V. KAPITOLA

TRIANGULACE ROVINY

V předešlé kapitole jsme zavedli pojem incidence mezi hranami grafu a oblastmi jeho rovinné representace. Můžeme tedy také definovat stupeň oblasti, podobně jako jsme definovali stupeň uzlu.

Definice V.1. Nechť G je rovinný graf, nechť $\mathcal{R}(G)$ je jeho rovinná representace. Nechť f je oblast representace $\mathcal{R}(G)$. *Stupněm oblasti* f nazýváme počet hran grafu G incidentních s oblastí f v representaci $\mathcal{R}(G)$.

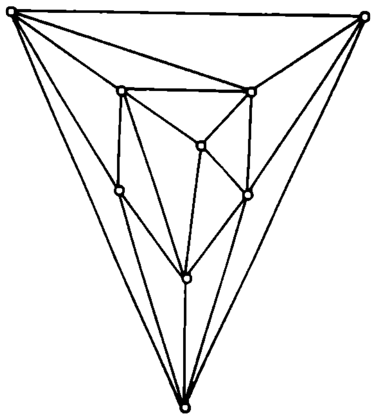
Nyní se budeme zabývat určitým speciálním typem rovinných representací a grafy, které mají tyto representace.

Definice V.2. Nechť G je souvislý rovinný graf bez acyklických hran, nechť $\mathcal{R}(G)$ je jeho rovinná representace. Je-li stupeň každé oblasti representace $\mathcal{R}(G)$ roven třem, nazýváme representaci $\mathcal{R}(G)$ *triangulací roviny* a graf G nazýváme *grafem triangulace roviny*.

Místo „triangulace roviny“ budeme v dalším říkat stručně „triangulace“, protože triangulacemi jiných ploch se zabývat nebudeme. Rovněž budeme říkat, že hranicí určité oblasti je kružnice, místo abychom říkali, že její hranicí je uzavřená křivka tvořená oblouky rovinné representace odpovídajícími hranám kružnice.

Příklad triangulace je na obrázku V.1.
Dokážeme některé věty o triangulacích.

Věta V.1. *Budiž G graf triangulace. Budiž u libovolný uzel grafu G. Pak existuje kružnice $K(u)$ v grafu G, jejíž množinou uzlů je množina všech uzlů grafu G spojených hranami s uzlem u.*



Obr. V.1

Důkaz. Budiž v_1 uzel spojený hranou s uzlem u. Hrana uv_1 je incidentní právě s dvěma oblastmi representace $\mathscr{R}(G)$; budiž f_1 jedna z těchto oblastí. Oblast f_1 má stupeň 3, tedy její hranicí je kružnice délky 3 obsahující hranu uv_1. Budiž v_2 uzel této kružnice různý od u a v_1; zřejmě existují hrany uv_2 a v_1v_2. Hrana uv_2 je incidentní rovněž se dvěma oblastmi; jedna z nich je f_1, druhou označíme f_2. Oblast f_2 má rovněž stupeň 3; budiž tedy v_3 uzel hranice oblasti f_2 různý od u a v_2. Je $v_3 \neq v_1$, protože jinak by oblasti f_1, f_2 byly obě incidentní s uzly u, v_1, v_2, a poněvadž obě mají stupeň 3, musely by být totožné, a tedy hrana uv_2 by byla incidentní pouze s jednou oblastí a byla by acyklická, což by byl spor. Nechť f_3 je oblast incidentní s hranou uv_3 a různá od f_2. Uzel hranice oblasti f_3 různý od u a v_3 může být v_1; v tom případě existuje kružnice sestávající z uzlů v_1, v_2, v_3 a hran v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1. V opačném případě tento uzel označíme v_4 a pokračujeme dále stejným způsobem. Po konečném počtu kroků získáme uzly $v_1, \ldots, v_r$ a oblasti $f_1, \ldots, f_r$ tak, že hranice oblasti f_i pro $i = 1, \ldots, r - 1$ je kružnice délky 3 obsahující uzly u, v_i, v_{i+1} a hranice oblasti f_r je kružnice délky 3 obsahující uzly u, v_r, v_1. Nechť $K(u)$ je kružnice sestávající z uzlů $v_1, \ldots, v_r$ a hran $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{r-1}v_r, v_rv_1$; tyto hrany existují, jak jsme ukázali. Všechny uzly kružnice $K(u)$ jsou spojeny hranami s uzlem u. Dále uzel u není incidentní se žádnou oblastí různou od $f_1, \ldots, f_r$, tedy ani se žádnou hranou různou od $uv_1, \ldots, uv_r$ (takováto hrana by musela být acyklická), tedy množina uzlů spojených hranami s uzlem u je $\{v_1, \ldots, v_r\}$.

Věta V.2. *Nechť G je graf triangulace o n uzlech. Je-li $n = 4$, pak G je úplný graf o čtyřech uzlech. Je-li $n \geqq 5$, pak $\omega(G) \geqq 3$.*

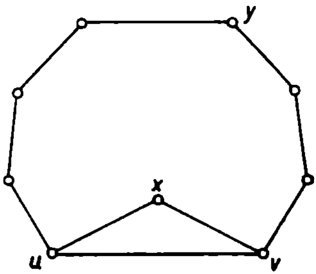
Důkaz. Budiž $n = 4$. Nechť u je uzel grafu G. Podle věty V.1 existuje kružnice $K(u)$ v grafu G, jejíž množinou uzlů je množina všech uzlů spojených hranami s uzlem u. Délka kružnice $K(u)$ je 3; menší délku kružnice mít nemůže, při větší délce by bylo $n > 4$. Jsou-li v_1, v_2, v_3 uzly této kružnice, pak existují hrany uv_1, uv_2, uv_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, a tedy u, v_1, v_2, v_3 jsou uzly úplného grafu o čtyřech uzlech. Protože G má pouze čtyři uzly, tento úplný graf je celý graf G. Budiž nyní $n \geqq 5$. Graf G není úplný, protože jinak by nebyl rovinný. Existují v něm tedy řezy. Budiž R řez grafu G o minimálním počtu uzlů; tento počet uzlů je $\omega(G)$. Budiž $u \in R$. Budiž G' graf vzniklý z G odstraněním všech uzlů řezu R. Uzel u je v G spojen hranami s uzly alespoň dvou komponent grafu G'; jinak by $R - \{u\}$ byl řezem grafu G a řez R by neměl minimální počet uzlů. Uzel u je tedy spojen s některým uzlem w_1 komponenty A_1 a s některým uzlem w_2 komponenty A_2 grafu G', kde $A_1 \neq A_2$. Budiž $K(u)$ kružnice z věty V.1. Uzly w_1 a w_2 jsou uzly kružnice $K(u)$. Kružnice $K(u)$ je sjednocením dvou cest C_1 a C_2, které obě spojují uzly w_1 a w_2 a nemají kromě w_1 a w_2 společný uzel. Na každé z cest C_1 a C_2 musí ležet některý uzel řezu R; nechť x_1 je uzel řezu R obsažený v C_1 a x_2 uzel řezu R obsažený v C_2. Uzly u, x_1, x_2 jsou tři navzájem různé uzly řezu R, a tedy $\omega(G) \geqq 3$.

Z této věty a z věty IV. 4 plyne, že je-li graf G o $n \geqq 4$ uzlech grafem triangulace, pak všechny jeho rovinné representace jsou triangulacemi.

V čem spočívá hlavní význam triangulací, poznáme z další věty.

Věta V.3. *Každý rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech je podgrafem některého grafu triangulace s toutéž množinou uzlů.*

Důkaz. Nechť G je souvislý rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech, nechť $\mathscr{R}(G)$ je jeho rovinná representace. (Kdyby graf G byl nesouvislý, byl by samozřejmě podgrafem některého souvislého rovinného grafu.) Je-li G grafem triangulace, pak pro něj věta platí. Není-li grafem triangulace, pak existuje oblast f representace $\mathscr{R}(G)$, jejíž hranicí není kružnice délky 3. Existují tedy uzly u, v incidentní s f, které nejsou spojeny hranou patřící hranici oblasti f. Nejsou-li vůbec spojeny hranou, pak je spojíme a dostaneme tak graf G'. Rovinnou representaci $\mathscr{R}(G')$ grafu G' dostaneme tak, že uzlové body representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající uzlům u a v spojíme obloukem jednoduché rovinné křivky, jehož vnitřní body náleží



Obr. V.2

oblasti f. Tedy G' je rovněž rovinný graf, má tutéž množinu uzlů jako G a graf G je jeho podgrafem. Předpokládejme nyní, že uzly u a v jsou spojeny hranou (která ovšem nepatří hranici oblasti f). Existuje cesta C z u do v patřící hranici oblasti f (uzly a hrany incidentní s f tvoří zřejmě souvislý podgraf grafu G); tato cesta má délku větší než jedna, protože u a v nejsou spojeny hranou patřící hranici oblasti f. Existuje tedy uzel x cesty C různý od u a v a zřejmě existuje i uzel y hranice oblasti f, který nepatří do C. Kdyby byly uzly x a y spojeny hranou, pak by oblouk representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající této hraně musel protínat oblouk odpovídající hraně uv

nebo procházet vnitřkem oblasti f, což ovšem není možné. Je to znázorněno na obrázku V.2; je třeba poznámenat, že to platí i v případě, kdy hranice oblasti f není kružnicí. Místo uzlů u a v tedy spojíme hranou uzly x a y. Dostaneme tak graf G', pro nějž platí to, co bylo uvedeno výše. Je-li graf G_1 grafem triangulace, věta platí. Není-li, opakujeme tento postup tak dlouho, až dostaneme graf s takovou rovinnou representací, že každé dva uzly incidentní s touž oblastí jsou spojeny hranou. Pak hranice každé oblasti je kružnice délky 3 a získaný graf je grafem triangulace o stejné množině uzlů jako graf G a takový, že G je jeho podgrafem.

Nyní určíme, kolik hran a kolik oblastí má graf triangulace o daném počtu uzlů. (Vzhledem k větě V.2 můžeme mluvit o oblastech grafu.)

Věta V.4. *Nechť G je graf triangulace o $n \geqq 4$ uzlech. Pak počet hran grafu G je $3n - 6$ a počet oblastí grafu G je $2n - 4$.*

Důkaz. Počet uzlů grafu G označme m, počet jeho oblastí označme p. Každá oblast grafu G je incidentní s třemi hranami, každá hrana se dvěma oblastmi. Trojnásobek počtu oblastí je tedy roven dvojnásobku počtu hran, to jest

$$3p = 2m$$

a z toho

$$p = \frac{2}{3} m .$$

Použijeme nyní Eulerova vzorce (věta IV.7). Máme

$$n - m + p = n - \frac{1}{3} m = 2 ,$$

z čehož plyne

$$m = 3n - 6\,, \quad p = \frac{2}{3}\, m = 2n - 4\,.$$

Všechny grafy triangulací, které mají stejný počet uzlů, mají tedy i stejný počet hran a stejný počet oblastí.

Věta V.5. *Budiž G graf triangulace. Pak neexistuje rovinný graf s toutéž množinou uzlů jako G takový, aby G byl jeho vlastním podgrafem.*

Poznámka. Graf G je vlastním podgrafem grafu G', je-li G podgrafem grafu G' a přitom nesplývá s grafem G'.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje rovinný graf G', který má stejnou množinu uzlů jako G a je takový, že G je jeho vlastním podgrafem. Podle věty V.3 existuje graf triangulace G'' s toutéž množinou uzlů jako G' (a tedy i jako G), jehož podgrafem (ne nutně vlastním) je graf G'. Je-li n počet uzlů grafu G'' (a tedy i grafů G a G'), pak G'' má $3n - 6$ hran (podle věty V.4) a počet hran grafu G' je menší nebo roven $3n - 6$. Poněvadž však G je vlastním podgrafem grafu G', musí být jeho počet hran menší než $3n - 6$, což je spor s předpokladem, že G je graf triangulace.

Grafům triangulací se také někdy říká maximální rovinné grafy. Z vět V.3 a V.5 je zřejmé, proč se jim tak říká.

Z věty V.4 plynou ještě další důsledky.

Věta V.6. *Počet hran rovinného grafu o n uzlech je menší nebo roven $3n - 6$.*

Důkaz. Pro $n \geqq 4$ to plyne přímo z vět V.3 a V.4, pro $n = 3$ je to zřejmé.

Věta V.7. *Nechť G je rovinný graf. Pak existuje alespoň jeden uzel u grafu G, pro nějž $\varrho(u) \leqq 5$.*

Důkaz. U grafů s méně než třemi uzly je to zřejmé. Předpokládejme tedy, že graf má $n \geqq 3$ uzlů. Jak jsme ukázali v kapitole II, součet všech stupňů uzlů grafu G je roven dvojnásobku jeho počtu hran. Kdyby věta neplatila, bylo by $\varrho(u) \geqq 6$ pro každý uzel u, zmíněný součet by byl větší nebo roven $6n$ a počet hran grafu G by byl větší nebo roven $3n$ a tedy větší než $3n - 6$, což by odporovalo větě V.6.

Věta V.8. *Nechť G je rovinný graf, který není úplným grafem. Pak $\omega(G) \leqq 5$.*

Tvrzení plyne přímo z vět II.6 a V.7.

Cvičení

1. Vysvětlete, jak pojem triangulace v teorii grafů souvisí s pojmem triangulace v geodézii.

2. Nakreslete libovolnou triangulaci o 10 uzlech.

3. Nakreslete triangulaci o 6 uzlech, která obsahuje jako podgraf graf vzniklý z $K_{3,3}$ odstraněním jedné hrany.

4. Čím se vyznačuje duální graf k libovolnému grafu triangulace?

5. Nechť G je nerovinný graf, nechť G' je graf vzniklý z G odstraněním jedné hrany. Je pravda, že je-li G' rovinný, je grafem triangulace?