $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

8.4 Kolik tlumočníků je zaměstnáno ve středisku, víme-li, že 36 jich umí anglicky, 32 německy, 31 rusky, 30 francouzsky, 28 polsky a 26 španělsky, přičemž 53 z nich zná více než jeden z uvedených jazyků. 24 tlumočníci znají alespoň tři jazyky, 9 alespoň čtyři, 3 alespoň pět a 1 všech šest.

8.5 Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou konečné množiny. Každému prvku $m \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ přiřaďme nějaké číslo $f(m)$. Každé množině $T \subset M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ je pak přiřazeno číslo $f(T) = \sum_{m \in T} f(m)$. Definujme čísla s'_j, p'_j, a'_j podobně jako byla definována čísla s_j, p_j a a_j, jen místo $|T|$ všude bereme $f(T)$. Projděte příslušné úvahy a uvědomte si, že celá teorie platí i pro čárkovaná čísla. Pro které f se čárkovaná čísla rovnají nečárkovaným?

8.6 Mějme v rovině (prostoru) konečný počet množin M_1, $M_2, \ldots, M_k$, které mají konečné obsahy (objemy). Označíme-li obsah (objem) množiny M symbolem $|M|$, platí vzorec (15) i výsledky 8. kapitoly. Důkazy však nemají smysl, jde-li o nekonečné množiny (konečné množiny mají nulový obsah (objem) a vzorce platí triviálně). Vysvětlete, proč vzorce platí.

8.7 Dokažte, že matice

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{k-2}{0} & \binom{k-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{k-2}{1} & \binom{k-1}{1} \\ & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{k-2}{k-2} & \binom{k-1}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{k-1}{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & (-1)^k\binom{k-2}{0} & (-1)^{k-1}\binom{k-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \dots & (-1)^{k-1}\binom{k-2}{1} & (-1)^k\binom{k-1}{1} \\ & & \dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{k-2}{k-2} & -\binom{k-1}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{k-1}{k-1} \end{pmatrix}$$

jsou navzájem inverzní

a) pomocí čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ a $s_1, s_2, \dots, s_k$,

b) přímým výpočtem.