III. KAPITOLA

BINOMICKÁ VĚTA

Jednou z prvních věcí, kterou jste se učili v algebře, byly vzorečky

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Není těžké odvodit podobné vzorce, vyjadřující n-tou mocninu $(a + b)^n$ dvojčlenu $(a + b)$ i pro exponenty $n > 3$. Tak např.

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) =$$
$$= a^4 + ba^3 + aba^2 + a^2ba + a^3b + b^2a^2 + baba +$$
$$+ ba^2b + ab^2a + abab + a^2b^2 + b^3a + b^2ab + bab^2 +$$
$$+ ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Nejprve jsme roznásobili součin čtyř dvojčlenů (pomocí distributivního zákona) a pak jsme (podle komutativního a asociativního zákona) sečetli členy lišící se pouze pořadím činitelů. Člen $4a^3b$ tedy vznikl sečtením čtyř členů ba^3, aba^2, a^2ba, a^3b. Na roznásobení součinu dvojčlenů však můžeme hledět také takto: Z každého dvojčlenu vezmeme po jednom členu (buď a nebo b) a utvoříme z nich součin; toto provedeme všemi možnými způsoby. U a^3b je pak koeficient 4, neboť lze právě čtyřmi způsoby vzít ze tří dvojčlenů člen a a z jednoho člen b.

Teď už budeme vědět, jak dokázat tzv. *binomickou větu* (binom je cizí název pro dvojčlen).

Pro reálná čísla a, b a pro přirozené číslo n platí

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots \\
&\ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n . \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Důkaz. Roznásobíme součin n dvojčlenů $(a+b)$ $(a+b) \ldots (a+b)$. Dostaneme tak součet členů tvaru a^ib^j, kde $i + j = n$. Přitom u $a^{n-k}b^k$ bude koeficient, který bude roven počtu způsobů, jak z n dvojčlenů vybrat k dvojčlenů, z nichž se vzal člen b (z ostatních $n-k$ dvojčlenů se vzal člen a). Koeficient bude tedy roven počtu k-prvkových kombinací z n prvků, tj. číslu $K(k, n) = \binom{n}{k}$. Tím je důkaz proveden.

Vzhledem k tomu, že kombinační čísla se vyskytují jako koeficienty v binomické větě, říkává se jim také *binomické koeficienty*. Soustava $n + 1$ koeficientů

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$$

tvoří, jak víme, příslušný řádek Pascalova trojúhelníku.

Dosadíme-li do binomické věty za a, b určitá čísla, dostaneme často zajímavé rovnosti, v nichž vystupují kombinační čísla. Tak např. pro $a = 1$, $b = 1$ dostaneme

(7)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$$

pro $a = 1, b = -1$

$$(8)\qquad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + \\ + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

apod. Dokažme si ještě, že

(9)

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Vyjdeme z toho, že pro každé reálné číslo x platí

$$(10)\qquad (x+1)^{2n} = (x+1)^n\,(x+1)^n$$

neboli

$$\binom{2n}{0}x^{2n} + \binom{2n}{1}x^{2n-1} + \ldots + \binom{2n}{2n-1}x + \binom{2n}{2n} = \\ = \left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}\right] \cdot \\ \cdot \left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}\right].$$

Pravou stranu ještě roznásobíme. U x^n pak stojí na levé straně koeficient $\binom{2n}{n}$ a na pravé straně koeficient

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \ldots + \\ + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1} + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \\ + \binom{n}{2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\binom{n}{n}$$

(užili jsme vzorce (2)). Oba koeficienty se však musejí rovnat (podle věty o rovnosti polynomů).

Vztah (7) můžeme dokázat také následující kombinatorickou úvahou: Na levé straně je součet počtů všech prázdných, jednoprvkových, dvouprvkových, ..., $(n - 1)$-prvkových a n-prvkových podmnožin n-prvkové množiny, tedy počet všech podmnožin n-prvkové množiny. Přitom se snadno dokáže, že n-prvková množina má právě 2^n podmnožin: Zvolíme jeden prvek $(k + 1)$-prvkové množiny a všechny její podmnožiny rozdělíme na dvě disjunktní skupiny podle toho, obsahují-li ho. Každá skupina pak zřejmě obsahuje právě tolik podmnožin, kolik má podmnožin k-prvková množina. Počet všech podmnožin $(k + 1)$ prvkové množiny je tedy roven dvojnásobku počtu všech podmnožin k-prvkové množiny. Vzhledem k tomu, že jednoprvková množina má právě dvě podmnožiny, má jich n-prvková právě 2^n.

O něco složitější je to u vztahu (8): Na množině všech podmnožin n-prvkové množiny $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ definujme následující zobrazení: Obsahuje-li podmnožina prvek m_1, přiřaďme jí podmnožinu, která z ní vznikne vynecháním tohoto prvku; neobsahuje-li podmnožina prvek m_1, přiřaďme jí podmnožinu, která z ní vznikne přidáním tohoto prvku. To je zřejmě vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech podmnožin na sebe, v němž je každé podmnožině o sudém počtu prvků přiřazena podmnožina o lichém počtu prvků a obráceně. Platí tedy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

Naznačme ještě kombinatorickou úvahu vedoucí ke vztahu (9). Rozdělme $2n$-prvkovou množinu M na dvě

n-prvkové množiny M_1 a M_2. Každá n-prvková podmnožina P množiny M se pak rozpadá na dvě části: první je $P \cap M_1$ a druhá je $P \cap M_2$. Má-li první z nich k prvků, druhá má $n - k$ prvků, a pro každé $k \in \{0, 1, \ldots, \ldots, n\}$ dostáváme právě $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ podmnožin.

Cvičení

8.1 Dokažte binomickou větu metodou matematické indukce.

8.2 Dokažte vzorec (7) metodou matematické indukce.

8.3 Dokažte vzorec (8) opakovaným užitím vzorce (3).

8.4 Dokažte vzorec (8) pro lichá n pomocí vzorce (2).

8.5 Vyčtěte vzorce (7) a (8) z Pascalova trojúhelníka.

8.6 Vypočtěte součet

a) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

b) $\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \ldots + (-2)^n\binom{n}{n}$.

8.7 Dokažte, že pro celá nezáporná čísla $m \leq p$ platí

$$\binom{p}{0}\binom{m}{0} + \binom{p}{1}\binom{m}{1} + \ldots + \binom{p}{m}\binom{m}{m} = \binom{m+p}{m}$$

a) pomocí binomické věty,

b) kombinatorickou úvahou.

8.8 Dokažte vzorec (2) pomocí binomické věty.

8.9 Jaký koeficient má u x^8 funkce $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$? Budou všechny členy záviset na x?

8.10 Roznásobte: $(t^3 - u\sqrt{3})^6$.

8.11 Dokažte, že číslo $11^{10} - 1$ má na konci dvě nuly.

8.12 Určete zbytek při dělení čísla 9^{100} osmi.

8.13 Dokažte Bernoulliho nerovnost: Pro přirozené číslo n a nezáporné reálné číslo x platí

$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx.$$

8.14 V městské dopravě se často používá tento systém: Cestující si předem zakoupí jízdenky v předprodeji. Po nastoupení do vozu zasunou jízdenku (je znázorněna na

obrázku) do označovacího strojku, který v ní vyperforuje otvory do některých z devíti políček. Určete, kolika způsoby může být jízdenka označena.

8.15 Určete, kolik kladných dělitolů má číslo 2730.

8.16 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n \, . \, 2^{n-1}$$

a) úpravou jednotlivých členů levé strany,
b) změnou pořadí sčítanců,
c) metodou matematické indukce,
d) kombinatoricky.

8.17 Do každé mezery mezi číslicemi čísla 14 641 vepište ještě k nul. Napište druhou odmocninu čísla, které jste tak dostali.