Kombinatorika

I. kapitola. Pořadí, variace a kombinace

In: Antonín Vrba (author): Kombinatorika. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1980. pp. 7–14.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403964

I. KAPITOLA

POŘADÍ, VARIACE A KOMBINACE

Začneme úlohou:

Do školní jídelny přišla skupina 35 žáků. Určete, kolika způsoby se mohli seřadit do fronty u výdeje obědů.

Jednotlivé způsoby se budou lišit pořadím, v němž žáci u okénka stojí. Máme tedy určit počet všech *pořadí* 35 žáků. Úlohu zformulujeme a vyřešíme obecně:

Určete počet všech pořadí prvků neprázdné konečné k-prvkové množiny M. Pořadím se zde míní uspořádaná k-tice navzájem různých prvků množiny M.

Hledaný počet označíme $P(k)$. (V naší konkrétní úloze bude $k = 35$ a M skupina 35 žáků, hledáme $P(35)$.) Počet $P(k)$ bude ovšem záviset jen na čísle k a ne na dalších vlastnostech množiny M a jejích prvků. Počet pořadí 35 žáků je stejný jako počet pořadí 35 parních lokomotiv či počet pořadí 35 bodů v rovině.

Je-li číslo k malé, můžeme najít počet pořadí $P(k)$ tak, že systematicky sestavíme všechna pořadí a pak spočítáme, kolik jich je. Tak např. všechna pořadí prvků čtyřprvkové množiny $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ jsou

(m_1, m_2, m_3, m_4)	(m_1, m_2, m_4, m_3)	(m_1, m_3, m_2, m_4)
(m_1, m_3, m_4, m_2)	(m_1, m_4, m_2, m_3)	(m_1, m_4, m_3, m_2)
(m_2, m_1, m_3, m_4)	(m_2, m_1, m_4, m_3)	(m_2, m_3, m_1, m_4)
(m_2, m_3, m_4, m_1)	(m_2, m_4, m_1, m_3)	(m_2, m_4, m_3, m_1)
(m_3, m_1, m_2, m_4)	(m_3, m_1, m_4, m_2)	(m_3, m_2, m_1, m_4)
(m_3, m_2, m_4, m_1)	(m_3, m_4, m_1, m_2)	(m_3, m_4, m_2, m_1)
(m_4, m_1, m_2, m_3)	(m_4, m_1, m_3, m_2)	(m_4, m_2, m_1, m_3)
(m_4, m_2, m_3, m_1)	(m_4, m_3, m_1, m_2)	(m_4, m_3, m_2, m_1)

a je jich 24. Je tedy $P(4) = 24$. Pro velká k je ovšem tato metoda příliš pracná a hlavně nespolehlivá.

Podívejme se na seznam všech pořadí čtyřprvkové množiny pozorněji: Všechna pořadí v prvních dvou řádcích mají na počátečním místě prvek m_1 a za ním postupně následují všechna pořadí tří prvků m_2, m_3, m_4. Analogicky je tomu i v dalších řádcích. Je tedy $P(4) = 4 . P(3)$. Obecně pro každé přirozené číslo n platí, že

(1) $$P(n + 1) = (n + 1)\, P(n).$$

Vskutku, rozdělíme-li všechna pořadí $n + 1$ prvků na $n + 1$ disjunktních skupin*) podle toho, kterým prvkem začínají, bude každá skupina obsahovat právě $P(n)$ pořadí, neboť vynecháním počátečního prvku ve všech pořadích určité skupiny dostaneme právě všechna pořadí ostatních n prvků.

Vzorec (1) umožňuje odpovědět na otázku, kolik je všech pořadí k prvků. Vzhledem k tomu, že zřejmě $P(1) = 1$, dostáváme podle něho: *Pro každé přirozené číslo k je*

$$P(k) = k(k - 1)\,(k - 2) \ldots 2.1.$$

*) Množiny budeme nazývat *disjunktní*, pokud průnik každých dvou z nich je prázdný.

Tento vzorec se snadno pamatuje — vpravo je součin všech přirozených čísel od 1 do k včetně*).
Podle vzorce vychází $P(4) = 4.3.2.1 = 24$ a to se shoduje s tím, co jsme zjistili dříve. Počet různých front, které mohli žáci v jídelně utvořit, činí

$$P(35) = 35.34. \dots .2.1.$$

(Toto číslo má 41 číslic.)

Budeme pokračovat další úlohou:
V noclehárně je 50 lůžek. Určete, kolika způsoby se na ně může uložit 35 nocležníků.
Abychom mohli úlohu vyřešit, musíme ještě vědět, které způsoby uložení nocležníků se pokládají za různé. Z hlediska nocležníků bude podstatné, na které posteli kdo z nich bude ležet; dvě uložení budou pokládat za různá, právě když alespoň jeden nocležník bude spát při jednom z nich na jiné posteli než při druhém. Jinými slovy, je pro ně podstatné, nejen které postele budou obsazeny, ale také uspořádání nocležníků na nich. Hledaný počet tedy bude roven počtu všech uspořádaných 35-tic lůžek, které je možno sestavit ze všech 50 lůžek, která v noclehárně jsou.
Jiné hledisko bude mít správce noclehárny, který musí druhý den převléknout použité postele. Ten bude pokládat za různá taková dvě uložení, že při jednom z nich byla použita postel, která nebyla použita při druhém. Kdo vlastně na které posteli spal, ho vůbec zajímat nebude, tj. nebude brát v úvahu uspořádání nocležníků na postelích. Pro něho bude hledaný počet roven počtu všech neuspořádaných 35-tic lůžek, které je možno sestavit z těch 50 lůžek, jinými slovy počet

*) Je-li $k = 1$, je vpravo 1 (nejde vlastně o součin).

všech 35-prvkových podmnožin 50-prvkové množiny lůžek v noclehárně.

Jak to bývá v matematice obvyklé, při řešení úlohy odhlédneme od noclehárny a zájezdu i od konkrétního počtu postelí a nocležníků a úlohu zformulujeme obecně:

Buď dána neprázdná konečná k-prvková množina M a přirozené číslo $j \leqq k$. Určete

a) *počet všech uspořádaných j-tic navzájem různých prvků množiny M,*

b) *počet všech j-prvkových podmnožin množiny M.*

(V našem konkrétním případě bude M množina všech postelí v noclehárně, k bude 50 a j bude 35. Otázka a) odpovídá hledisku nocležníků a otázka b) hledisku správce.)

Je zřejmé, že i zde budou výsledné počty záviset pouze na číslech j, k a ne na dalších vlastnostech množiny M a jejích prvků.

Uspořádaným j-ticím navzájem různých prvků k-prvkové množiny se říká j-prvkové *variace* z k prvků a j-prvkovým podmnožinám k-prvkové množiny j-prvkové *kombinace* z k prvků.*)

Hledáme tedy

a) *počet $V(j, k)$ všech j-prvkových variací z k prvků,*

b) *počet $K(j, k)$ všech j-prvkových kombinací z k prvků.*

Jsou-li čísla j, k malá, můžeme i zde určit hledané počty tak, že systematicky sestavíme všechny j-prvkové variace nebo kombinace z k prvků a spočítáme je. Tak

---

*) Často se také ještě užívají starší termíny variace (nebo kombinace) j-té třídy z k prvků.

např. pro $k = 4$ a $j = 3$ bude mít množina $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ následující 4 tříprvkové kombinace:

$$\{m_1, m_2, m_3\} \ \{m_1, m_2, m_4\} \ \{m_1, m_3, m_4\} \ \{m_2, m_3, m_4\}$$

a následujících 24 tříprvkových variací:

$$
\begin{array}{llll}
(m_1, m_2, m_3) & (m_2, m_1, m_3) & (m_3, m_1, m_2) & (m_4, m_1, m_2) \\
(m_1, m_2, m_4) & (m_2, m_1, m_4) & (m_3, m_1, m_4) & (m_4, m_1, m_3) \\
(m_1, m_3, m_2) & (m_2, m_3, m_1) & (m_3, m_2, m_1) & (m_4, m_2, m_1) \\
(m_1, m_3, m_4) & (m_2, m_3, m_4) & (m_3, m_2, m_4) & (m_4, m_2, m_3) \\
(m_1, m_4, m_2) & (m_2, m_4, m_1) & (m_3, m_4, m_1) & (m_4, m_3, m_1) \\
(m_1, m_4, m_3) & (m_2, m_4, m_3) & (m_3, m_4, m_2) & (m_4, m_3, m_2)
\end{array}
$$

Zjistili jsme tak, že $K(3, 4) = 4$ a $V(3, 4) = 24$.

Soustřeďme se nyní na určení počtu j-prvkových variací z k prvků. Všechna pořadí k prvků rozdělme do skupin tak, že v každé skupině budou právě ta pořadí, která se shodují na počátečních j místech. Tyto skupiny budou ovšem disjunktní a bude jich právě $V(j, k)$, neboť počátečních j míst každého pořadí je nějaká j-prvková variace z k prvků a každá j-prvková variace z k prvků je počátkem nějakého pořadí k prvků. Je-li $j = k$, obsahuje každá skupina jediné pořadí a tedy $V(k, k) = P(k)$. (To je přirozené, neboť definice k-prvkové variace z k prvků se shoduje s definicí pořadí k prvků.) Je-li $j < k$, obsahuje každá skupina právě $P(k - j)$ pořadí lišících se uspořádáním zbylých $k - j$ prvků na koncových $k - j$ místech. V tomto případě je tedy $V(j, k) = \dfrac{P(k)}{P(k - j)}$. Vzorec pro počet pořadí již známe a po jednoduché úpravě docházíme k následující větě:

Pro přirozená čísla $j \leqq k$ platí

$$V(j, k) = k(k - 1) \ldots\ldots (k - j + 1).$$

I tento vzorec se snadno pamatuje, vpravo je součin j po sobě následujících přirozených čísel, z nichž největší je k*). Podle něho vychází $V(3, 4) = 4.3.2 = 24$, což se shoduje s výsledkem, který jsme získali předtím. Řešení úlohy a) o noclehárně je číslo $V(35, 50) = 50.49. \ldots \ldots .17.16$.

Zbývá vyřešit úlohu b) o kombinacích. Z každé j-prvkové kombinace (neuspořádané j-tice) utvoříme právě $P(j)$ j-prvkových variací (uspořádaných j-tic) tak, že její prvky postupně uspořádáme všemi možnými způsoby. Přitom každou j-prvkovou variaci z k prvků takto dostaneme z jediné j-prvkové kombinace z k prvků. Bude tedy $V(j, k) = P(j)\, K(j, k)$. Z vyjádření čísel $P(j)$ a $V(j, k)$ dostaneme tento vzorec:

Pro přirozená čísla $j \leqq k$ je

$$K(j, k) = \frac{k(k-1) \ldots (k-j+1)}{j(j-1) \ldots \quad 1}\,.$$

(V čitateli i ve jmenovateli je po j činitelích.)

Podle tohoto vzorce vyjde $K(3, 4) = \dfrac{4.3.2}{3.2.1} = 4$, což už víme. Řešením úlohy b) je číslo

$$K(35, 50) = \frac{50.49. \ldots .16}{35.34. \ldots . 1}\,.$$

Zatím jsme definovali a určili čísla $P(j)$, $V(j, k)$ a $K(j, k)$ jen pro přirozená čísla $j \leqq k$. Vzhledem k tomu, že každá množina obsahuje jedinou 0-prvkovou podmnožinu (prázdnou množinu), je přirozené položit $K(0, k) = V(0, k) = 1$ pro každé celé nezáporné číslo k.

*) Pro $j = 1$ je vpravo k.

Speciálně bude pak $P(0) = V(0, 0) = 1$. Nyní máme čísla $P(j)$, $V(j, k)$ a $K(j, k)$ určena pro všechna celá nezáporná čísla $j \leqq k$.

Všimněme si ještě, že pořadí prvků konečné množiny M si vzájemně jednoznačně odpovídají se zobrazeními množiny M na sebe, tzv. *permutacemi*. Tak např. pořadí $(m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_k})$ prvků $m_1, m_2, \dots, m_k$ odpovídá permutace, která pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ zobrazuje prvek m_i na prvek m_{p_i}. Proto se často pořadí a permutace ztotožňují a místo „pořadí" se říkává „permutace". V této knížce se permutacemi zabývat nebudeme.

Cvičení

1.1 Kolika způsoby lze rozmíchat hru 32 karet?

1.2 Konference se zúčastnilo 90 delegátů. Zvolili čtyřčlenný výbor (předseda, místopředseda, jednatel a pokladník) a také tříčlennou delegaci na sjezd. Určete, kolik bylo možností

a) pro volbu výboru,

b) pro volbu delegace.

1.3 Kolika způsoby se může 35 cestujících rozesadit v autobuse, kde je 35 míst?

1.4 Sešlo se pět přátel a navzájem si potřásli rukama. Určete počet potřesení.

1.5 V Československu je souvislá železniční síť s 3714 stanicemi. Zjistěte, kolik různých druhů jízdenek za obyčejné jízdné (bez slev a příplatků) by musela nechat natisknout železniční správa, kdyby na každé jízdence byly uvedeny dvě stanice: nejprve výchozí a pak cílová.

1.6 Ve sportce se ze 49 sportů tipuje 6. Kolik je všech možných tipů?

1.7 Kolik čtyřciferných čísel, v nichž se žádná číslice neopakuje, lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

1.8 Kolik slov lze vytvořit ze slova *koupelna* změnou pořadí písmen? (Nebereme ohled na to, zda vzniklá slova mají smysl.)

1.9 V rovině je dáno 7 bodů, z nichž žádnými třemi neprochází přímka a žádnými čtyřmi kružnice. Každými třemi z těchto bodů vedeme kružnici. Kolik kružnic dostaneme?

1.10 V prostoru je dána krychle $0 \leqq x \leqq 5$, $0 \leqq y \leqq 5$, $0 \leqq z \leqq 5$. Určete, kolik jejích bodů má všechny souřadnice celočíselné a zároveň neleží v žádné ze tří rovin $x = y$, $y = z$, $x = z$.

1.11 Na čtverečkovaném papíru zvolte dva průsečíky linek. Určete, kolika různými cestami se můžete dostat z jednoho do druhého tak, že půjdete po linkách jen nahoru nebo doprava.

1.12 Určete všechny dvojice nezáporných celých čísel $j \leqq k$, pro něž $V(j, k) = K(j, k)$.

1.13 Odhadněte, jak velká jsou čísla $V(35, 50)$ a $K(35, 50)$.

1.14 Odvoďte vzorce pro počet pořadí a variací jiným způsobem: Nejprve dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla $m \leqq n$ platí $V(m + 1, n + 1) = (n + 1)\, V(m, n)$. Toho pak využijte při důkazu vzorce pro $V(j, k)$. Z něho nakonec odvoďte vzorec pro $P(k)$.

1.15 Vzorec pro počet kombinací odvoďte jiným způsobem: Nejprve dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla $m < n$ platí

$$K(m + 1, n) = \frac{n - m}{m + 1} K(m, n).$$

1.16 Uvědomte si, že pro konečné množiny $M_1, M_2, \ldots, M_k$ platí: Počet prvků jejich sjednocení je roven součtu počtů jejich prvků, právě když jsou disjunktní.