Posloupnosti a řady

1. kapitola. Posloupnosti

In: Jiří Jarník (author): Posloupnosti a řady. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1979. pp. 5–26.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403936

1. kapitola

POSLOUPNOSTI

1.1. ÚVOD

S pojmy, jimiž se budeme v této knížce zabývat, jste se už určitě setkali. V populárních knížkách o matematice jste se seznámili s historkou o odměně vynálezci šachové hry nebo o Achillovi a želvě či o tom, jak mladý chlapec (a později slavný vědec) Gauss udivil svého učitele rychlým sečtením všech přirozených čísel od jedné do sta. Možná, že mnohem dříve vás nad narozeninovým dortem napadlo, že kdybyste první den snědli polovinu dortu a pak každý den vždy polovinu toho, co den předtím, vydržel by vám dort „navěky".

Ve škole jste se seznámili nejprve s přirozenými čísly. Brzy jste si snad položili otázku, zda sudých (kladných) čísel je „méně než všech přirozených čísel" či zda je jich „stejně mnoho". Možná, že jste došli k závěru, že sudých čísel je „dvakrát méně", neboť z množiny přirozených čísel musím každé druhé vynechat, abych dostal množinu všech sudých (kladných) čísel. Ale možná, že vás napadlo napsat následující schéma:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$
$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots .$$

Z něho jste usoudili, že sudých čísel není méně (a ovšem ani více) než všech přirozených. Tento závěr je správnější (nebo aspoň bližší matematickému pohledu na tento problém), ale o to nám teď nejde. Důležité je, že jste dospěli již jen na krůček od matematické definice posloupnosti: každému přirozenému číslu (označme je třeba n) jste přiřadili jeho dvojnásobek (číslo $2n$). Jinými slovy, sestrojili jste množinu uspořádaných dvojic čísel $[n, 2n]$. To je způsob, kterým se postupuje i na střední škole, když se hovoří o aritmetické a geometrické posloupnosti. Stejně budeme postupovat i my. Předtím však probereme několik příkladů, které nás přesvědčí, že pojmy, které zavedeme, vycházejí z praktických úloh našeho života.

Příklad 1. Pustíme-li z velké výšky kámen, začne padat volným pádem. To znamená, že jeho rychlost v (m/s) rovnoměrně roste: označíme-li okamžik, kdy jsme pustili kámen, znakem t_0, je rychlost kamene v okamžiku t rovna

$$v = g(t - t_0),$$

kde g je gravitační konstanta. Dráha, kterou kámen urazí, je

$$s = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2.$$

Ptejme se, jakou dráhu urazí kámen za první, druhou, třetí, ... sekundu. Tato dráha bude*)

$$s_1 = \frac{1}{2} g \quad \text{za první sekundu,}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} g[2^2 - 1^2] = \frac{3}{2} g \quad \text{za druhou sekundu,}$$

$$s_3 = \frac{1}{2} g[3^2 - 2^2] = \frac{5}{2} g \quad \text{za třetí sekundu;}$$

---

*) V dalším uvažujeme již jen číselné hodnoty bez ohledu na rozměr příslušných fyzikálních veličin.

obecně dráha za n-tou sekundu bude

$$s_n = \frac{1}{2} g[n^2 - (n-1)^2] = \frac{2n-1}{2} g .$$

Dostali jsme čísla $\frac{1}{2} g, \frac{3}{2} g, \frac{5}{2} g, \ldots, \frac{2n-1}{2} g, \ldots$ či správněji dvojice čísel $\left[1, \frac{1}{2} g\right], \left[2, \frac{3}{2} g\right], \left[3, \frac{5}{2} g\right], \ldots,$ $\left[n, \frac{2n-1}{2} g\right], \ldots$. To je tzv. *aritmetická posloupnost*, kterou mnozí z vás znají ze školy. Její charakteristickou vlastností je to, že rozdíl kteréhokoliv jejího členu a členu předchozího je stálý, nemění se:

$$s_2 - s_1 = s_3 - s_2 = \ldots = s_n - s_{n-1} = g .$$

Příklad 2. Biologové vědí, že včelí samička se rodí z oplodněného vajíčka, tj. má matku i otce, zatímco včelí samec (trubec) se rodí z vajíčka neoplodněného: má tedy jen jednoho rodiče (matku). Otázka zní, kolik má trubec prarodičů, praprarodičů atd. Abychom si problém zjednodušili, budeme předpokládat, že ve zkoumaných generacích se žádný jedinec nevyskytuje dvakrát (což ovšem v přírodě nemusí být splněno). Označme $x_0 = 1$ (jeden trubec v „nulté" generaci), $x_1 = 1$ (jen matka v „první" — měli bychom spíše říkat v minus první — generaci); x_2 bude počet prarodičů, x_3 počet praprarodičů atd. Protože trubcova matka má oba rodiče, je $x_2 = 2$. Z toho je jeden trubec, jedna samička, takže zřejmě $x_3 = 1 + 2 = 3$. Tak bychom mohli postupovat dál. Pokusme se však odhalit obecné pravidlo. Předpokládejme, že známe $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}$. Potom každý člen $(n-1)$-ní generace má matku; otce mají jen samičky. Kolik však je samiček v této generaci? Zřejmě přesně tolik, kolik je všech členů $(n - 2)$-hé generace (neboť každý z nich má matku — samičku). Musíme tedy k x_{n-1} matkám přidat ještě x_{n-2} otců. Odtud

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Protože známe první dvě čísla ($x_0 = x_1 = 1$), umíme vypočítat postupně i všechna další. Čísla x_n (či dvojice $[n, x_n]$) tvoří tzv. *Fibonacciho posloupnost.*

Příklad 3. Staňme se teď na chvíli zákazníky banky, která zhodnocuje vklady složeným úrokováním s roční úrokovou mírou p procent. Úroky připisuje jednou ročně. Vložíme-li do této banky 1 Kčs, dostaneme za rok částku $v_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ korun. Jiná banka má stejnou roční úrokovou míru, ale úroky připisuje dvakrát ročně. Vložíme-li 1 Kčs, budeme mít po prvním pololetí vklad $\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2}\right)$ korun a po druhém pololetí, tj. po roce, vklad $v_2 = \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2} =$ $= \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2}\right)^2$ korun. Zvolíte-li si nějakou konkrétní úrokovou míru (třeba $p = 4$), snadno vypočtete, že v druhé bance vzroste vklad o větší částku. Můžete stejný postup zkusit při počtu úrokovacích období za rok rovném třem, čtyřem atd. Dostanete částku $v_3 =$ $= \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{3}\right)^3$, $v_4 = \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{4}\right)^4$ atd. Přitom platí (při daném kladném p) $v_1 < v_2 < v_3 < v_4$. Obecně, připisuje-li banka úrok n-krát za rok, vzroste vklad 1 Kčs na konci roku na částku $v_n = \left(1 + \dfrac{p}{100n}\right)^n$ korun. Máme zde opět množinu dvojic čísel

$$\left[1, 1 + \frac{p}{100}\right], \left[2, \left(1 + \frac{p}{200}\right)^2\right], \dots, \left[n, \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n\right], \dots.$$

Jsme-li trochu chtiví peněz, určitě nás napadne hledat banku, která by byla ochotna připisovat úrok co nejčastěji. Snad bychom mohli z jedné koruny za rok získat sto, tisíc nebo milión! Ale netěšte se. Brzy ukážeme (viz příkl. 18), že i kdybychom našli banku, v níž by nějaký stroj připisoval úroky prakticky „spojitě", tj. v každém okamžiku, nestoupla by částka na konci roku nad určitou mez. Tato mez závisí ovšem na konkrétní hodnotě úrokové míry p. Kdyby bylo $p = 100$ (tj. 100 % úroková míra), vzrostl by vklad za rok vždy na méně než svůj e-násobek, kde e = 2,718... je základ přirozených logaritmů.

Ve všech třech příkladech jsme vytvořili jisté dvojice čísel $[n, s_n]$, $[n, x_n]$, $[n, v_n]$ čili jistá nekonečná seskupení čísel

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots;$$

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots;$$

$$v_1, v_2, \dots, v_n, \dots!$$

(Používám zde slova seskupení a nikoliv množina, protože množina je dána svými prvky, zatímco zde jednak záleží na pořadí čísel, jednak se některá čísla mohou opakovat — dokonce v celém „nekonečném seskupení" může být jen konečný počet různých čísel.) Takové seskupení čísel budeme nazývat posloupností. Abychom mohli tento pojem přesně definovat, připomeňme si pojem zobrazení, s nímž se většina čtenářů ve škole setkala. Nechť jsou dány dvě množiny M, H. Připomeňme, že *kartézským součinem* $M \times H$ nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in M$, $y \in H$. Zobrazením z množiny M do množiny H nazýváme podmnožinu F kartézského součinu $M \times H$, splňující tuto podmínku: je-li $x \in M$, $y_1 \in H$, $y_2 \in H$, $(x, y_1) \in F$, $(x, y_2) \in F$, pak $y_1 =$ $= y_2$.

Jinými slovy, zobrazení je určitý předpis, který prvku množiny M přiřazuje prvek množiny H. Přitom se může stát, že některým prvkům množiny M není přiřazen žádný prvek množiny H, ale nesmí se stát, že by nějakému prvku množiny M byly přiřazeny dva či více různých prvků množiny H.

Vynecháme-li z množiny M ty prvky, kterým není přiřazen prvek množiny H (tj. ty prvky $x \in M$, že pro žádné $y \in H$ neplatí $(x, y) \in F$), dostaneme množinu D, kterou budeme nazývat *definičním oborem zobrazení* F. Je-li $D = M$, hovoříme o zobrazení množiny M (místo zobrazení z množiny M). Pro každé $x \in D$ existuje tedy právě jedno takové $y \in H$, že $(x, y) \in F$.

1.2. DEFINICE POSLOUPNOSTI

Definice 1. Zobrazení množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel nazýváme *posloupností*.

Pojem, který jsme právě definovali, bychom mohli (či měli) nazývat přesněji číselnou (nebo reálnou) posloupností. V matematice se totiž setkáváme i s posloupnostmi jiných objektů, třeba funkcí, množin, rovnic apod. Na závěr naší knížky se o některých takových případech zmíníme. Do té doby však budeme hovořit prostě o posloupnosti.

Podstatným rysem naší definice je požadavek, aby definičním oborem zobrazení byla množina přirozených čísel $\{1, 2, 3, \ldots\}$. (Mluví se v ní o zobrazení množiny přirozených čísel, nikoliv o zobrazení z této množiny.) I zde bychom mohli sice připustit, aby definičním oborem byl tzv. úsek množiny přirozených čísel, tj. konečná množina $\{1, 2, \ldots, N\}$, kde N je přirozené číslo. Museli bychom pak rozlišovat mezi posloupnostmi konečnými a nekonečnými. Avšak vlastnosti a jevy (procesy), se kterými se chceme v naší knížce seznámit, lze studovat jen na nekonečných posloupnostech. Proto budeme posloupnostmi rozumět jen ta zobrazení, jejichž definiční obor je množina všech přirozených čísel.

Jak víte, hodnotu zobrazení F pro prvek $x \in D$, tj. číslo y takové, že $(x, y) \in F$, značíme obyčejně $F(x)$. Známe-li $F(x)$ pro každé $x \in D$, je zobrazení jednoznačně určeno. Např. zápis $F(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ určuje zobrazení, pro něž D i H je množina reálných čísel; jak víte, nazývá se takové zobrazení *reálná funkce.* Podobného způsobu budeme užívat při zapisování posloupností. Je však zvykem používat pro prvky z definičního oboru (tj. přirozená čísla) jiná písmena než x, y, z (nejčastěji n, k, i, j, m, p aj.) a psát je místo do závorky ve formě indexu: místo $a(n)$, $S(k)$, $t(i)$ píšeme tedy a_n, S_k, t_i apod. Čísla a_n nazýváme obyčejně *členy* nebo *prvky posloupnosti*, nikoliv hodnoty: mluvíme o prvním, druhém, ..., n-tém členu.

Posloupnost, jejímž obecným (n-tým) členem je a_n, zapisujeme nejčastěji ve tvaru $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}_1^{\infty}$. Obecný index (který hraje úlohu nezávisle proměnné) můžeme ovšem označit i jiným písmenem, takže můžeme psát např. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_r\}_1^{\infty}$. Často píšeme do složených závorek přímo výraz definující obecný člen posloupnosti, např. $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ apod. Obsahuje-li výraz ve složené závorce více obecných čísel (vyjádřených písmeny), je zvlášť důležité udat, které z nich je obecným indexem posloupnosti.

Např. posloupnost $\left\{\frac{k^2}{r+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ má členy (při $r \neq -1$)

$$\frac{1}{r+1}, \frac{4}{r+1}, \frac{9}{r+1}, \ldots,$$

zatímco posloupnost $\left\{\frac{k^2}{r+1}\right\}_{r=1}^{\infty}$ má členy

$$\frac{k^2}{2}, \frac{k^2}{3}, \frac{k^2}{4}, \ldots.$$

Pro stručnost se při zápisu posloupností používá i jiných licencí či úlev. S jednou z nich jsme se již setkali v příkladu 2: nedodržuje se totiž vždy doslova požadavek definice, že definiční obor posloupnosti je množina přirozených čísel. Z různých důvodů se setkáme s posloupnostmi, jejichž první člen je označen třeba x_0 (srov. příkl. 2) nebo a_{-2} nebo ω_4 apod. Takové posloupnosti můžeme pak zapsat jako

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{a_k\}_{k=-2}^{\infty}, \quad \{\omega_j\}_{j=4}^{\infty} \quad \text{apod.}$$

Řečeno zcela přesně, jde např. v posledním případě o posloupnost $\{\omega_j^*\}_{j=1}^{\infty}$, kde $\omega_j^* = \omega_{j+3}$, tedy $\omega_1^* = \omega_4$, $\omega_2^* = \omega_5$ atd., takže odchylka od definice je jenom formální.

Druhou nedůslednost, které se dopouštíme při zápisu posloupnosti, ukážeme na příkladu. Napíšeme-li $\left\{\frac{n}{n^2 - 4n + 3}\right\}_{n=1}^{\infty}$, nejde v pravém slova smyslu o posloupnost, neboť výraz ve složené závorce není definován pro $n = 1$ a $n = 3$. Při zkoumání některých důležitých vlastností posloupností však nevadí, nejsou-li určeny všechny členy posloupnosti. Počet neznámých (nedefinovaných) členů však musí být konečný. To znamená, že počínaje od jistého přirozeného čísla (může to být od čtvrtého členu nebo třeba od milióntého) musíme již znát všechny členy. Aby nedošlo k nedorozumění, učiníme tuto úmluvu: řekneme-li např. „posloupnost $\left\{\frac{n}{n^2 - 4n + 3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastnost V", znamená to: „Vlastnost V má každá posloupnost $\{a_n\}_1^{\infty}$, pro niž platí $a_n = \frac{n}{n^2 - 4n + 3}$ pro všechna přirozená n různá od 1, 3 (a čísla a_1, a_3 jsou libovolná)."

Jistě jste si uvědomili, že každá posloupnost, tak jak jsme ji definovali, je reálná funkce. Můžeme tedy sestrojit její *graf*. Protože však definičním oborem posloupnosti je množina přirozených čísel, je graf posloupnosti množina izolovaných bodů, nikoliv souvislá křivka, jak tomu bylo ve většině případů, s nimiž jste se dosud setkali. Často proto zobrazujeme posloupnosti jen na jedné číselné ose. Za chvíli si to ukážeme na příkladech a zároveň upozorníme na nebezpečí, které se v tomto způsobu skrývá.

Uvedeme nyní několik příkladů posloupností.

Příklad 4. Připomeňme si *aritmetickou posloupnost*, kterou již asi znáte ze školy. Jsou-li a_1, d reálná čísla, nazýváme posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$, kde $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$, aritmetickou posloupností. Snadno se přesvědčíte, že pro všechna přirozená n platí $a_{n+1} - a_n = d$. Číslo d se nazývá diference aritmetické posloupnosti. Jednoduchý vzorec platí i pro součet prvních k členů této posloupnosti:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k =$$

$$= \frac{1}{2}\,k(a_1 + a_k) = ka_1 + \frac{1}{2}\,k(k - 1)\,d\,.$$

(Zopakujte si jeho důkaz indukcí!)

Příklad 5. Druhou známou posloupností je *geometrická posloupnost*. Jsou-li b_1, q reálná čísla, $b_1 q \neq 0$, nazýváme posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, $b_n = b_1 q^{n-1}$ geometrickou posloupností. Pro všechna přirozená n platí vztah $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti. Pro součet prvních k členů geometrické posloupnosti platí vzorec

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k = b_1\,\frac{1 - q^k}{1 - q}\,.$$

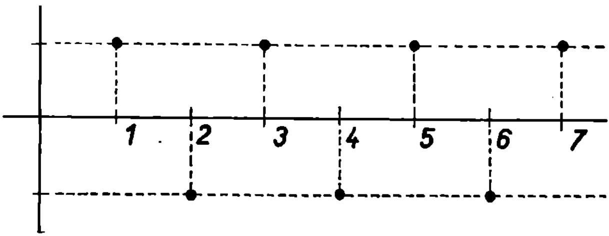
(Důkaz můžete opět provést indukcí.)

Důležitý je případ geometrické posloupnosti s kvocientem -1. Je-li ještě $b_1 = 1$, dostáváme posloupnost $\{(-1)^{n-1}\}_{n=1}^\infty$.

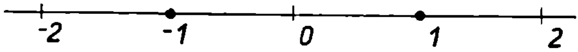
Někdy se setkáte s tím, že z posloupnosti je zapsáno jen několik (konečný počet) prvních členů, např. 1, —1, 1, —1, 1, … . To je jistá nedůslednost, vznikající z pohodlnosti. Jde o posloupnost, jejíž první, třetí a pátý člen je roven 1, druhý a čtvrtý —1. Ovšem pouhá znalost prvních pěti (nebo třeba miliónu) členů posloupnosti mi neumožňuje určit další členy. Mohu sice hádat, že pisatel měl nejspíše na mysli posloupnost, jejíž všechny liché členy jsou 1 a sudé —1, tj. posloupnost $b_n = \{(-1)^{n-1}\}_1^\infty$, ale je to skutečně jen hádání. Právě tak může jít třeba o posloupnost $\{b_n^*\}_1^\infty$, $b_n^* = (-1)^{n-1}$ pro $n = 1, 2, \ldots, 5$, $b_n^* = 0$ pro $n > 5$ nebo třeba $\{b_n^0\}_1^\infty$, $b_n^0 = (-1)^{n-1}$ pro $n = 1, 2, \ldots, 167$, $b_n^0 = \dfrac{n}{n^2+1}$ pro $n > 167$. I námitku, že první možnost je správná, protože k zápisu všech členů posloupnosti byl použit jediný výraz $(-1)^{n-1}$, lze vyvrátit. Např. členy poslední posloupnosti $\{b_n^0\}_1^\infty$ lze zapsat ve tvaru

$$b_n^0 = \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-1} + \frac{n}{n^2+1}\right] + \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-1} - \frac{n}{n^2+1}\right]\frac{|167{,}5 - n|}{167{,}5 - n}.$$

Načrtneme-li graf posloupnosti $\{b_n\}_1^\infty$, dostaneme obr. 1; načrtneme-li členy posloupnosti na jediné číselné ose, vznikne zcela odlišný obr. 2. Vidíme, že v druhém případě jsme ve skutečnosti zobrazili množinu členů



Obr. 1



Obr. 2

posloupnosti, tj. množinu čísel, která se (alespoň jednou) vyskytnou jako členy dané posloupnosti. Tato množina ovšem může být konečná. Navíc různé posloupnosti mohou mít stejnou množinu členů. Např. posloupnost $\{b'_n\}_1^\infty$, jejíž n-tý člen je $b'_n = (-1)^n$, má tutéž množinu členů jako $\{b_n\}_1^\infty$. Přesto nám i zobrazení množiny členů posloupnosti často poskytne cennou informaci o chování posloupnosti.

Příklad 6. Položme $c_1 = 1$, $c_n = c_{n-1} + 2n - 1$ pro přirozené $n > 1$. Tím je definována posloupnost $\{c_n\}_1^\infty$: každý její člen můžeme vypočítat, známe-li člen předcházející. To je tzv. *rekurentní definice posloupnosti.* (Rekurentním způsobem byla definována i Fibonacciho posloupnost v příkladu 2.) Často můžeme po vypočtení několika prvních členů odhadnout, jak vypadá obecný vzorec pro c_n, jindy je to však obtížné či nemožné. V našem případě je $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 9$, $c_4 = 16$. Platí $c_n = n^2$? Dokážeme to úplnou indukcí: pro $n = 1$ vztah platí; platí-li $c_n = n^2$, je $c_{n+1} = n^2 + 2(n + 1) - 1 = (n + 1)^2$. Platí tedy skutečně $c_n = n^2$ pro všechna přirozená čísla n.

Příklad 7. Seřaďme prvočísla podle velikosti, počínajíc nejmenším, a označme n-té prvočíslo v tomto uspořádání p_n. Je známo, že prvočísel je nekonečně mnoho, takže $\{p_n\}_1^\infty$ je posloupnost. Členy této posloupnosti neumíme vyjádřit ani analyticky (tj. výrazem závisejícím na indexu n), ani rekurentně (tj. pomocí předcházejících členů).

Příklad 8. Uveďme důležitý a zajímavý příklad posloupnosti, jejíž členy jsou všechna kladná racionální čísla. Uvažujme schéma

$$
\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[dl] & \frac{1}{4} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{2}{1} \arrow[urr] & \frac{2}{2} \arrow[dl] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{4} & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[uurrr] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

obsahující zřejmě všechna kladná racionální čísla (každé z nich dokonce nekonečně mnohokrát). Postupujeme-li podle naznačených šipek, seřadí se napsaná čísla do posloupnosti; jejích prvních deset členů je

$$1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 1,\ 3,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ 4.$$

Pokusme se nyní úvahu zpřesnit. Všimněme si nejprve, že každý šikmý úsek našeho schématu, směřující vlevo dolů, obsahuje všechna kladná racionální čísla s pevně daným součtem čitatele a jmenovatele; vpravo nahoře je číslo s čitatelem rovným jedné. Šikmý úsek začínající číslem $\frac{1}{r}$ obsahuje právě r čísel.

Racionální číslo $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou přirozená čísla, leží v našem schématu na p-tém místě v $(p + q - 1)$-vém šikmém úseku (r-tý šikmý úsek začíná číslem $\frac{1}{r}$, takže součet čitatele a jmenovatele každého čísla v tomto úseku je $r + 1$). Seřadíme-li čísla v našem schématu naznačeným způsobem a označíme vzniklou posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$, je zřejmě $\frac{p}{q} = r_n$, kde $n = 1 + 2 + \ldots + (p + q - 2) + p$. Součet $1 + 2 + \ldots + (p + q - 2)$ snadno vypočteme podle vzorce pro součet konečného počtu členů aritmetické řady (srov. příkl. 4):

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2} k(k + 1) \tag{1}$$

pro každé přirozené číslo k, takže

$$n = \frac{1}{2} (p + q - 2)(p + q - 1) + p. \tag{2}$$

Tím jsme dokázali, že každé kladné racionální číslo $\frac{p}{q}$ je členem sestrojené posloupnosti.

Ptejme se nyní naopak, jaké racionální číslo $\frac{p}{q}$ je n-tým členem posloupnosti $\{r_n\}_1^\infty$. Protože $p \geq 1$, $q \geq 1$, je zřejmě

$$1 + 2 + \ldots + (p + q - 2) + 1 \leq n < 1 + 2 + \ldots$$
$$\ldots + (p + q - 2) + (p + q - 1) + 1.$$

Označíme-li pro stručnost $p + q - 1 = s$ a použijeme vzorce (1), dostaneme odtud

$$\frac{1}{2}s(s-1)+1 \leq n < \frac{1}{2}s(s+1)+1$$

čili

$$\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}(8n-7) < \left(s+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Protože zde máme nerovnosti mezi kladnými čísly, můžeme místo toho psát

$$s-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{8n-7} < s+\frac{1}{2}$$

nebo

$$s \leq \frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7}) < s+1.$$

Protože s je celé číslo, je těmito nerovnostmi jednoznačně určeno. Obyčejně se píše

$$s = \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7})\right], \tag{3}$$

kde hranatá závorka označuje tzv. *celou část čísla*, tj. největší celé číslo, které není větší než číslo v závorce. Nyní již snadno vypočteme ze vzorce (2)

$$p = n - \frac{1}{2}s(s-1),$$

$$q = s+1-p = 1-n+\frac{1}{2}s(s+1),$$

odkud

$$r_n = \frac{n-\frac{1}{2}s(s-1)}{1-n+\frac{1}{2}s(s+1)}.$$

Protože číslo s je číslem n jednoznačně určeno (viz vzorec (3)), umíme vypočítat n-tý člen posloupnosti $\{r_n\}_1^\infty$ pro libovolné přirozené n. Je tedy posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ jednoznačně určena, a jak jsme již dokázali, obsahuje všechna kladná racionální čísla.

1.3. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ

Zaveďme nyní některé elementární vlastnosti posloupností.

Definice 2. Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje takové číslo K, že platí $|a_n| \leq K$ pro všechna přirozená n.

Posloupnosti z příkladů 1, 2, 4 (pokud $d \neq 0$), 6, 7, 8 nejsou ohraničené; naproti tomu posloupnost z příkladu 3 je ohraničená (srov. příkl. 18). Geometrická posloupnost z příkladu 5 je ohraničená, jestliže $|q| \leq 1$; za číslo K z definice 2 můžeme vzít číslo $|b_1|$ (nebo jakékoliv větší číslo).

Příklad 9. Nechť P, Q jsou nenulové mnohočleny po řadě stupně k, l a nechť $Q(n) \neq 0$ pro všechna přirozená čísla n. Položme $r_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$. Pak platí: je-li $k \leq l$, je posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ ohraničená. Je-li $k > l$, není posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ ohraničená.

Důkaz. Položme

$$P(x) = a_0x^k + \ldots + a_k, \qquad a_0 \neq 0,$$

$$Q(x) = b_0x^l + \ldots + b_l, \qquad b_0 \neq 0.$$

Potom je

$$|r_n| = \left|\frac{a_0 n^k + \ldots + a_k}{b_0 n^l + \ldots + b_l}\right| = \frac{\left|a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}\right|}{\left|b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_l}{n^l}\right|}\, n^{k-l} \leq$$

$$\leq \frac{|a_0| + \left|\frac{a_1}{n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_k}{n^k}\right|}{\left||b_0| - \left|\frac{b_1}{n}\right| - \ldots - \left|\frac{b_l}{n^l}\right|\right|}\, n^{k-l}$$

podle trojúhelníkové nerovnosti.*) Odtud plyne snadno

$$|r_n| \leq \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|}{\left||b_0| - \frac{1}{n}(|b_1| + \ldots + |b_l|)\right|}\, n^{k-l}.$$

Je zřejmé, že pro dostatečně velká n nebude jmenovatel menší např. než $\frac{1}{2}|b_0|$. K tomu stačí, aby platilo

$$|b_0| - \frac{1}{n}(|b_1| + \ldots + |b_l|) \geq \frac{1}{2}|b_0|$$

čili

$$\frac{1}{2}|b_0| \geq \frac{1}{n}(|b_1| + \ldots + |b_l|),$$

$$n \geq \frac{2(|b_1| + \ldots + |b_l|)}{|b_0|} = b.$$

---

*) Trojúhelníkovou nerovnost zde užíváme v méně obvyklém tvaru $|a - b| \geq ||a| - |b||$. Její důkaz je snadný: stačí položit $c = a - b$ a dosadit do „obyčejné" trojúhelníkové nerovnosti $|c + b| \leq |c| + |b|$. K dokončení důkazu je pak již jen třeba zaměnit a a b a uvědomit si, že pro každé reálné číslo d platí $|d| = |-d|$.

Položíme-li

$$R = \max_{n < b} |r_n|,$$

ověříme snadno, že platí

$$|r_n| \leq \max\left(R, \frac{2}{|b_0|}(|a_0| + \ldots + |a_k|)\, n^{k-l}\right)$$

pro všechna přirozená n. Je-li $k \leq l$, je $n^{k-l} \leq 1$ a posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ je zřejmě ohraničená. Naopak, je-li $k > l$, dostáváme podobně

$$|r_n| \geq n^{k-l} \frac{\left||a_0| - \frac{1}{n}(|a_1| + \ldots + |a_k|)\right|}{|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_l|}$$

a pro $n \geq 2 \dfrac{|a_1| + \ldots + |a_k|}{|a_0|}$ platí

$$|r_n| \geq n^{k-l} \frac{|a_0|}{2(|b_0| + \ldots + |b_l|)} > n \frac{|a_0|}{3(|b_0| + \ldots + |b_l|)}.$$

Je-li nyní K reálné číslo, dostáváme snadno, že pro

$$n \geq \max\left[\frac{3(|b_0| + \ldots + |b_l|)\,K}{|a_0|}, \frac{2(|a_1| + \ldots + |a_k|)}{|a_0|}\right]$$

je $|r_n| > K$.
Ke každému reálnému číslu K tedy existuje přirozené n (dokonce nekonečně mnoho takových n), že $|r_n| > K$, a tedy posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ není ohraničená.

Poznámka. Při vyšetřování vlastností posloupností se často užívají také pojmy *„posloupnost ohraničená zdola"* a *„posloupnost ohraničená shora"*. Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená zdola, jestliže existuje číslo K takové, že platí $a_n \geq K$ pro všechna přirozená n. Srovnej úlohu 1 na str. 26.

Definice 3. Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá *rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající)*, jestliže pro všechna přirozená n platí nerovnost $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$, $a_n \geq a_{n+1}$, $a_n \leq a_{n+1}$). Všechny tyto čtyři druhy posloupností nazýváme posloupnosti *monotónní*; pro ty, které splňují jednu z ostrých nerovností, používáme názvu *ryze monotónní.*

Posloupnosti z příkl. 1, 2, 3, 6, 7 jsou ryze monotónní, a to rostoucí (pro příkl. 3 to dokážeme v příkl. 11); aritmetická posloupnost z příkl. 4 je rostoucí při $d > 0$, klesající při $d < 0$; geometrická posloupnost z příkl. 5 je monotónní při $q > 0$ (rostoucí při $q > 1$, klesající při $q < 1$) a není monotónní při $q < 0$. Posloupnost z příkladu 8 není monotónní (přesvědčte se o tom).

Příklad 10. Posloupnost $\{c_k\}_1^\infty = \left\{\dfrac{k}{k^2+1}\right\}_1^\infty$ je klesající.

Důkaz. Ukážeme, že rozdíl $c_{k+1} - c_k$ je záporný. Je

$$c_{k+1} - c_k = \frac{k+1}{(k+1)^2+1} - \frac{k}{k^2+1} =$$

$$= \frac{(k+1)(k^2+1) - k(k^2+2k+2)}{[(k+1)^2+1](k^2+1)} =$$

$$= \frac{k^3+k^2+k+1-k^3-2k^2-2k}{[(k+1)^2+1](k^2+1)} =$$

$$= \frac{1-k-k^2}{[(k+1)^2+1](k^2+1)}$$

a tento výraz je záporný pro všechna přirozená k.

Další dva příklady jsou velmi důležité.

Příklad 11. Posloupnost $\{e_n\}_1^\infty$, $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, je rostoucí.

Důkaz. Podle binomické věty můžeme psát

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k}, \quad e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1)^{-k},$$

tedy

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1)\, n^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

$$e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} (n+1)\, n \dots (n-k+2)\, (n+1)^{-k} >$$

$$> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

(v posledním součtu jsme vynechali kladný sčítanec při $k = n + 1$). Pro každé přirozené j platí však $1 - \frac{j}{n} < 1 - \frac{j}{n+1}$, takže žádný sčítanec součtu pro e_n není větší než odpovídající sčítanec (se stejným k) upraveného součtu pro e_{n+1}. Platí tedy

$$e_n < e_{n+1}$$

a posloupnost $\{e_n\}_1^\infty$ je rostoucí.

Příklad 12. Posloupnost $\{e_n^*\}_1^\infty$, $e_n^* = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ je klesající.

Důkaz. Protože všechny členy posloupnosti jsou kladné (a tedy nenulové), můžeme vyšetřovat podíl e_n^*/e_{n+1}^* pro libovolné přirozené n. Platí

$$\frac{e_n^*}{e_{n+1}^*} = \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2}.$$

Opět použijeme binomickou větu na člen v hranaté závorce. Všechny sčítance binomického rozvoje jsou kladné. Vynecháním všech až na první dva tedy celý výraz zmenšíme:

$$\frac{e_n^*}{e_{n+1}^*} = \frac{n}{n+1}\left\{1 + \binom{n+2}{1}\frac{1}{n(n+2)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \binom{n+2}{n-1}\left[\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1} + \left[\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2}\right\} >$$

$$> \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1\,.$$

Je tedy skutečně $e_n^* > e_{n+1}^*$ a posloupnost je klesající.

Úlohy

1.* Na základě poznámky na str. 22 vyslovte analogickou definici posloupnosti ohraničené shora.

Dokažte tvrzení 2—5.

2. Posloupnost je ohraničená právě tehdy, je-li současně ohraničená shora a ohraničená zdola.
3. Je-li posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ ohraničená zdola, je posloupnost $\{-a_n\}_1^\infty$ ohraničená shora.
4. Každá nerostoucí posloupnost je ohraničená shora, každá neklesající posloupnost je ohraničená zdola.
5. Existuje-li takové číslo $\alpha > 0$, že pro všechna přirozená n platí $|a_n| \geq \alpha$, je posloupnost $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_1^\infty$ ohraničená.

6.* Udejte příklad posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, která není ohraničená, a ani $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_1^\infty$ není ohraničená, a posloupnosti $\{b_n\}_1^\infty$, která je ohraničená, a také $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}_1^\infty$ je ohraničená.