Rovinné grafy

VI. kapitola. Problém čtyř barev

In: Bohdan Zelinka (author): Rovinné grafy. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 79–91.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403910

VI. KAPITOLA

PROBLÉM ČTYŘ BAREV

S rovinnými grafy souvisí jistý problém, který bez nadsázky můžeme označit jako nejproslulejší problém teorie grafů a jeden z nejproslulejších problémů matematiky vůbec. Je to problém čtyř barev.

Problém čtyř barev vznikl někdy v polovině minulého století. Není zcela jasno, kdo první přišel na tento problém. V různých publikacích se uvádějí různá jména autorů problému čtyř barev; zde tedy se otázkou autorství tohoto problému nebudeme zabývat a žádné jméno neuvedeme. Je jen třeba poznamenat, že v době vzniku tohoto problému neexistovala ještě teorie grafů jako samostatná vědecká disciplína; šlo tedy spíše o to, čemu říkáme rekreační problém. V původním znění problému čtyř barev se tedy nemluví o grafech, nýbrž o mapách. Jak známo, na politických mapách se území jednotlivých států vybarvují různými barvami, přičemž se dbá na to, aby státy, které spolu sousedí, nebyly vybarveny toutéž barvou. Představme si nějakou takovou mapu, ať už na glóbu nebo na listu papíru. Vůbec nám nebude záležet na tom, zda odpovídá skutečnému politickému rozdělení zeměkoule; můžeme si představovat, že jde o státy na některé jiné planetě osídlené rozumnými bytostmi ve fantazii nějakého spisovatele vědeckofantastických knih. Tuto mapu bychom měli vybarvit žádaným způsobem. Kolik různých barev budeme potřebovat k tomu, abychom takto mohli vybarvit libovolnou mapu? (Státy, které spolu hraničí jen v jednom bodě, nepokládáme za sousedící a můžeme je barvit stejnou barvou. V Evropě bychom příklad takovýchto států nenašli, ale existují takové dvojice mezi státy USA, například Arizona a Colorado.)

Takovouto mapu můžeme považovat za rovinnou representaci (případně za representaci na kulové ploše, pokud jde o glóbus) nějakého rovinného grafu G. Uzlovými body této representace budou body, v nichž se stýkají alespoň tři hranice; tyto body odpovídají uzlům grafu G. Oblouky representace budou úseky hranic, které spojují dva uzlové body a neobsahují žádný uzlový bod jako svůj vnitřní bod. Oblastmi této representace budou území jednotlivých států, případně i moře. Vyloučíme případy, kdy území některého státu sestává z několika částí oddělených mořem nebo územím jiného státu (například USA s Aljaškou), dále ostrovní státy a státy obklopené ze všech stran územím jediného jiného státu (San Marino, Vatikán, Lesotho). Ostrovní státy a státy typu San Marina vylučujeme proto, abychom skutečně dostali rovinnou representaci grafu. Při samotném barvení nám tyto státy nebudou dělat potíže; ostrovní stát lze vybarvit libovolnou barvou jinou než ta, kterou je vybarveno moře, a podobně to lze provést i se státy obklopenými územím jediného jiného státu. Pokud bychom připouštěli státy sestávající z několika oddělených území, dostali bychom určité zobecnění problému čtyř barev, o kterém se ještě zmíníme.

Graf G, jehož representací $\mathscr{R}(G)$ je naše mapa, zřejmě neobsahuje acyklické hrany; takováto hrana by představovala úsek hranice jistého státu se sebou samým, což v zeměpise nemá smysl. Hranice každé oblasti je kružnice nebo se skládá z několika kružnic (příkladem oblasti, jejíž hranice se skládá z několika kružnic, by na zeměkouli bylo moře).

Můžeme tedy sestrojit k této representaci duální graf, jak jsme o tom mluvili v kapitole IV. V tomto grafu uzly jsou jednotlivé státy a dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, sousedí-li spolu odpovídající státy. Přesně vzato, může to být vlastně multigraf, jak bylo také v kapitole IV poznamenáno. Nevyloučili jsme totiž možnost, že v původním grafu (mapě) existují dvojice oblastí takové, že existují dvě různé hrany, které jsou s oběma incidentní. Na zeměkouli takovéto dvojice jsou například Francie — moře nebo Indie — Čína. Pro naše další úvahy to však není podstatné, můžeme předpokládat, že i takovéto dvojice států jsou spojeny jedinou hranou a že tedy jde skutečně o graf, nikoliv o multigraf. Jak jsme ukázali v kapitole IV, tento graf je rovinný. Připomeňme si ještě obrázek II.5. Místo oblastí nyní barvíme uzly, a to tak, aby dva uzly spojené hranou měly různou barvu. S tím už jsme se setkali v kapitole II, když jsme mluvili o chromatickém čísle grafu. Nyní tedy chápeme, proč se užívá v teorii grafů termínu barva; je to termín, který vznikl právě v souvislosti s naším problémem. Jde nám o to, jaké maximální chromatické číslo může mít rovinný graf. Toto číslo nemůže být menší než čtyři, protože K_4 je rovinný graf a $\chi(K_4) = 4$.

Dosud se nepodařilo najít rovinný graf o chromatickém čísle větším než čtyři. Byla tedy vyslovena domněnka (neboli hypotéza).

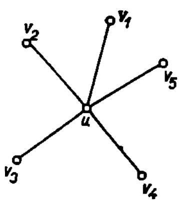
Domněnka o čtyřech barvách. *Pro každý rovinný graf G je $\chi(G) \leqq 4$.*

Toto tvrzení není věta. V matematice můžeme označit jako větu pouze takové tvrzení, které bylo dokázáno. Zde tomu tak není, proto mluvíme o domněnce; je to tvrzení, o němž se vědci domnívají, že by mohlo platit.

Lze však dokázat trochu slabší tvrzení.

Věta VI.1. *Nechť G je rovinný graf. Pak* $\chi(G) \leqq 5$.

Důkaz. Budiž n počet uzlů grafu G; použijeme matematické indukce podle n. Je-li $n \leqq 5$, pak tvrzení zřejmě platí. Nechť nyní $k \geqq 6$ a předpokládejme, že věta platí pro všechny grafy o n uzlech, kde $n \leqq k - 1$. Mějme nyní graf G, pro nějž $n = k$. Podle věty V.7 existuje v grafu G alespoň jeden uzel u takový, že $\varrho_G(u) \leqq 5$. Budiž G' graf vzniklý z G odstraněním uzlu u. Graf G' má $k - 1$ uzlů, tedy podle indukčního předpokladu existuje přípustné obarvení jeho uzlů pěti barvami. Je-li $\varrho_G(u) \leqq 4$, pak přípustné obarvení uzlů grafu G pěti barvami dostaneme tak, že všechny uzly různé od u obarvíme tak, abychom dostali přípustné obarvení grafu G' pěti barvami, a uzel u obarvíme barvou různou od barev uzlů, které jsou s ním v grafu G spojeny hranami; protože tyto uzly jsou nejvýše čtyři, takováto barva existuje. Je-li $\varrho_G(u) = 5$, ale alespoň dva uzly spojené s uzlem u v grafu G jsou v přípustném obarvení grafu G' pěti barvami obarveny stejnou barvou, postupujeme obdobně. Zbývá tedy už jen případ, kdy $\varrho_G(u) = 5$ a uzly v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 spojené hranami s uzlem u v grafu G jsou v přípustném obarvení grafu G' pěti barvami obarveny navzájem různými barvami $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ (uzel v_i je obarven barvou β_i pro $i = 1, \ldots, 5$). Označení uzlů $v_1, \ldots, v_5$ volíme tak, aby v určité rovinné representaci $\mathscr{R}(G)$ grafu G hrany $uv_1, \ldots, uv_5$ následovaly za sebou v tomto pořadí, jdeme-li okolo uzlového bodu odpovídajícího uzlu u; je to znázorněno na obrázku VI.1. Jsou-li nyní i a j dvě různá čísla z čísel 1, 2, 3, 4, 5, pak podgraf grafu G' složený ze všech uzlů obarvených barvami β_i a β_j a ze všech hran spojujících dvojice těchto uzlů budeme označovat G'_{ij}. Uzly v_1 a v_3 jsou uzly grafu G'_{13}. Jestliže leží v různých komponentách tohoto grafu, vezmeme komponentu grafu G'_{13} obsahující uzel v_3 a změníme dané přípustné obarvení grafu G' pěti barvami tak, že uzly této komponenty, které měly barvu β_1,



Obr. VI.1

budou mít barvu β_3 a uzly, které měly barvu β_3, budou mít barvu β_1. Snadno bychom dokázali, že dostaneme opět přípustné obarvení grafu G' pěti barvami. V tomto obarvení uzly v_1 a v_3 mají stejnou barvu β_1 a žádný z uzlů $v',\ldots, v_5$ nemá barvu β_3. Tedy můžeme obarvit uzel u barvou β_3 a dostaneme tak přípustné obarvení grafu G pěti barvami. Jestliže v_1 a v_3 leží v téže komponentě grafu G'_{13}, pak existuje cesta C z v_1 do v_3 ležící v G'_{13}. Každá cesta z v_2 do v_4 v grafu G' musí mít společný uzel s cestou C (jinak by oblouk odpovídající některé její hraně protínal v rovinné representaci grafu G oblouk odpovídající některé z hran uv_1, uv_3). Každá takováto cesta tedy obsahuje uzel obarvený barvou β_1 nebo β_3, a tedy neleží celá v grafu G'_{24}. Znamená to, že uzly v_2 a v_4 leží v různých komponentách grafu G'_{24}. Vezmeme komponentu grafu G'_{24} obsahující uzel v_4 a změníme přípustné obarvení grafu G' tak, že uzly této komponenty, které měly barvu β_2, budou mít barvu β_4 a uzly, které měly barvu β_4, budou mít barvu β_2. Dostaneme přípustné obarvení grafu G' pěti barvami, v němž v_2 a v_4 mají tutéž barvu β_2 a žádný z uzlů $v_1, \ldots, v_5$ nemá barvu β_4. Obarvíme uzel u barvou β_4, čímž dostaneme přípustné obarvení grafu G pěti barvami.

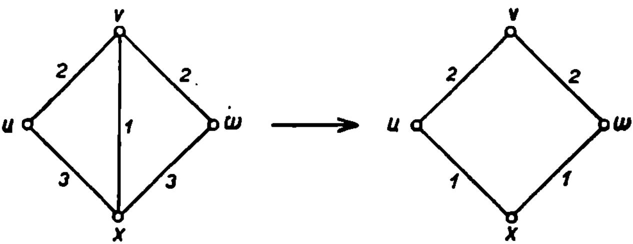
Tuto větu dokázal P. J. Heawood na konci minulého století.

Podle věty V.3 každý rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech je podgrafem některého grafu triangulace s touž množinou uzlů. Lze-li tento graf triangulace přípustně obarvit čtyřmi barvami, bude toto obarvení přípustným obarvením i pro původní graf. Podaří-li se tedy dokázat, že každý graf triangulace má chromatické číslo menší nebo rovné čtyřem, bude to dokázáno pro všechny rovinné grafy a problém čtyř barev bude vyřešen.

Při zkoumání grafů triangulací se může uplatnit následující věta, kterou dokázal P. G. Tait. Mluví se v ní o barvení hran. Obarvit hrany nějakého grafu znamená (podobně jako při barvení uzlů) každé hraně tohoto grafu přiřadit prvek nějaké množiny, jejíž prvky nazýváme barvami.

Věta VI.2. *Nechť G je graf triangulace. Pak $\chi(G) \leqq 4$ právě tehdy, lze-li hrany grafu G obarvit třemi barvami tak, aby libovolné dvě hrany incidentní s touž oblastí grafu G měly různé barvy.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\chi(G) \leqq 4$. Existuje tedy přípustné obarvení uzlů grafu G čtyřmi barvami $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. Budeme barvit hrany grafu G třemi barvami $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Barvou γ_1 obarvíme každou hranu, která spojuje uzly obarvené barvami β_1, β_2 nebo barvami β_3, β_4. Barvou γ_2 obarvíme každou hranu spojující uzly obarvené barvami β_1, β_3 nebo β_2, β_4. Konečně barvou γ_3 obarvíme každou hranu spojující uzly obarvené barvami β_1, β_4 nebo β_2, β_3. Takto každá hrana grafu G bude obarvena právě jednou z barev γ_1, γ_2, γ_3. Nechť nyní f je oblast grafu G, nechť u, v, w jsou uzly incidentní s oblastí f. Uzly u, v, w mají různé barvy v přípustném obarvení uzlů grafu G, protože každé dva z nich jsou spojeny hranou. Je-li u obarven barvou β_1, v barvou β_2 a w barvou β_3, pak hrana uv je obarvena barvou γ_1, hrana vw barvou γ_3 a hrana uw barvou γ_2, tedy tyto tři hrany mají různé barvy. Takto bychom mohli probrat všechny možnosti obarvení uzlů u, v, w a viděli bychom, že vždy hrany uv, vw, uw mají různé barvy. (Můžete si to provést jako cvičení.) Tím máme dokázánu jednu část věty; je-li $\chi(G) \leqq 4$, pak lze hrany obarvit určeným způsobem. Nyní budeme naopak předpokládat, že existuje obarvení hran grafu G třemi barvami splňující danou podmínku. Budiž G_1 graf získaný z G odstraněním všech hran obar-



Obr. VI.2

vených barvou γ_1 a G_2 graf získaný z G odstraněním všech hran obarvených barvou γ_2. Každá oblast rovinné representace grafu G_1 vznikne ze dvou oblastí representace grafu G incidentních s touž hranou obarvenou barvou γ_1 tím, že se oblouk odpovídající této hraně odstraní (viz obrázek VI.2). Tedy každá oblast takovéto representace grafu G_1 má stupeň 4. Budiž nyní K kružnice v grafu G; dokážeme, že její délka k je číslo sudé. Budiž G_1' podgraf grafu G sestávající ze všech uzlů a hran kružnice K a ze všech uzlů a hran takových, že uzlové body a oblouky jim odpovídající v některé takovéto rovinné representaci $\mathscr{R}(G_1)$ grafu G_1 leží uvnitř uzavřené křivky odpovídající kružnici K. Je-li $k = 4$, je k sudé. Předpokládejme tedy $k \neq 4$. Budiž p počet oblastí grafu G_1'. Graf G_1' obsahuje jednu oblast stupně k (oblast vně kružnice K) a $p - 1$ oblastí stupně 4. Sečteme-li stupně všech oblastí, dostaneme dvojnásobek počtu hran. Součet těchto stupňů je $4(p - 1) + k$, a tedy počet hran je $2(p - 1) + \frac{1}{2} k$. Aby toto číslo bylo celé, musí být k sudé. Protože K byla libovolně zvolená kružnice v grafu G_1, mají všechny kružnice v tomto grafu sudé délky a podle věty II.10 graf G_1 je sudý, tedy $\chi(G_1) = 2$. Znamená to, že existuje přípustné obarvení uzlů grafu G_1 dvěma barvami δ_1 a δ_2. Podobně ovšem můžeme dokázat, že i graf G_2 je sudý a že existuje přípustné obarvení uzlů tohoto grafu dvěma barvami ε_1 a ε_2. Nyní v grafu G obarvíme uzel

barvou β_1, je-li obarven barvou δ_1 v grafu G_1 a barvou ε_1 v grafu G_1,

barvou β_2, je-li obarven barvou δ_1 v grafu G_1 a barvou ε_2 v grafu G_2,

barvou β_3, je-li obarven barvou δ_2 v grafu G_1 a barvou ε_1 v grafu G_2,

barvou β_4, je-li obarven barvou δ_2 v grafu G_1 a barvou ε_2 v grafu G_2.
Toto obarvení je přípustné, protože dva uzly spojené hranou jsou obarveny různými barvami alespoň v jednom z grafů G_1, G_2, a tedy jsou obarveny různými barvami i v grafu G.

Uvedeme ještě Hadwigerovu domněnku. Pokud by se podařilo tuto domněnku dokázat, byla by tím dokázána i domněnka o čtyřech barvách. Nejprve však uvedeme definici.

Definice VI.1. Nechť G je graf, nechť u a v jsou uzly grafu G spojené hranou h. Odstraňme uzly u a v z grafu G, přidejme k němu nový uzel w a spojme jej hranami se všemi uzly, které byly v grafu G spojeny hranami s uzlem u nebo s uzlem v. O grafu takto získaném říkáme, že vznikl z grafu G *kontrakcí hrany* h.

Slovo kontrakce znamená stažení. Můžeme si ji představit tak, že oblouk znázorňující hranu h se zkrátí (stáhne) na jediný bod a tento bod pak znázorňuje nový uzel w.
Nyní vyslovíme domněnku.

Hadwigerova domněnka. *Nechť G je souvislý graf, $\chi(G) = n$. Pak postupnými kontrakcemi hran lze z grafu G získat úplný graf K_n.*

Kontrakcí hrany rovinného grafu vznikne rovněž rovinný graf. Je-li Hadwigerova domněnka pravdivá, pak z každého souvislého rovinného grafu o chromatickém čísle větším než čtyři lze postupnými kontrakcemi hran získat nerovinný graf, tedy každý graf o chromatickém čísle větším než čtyři je nerovinný.

Platí dále věta, kterou nebudeme dokazovat.

Věta* VI.3. *Nechť G je rovinný graf o n uzlech,* $n \leqq 51$. *Pak* $\chi(G) \leqq 4$.

Tuto větu dokázal E. Strömquist; před ním J. Mayer dokázal toto tvrzení pro $n \leqq 47$.

Pokud tedy domněnka o čtyřech barvách neplatí, nebude tak snadné dokázat to uvedením příkladu rovinného grafu o chromatickém čísle větším než čtyři; takovýto graf musí mít více než 51 uzlů.

Zkoumají se samozřejmě i chromatická čísla grafů, k nimž existují representace na jiných plochách, než je rovina nebo kulová plocha. Pro takzvané orientovatelné plochy se definuje rod plochy. Nebudeme uvádět definici tohoto pojmu, řekneme si pouze, že kulová plocha je orientovatelná a její rod je roven nule. Dále se definuje chromatické číslo takovéto plochy jako maximální chromatické číslo grafu, k němuž na této ploše existuje representace. Pro plochy rodu většího než nula existuje Heawoodův vzorec, který vyjadřuje toto chromatické číslo v závislosti na rodu plochy. Kdybychom do tohoto vzorce za rod plochy dosadili nulu (tedy rod kulové plochy), vyšla by nám pro chromatické číslo hodnota 4. Háček je v tom, že vzorec byl dokázán za předpokladu, že rod plochy je větší než nula, tedy pro rod plochy rovný nule jej nelze použít. Je tu však zajímavý paradox, že problém, který je vyřešen pro složité plochy, nebyl dosud vyřešen pro plochu nejjednodušší.

Problém čtyř barev lze také zobecnit tak, že se uvažuje opět přípustné barvení mapy a připouští se, aby území jednoho státu sestávalo z několika oddělených oblastí (jako například výše zmíněné USA s Aljaškou); počet těchto oblastí u téhož státu se při tom určitým způsobem omezí, například se požaduje, aby nebyly více než dvě nebo více než tři.

Lze také zkoumat případ, kdy každý stát na určité planetě má své „kosmické území“ na jiné planetě. Hledá se nejmenší počet barev, kterým lze obarvit mapy obou planet tak, aby území téhož státu na různých planetách bylo obarveno touž barvou a aby opět státy, které spolu sousedí (na kterékoliv z obou planet) byly zbarveny různými barvami. Domněnka praví, že k tomu stačí osm barev. Zde můžeme opět uvažovat barvení uzlů dvou příslušných duálních grafů. Ztotožníme-li uzel jednoho grafu odpovídající území na jedné planetě s uzlem druhého grafu odpovídajícím území téhož státu na druhé planetě (provedeme to pro všechny státy), pak dostaneme takzvaný biplanární graf. Je to graf, který je sjednocením dvou rovinných (cizím slovem planárních) grafů o téže množině uzlů. Problém lze tedy formulovat tak, že hledáme maximální chromatické číslo biplanárního grafu.

Zkoumání biplanárních grafů má význam v moderní elektrotechnice. Často se užívá takzvaných tištěných obvodů; elektrický obvod je tvořen tenkými vrstvami vodivé látky na nevodivé podložce. Pokud jsou všechny vrstvy na jedné straně podložky, musí být graf tohoto obvodu rovinný; vrstvy totiž nejsou izolované. Pokud by vodivé vrstvy byly na obou stranách nevodivé destičky, stačilo by, aby tento graf byl biplanární; vyjádřil by se jako sjednocení dvou rovinných grafů o téže množině uzlů a obvody odpovídající těmto grafům by se umístily na různých stranách destičky.

V této knížce se zabýváme pouze konečnými grafy.

Přesto vás může napadnout otázka, zda by nemohlo platit, že každý konečný rovinný graf má chromatické číslo menší nebo rovné čtyřem, ale nekonečný rovinný graf může mít chromatické číslo větší. Že tomu tak není, zaručuje věta, kterou dokázali P. Erdős a N. G. de Bruijn. Uvedeme ji bez důkazu.

Věta VI.4. *Nechť G je nekonečný graf. Pak existuje konečný podgraf G_0 grafu G takový, že* $\chi(G_0) = \chi(G)$.

Pokud by existoval nekonečný rovinný graf o chromatickém čísle větším než čtyři, existoval by jeho konečný podgraf o stejném chromatickém čísle a byl by to samozřejmě také rovinný graf. Při řešení problému čtyř barev tedy stačí se omezit na konečné grafy.

Problém čtyř barev tedy zůstává nerozřešen. Celkem se dá říci, že to ani tak nevadí. Chceme-li barvit mapy, není tak obtížné si opatřit pět barev, abychom měli jistotu, že se nám to vždy podaří. A na další vývoj teorie grafů by řešení tohoto problému asi také nemělo podstatný vliv. Problém tu však je a už sama skutečnost, že takovýto poměrně jednoduše formulovaný problém už přes sto let odolává pokusům o řešení, přitahuje k němu neustále zájem matematiků, a to profesionálů i amatérů.

Teď asi čekáte, že vás budu varovat, abyste se o jeho řešení nepokoušeli, že je to zbytečná ztráta času. A přece vás varovat nebudu, naopak vás budu nabádat k tomu, abyste se o to pokusili. Nečekejte samozřejmě rychlý úspěch, ale také nebuďte malomyslní. Není vyloučeno, že problém čtyř barev rozřeší někdo, kdo není zrovna odborníkem v teorii grafů; dá se totiž čekat, že k dokázání nebo vyvrácení hypotézy o čtyřech barvách bude třeba užít zcela originálního postupu a při hledání tohoto postupu může být možná i výhodné, nemá-li člověk v hlavě zafixovány obvyklé postupy důkazů v teorii grafů, které by ho zaváděly nesprávným směrem. V každém případě to bude velmi užitečné cvičení, při němž vniknete do teorie grafů, naučíte se uvažovat nad smyslem jejích definic a vět a přinutíte se číst další literaturu, třeba i v cizích jazycích. Proto za touto kapitolou nebudou uvedena žádná další cvičení; problém čtyř barev vás zaměstná dostatečně. Hlavně nepropadněte tomuto problému jako nějakému narkotiku; pamatujte stále, že jsou i jiné důležité věci, například škola. A také se předčasně nechlubte, bude-li se vám zdát, že jste problém čtyř barev vyřešili; zdání v tomto případě často klame, jak mohou dosvědčit recenzenti matematických vědeckých časopisů, kteří občas dostávají různá nesprávná řešení tohoto problému. V matematice je důležité být kritický ke svým výsledkům, každý krok důkazu kontrolovat; i tomu se musíte naučit. A zaujme-li vás teorie grafů tak, že se jí v budoucnu budete věnovat, pak vaše trápení s problémem čtyř barev rozhodně nebude neužitečné.

Dodatek při korektuře: Jak uvádí „Mathematics Calendar 1977“, američtí matematikové W. Haken a K. Appel v červenci 1976 oznámili, že se jim podařilo dokázat domněnku o čtyřech barvách. Nalezli konečný (ale značně vysoký) počet rovinných grafů, o nichž dokázali, že lze-li tyto grafy přípustně obarvit čtyřmi barvami, lze tak obarvit všechny rovinné grafy. Obarvení zmíněných grafů nalezli pomocí samočinného počítače. Problém čtyř barev je tedy rozřešen, nicméně i nadále se matematikové mohou snažit o nalezení nějakého elegantnějšího důkazu.