Rovinné grafy

IV. kapitola. Oblasti rovinného grafu, duální graf

In: Bohdan Zelinka (author): Rovinné grafy. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 51–70.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403908

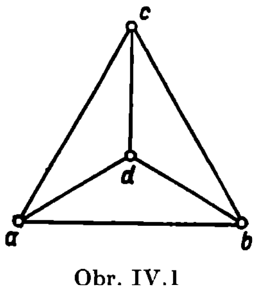
IV. KAPITOLA

OBLASTI ROVINNÉHO GRAFU, DUÁLNÍ GRAF

Vraťme se zase k pojmu rovinné representace grafu.

Definice IV.1. Nechť G je rovinný graf, $\mathscr{R}(G)$ jeho rovinná representace v některé rovině σ. Nechť f je množina bodů v rovině taková, že libovolné dva body množiny f lze spojit spojitou křivkou ležící v σ a nemající společný bod s representací $\mathscr{R}(G)$ a žádná množina v rovině σ, která obsahuje f jako vlastní podmnožinu, tuto vlastnost nemá. Pak f nazýváme *oblastí rovinné representace* $\mathscr{R}(G)$ grafu G.

Oblast značíme malým písmenem, ačkoliv jde o množinu bodů. V teorii grafů je však zvykem takto značit oblasti, stejně jako uzly a hrany. Co je spojitá křivka, je zřejmé z názoru; přesná definice je příliš složitá.



Obr. IV.1

Představme si, že rovinnou representaci $\mathscr{R}(G)$ grafu G máme nakreslenu na papíře a že rozstříháme tento papír podél všech oblouků této representace. Jednotlivé kusy papíru, které nám po tomto rozstříhání vzniknou, představují oblasti representace $\mathscr{R}(G)$.

Na obrázku IV.1 vidíme rovinnou representaci grafu K_4. Má čtyři oblasti. Jednu tvoří vnitřek trojúhelníka o vrcholech a, b, d, druhou vnitřek trojúhelníka o vrcholech b, c, d, třetí vnitřek trojúhelníka o vrcholech a, c, d, čtvrtou vnějšek trojúhelníka o vrcholech a, b, c.

Nyní uvedeme dvě další definice.

Definice IV.2. Budiž G rovinný graf, budiž $\mathscr{R}(G)$ jeho rovinné representace. Nechť f je oblast representace $\mathscr{R}(G)$, nechť h je hrana grafu G. Říkáme, že hrana h je v representaci $\mathscr{R}(G)$ incidentní s oblastí f (a oblast f je incidentní s hranou h), jestliže oblouk odpovídající hraně h v representaci $\mathscr{R}(G)$ přiléhá k oblasti f. Je-li u uzel incidentní s hranou h, která je v representaci $\mathscr{R}(G)$ incidentní s oblastí f, říkáme, že uzel u je incidentní s oblastí f (a oblast f je incidentní s uzlem u).

Definice IV.3. Budiž G rovinný graf, budiž $\mathscr{R}(G)$ jeho rovinná representace. Nechť f je oblast representace $\mathscr{R}(G)$. Podmnožina representace $\mathscr{R}(G)$ složená z oblouků odpovídajících hranám incidentním s oblastí f a z uzlových bodů odpovídajících uzlům grafu G incidentním s oblastí f se nazývá hranicí oblasti f.

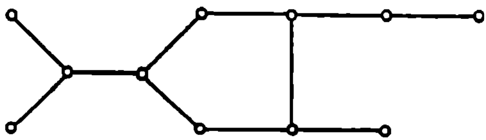
V definici IV.2 mluvíme o tom, že hrana h přiléhá k oblasti f. Co to znamená, je zřejmé z názoru. Bylo by možné hranici oblasti a incidenci mezi hranami a oblastmi definovat formálněji pomocí pojmu hranice množiny, který je důležitým pojmem v topologii. To by však bylo příliš složité, proto od toho upouštíme a odvoláváme se na názor.

Zdůrazníme ještě, že bod náležící hranici některé oblasti representace $\mathcal{R}(G)$ není bodem této oblasti.

Věta IV.1. *Nechť G je rovinný graf, $\mathcal{R}(G)$ jeho rovinná representace. Nechť h je hrana grafu G. Vnitřek oblouku representace $\mathcal{R}(G)$ odpovídající hraně h patří hranicím dvou různých oblastí representace $\mathcal{R}(G)$ právě tehdy, není-li hrana h acyklická.*

Důkaz. Je zřejmé, že zmíněný vnitřek oblouku nemůže patřit hranicím tří různých oblastí representace $\mathcal{R}(G)$. Nechť tedy h není acyklická. V grafu G existuje kružnice K, která obsahuje hranu h. Sjednocením oblouků representace $\mathcal{R}(G)$ odpovídajících hranám kružnice K je jednoduchá uzavřená křivka. (Jednoduchá křivka je taková, která neprotíná sebe samu.) Zřejmě každá oblast representace $\mathcal{R}(G)$ leží buď celá vně této křivky, nebo celá uvnitř křivky. Tedy oblouk odpovídající hraně h patří hranicím dvou různých oblastí representace $\mathcal{R}(G)$. Nechť nyní hrana h je acyklická. Každá jednoduchá uzavřená křivka, která je podmnožinou representace $\mathcal{R}(G)$, je zřejmě tvořena oblouky odpovídajícími hranám některé kružnice v grafu G. Vnitřek oblouku odpovídajícího hraně h tedy nepatří žádné jednoduché uzavřené křivce a zřejmě vůbec žádné uzavřené křivce, která by byla podmnožinou representace $\mathcal{R}(G)$, a náleží tudíž hranici pouze jedné oblasti (zde se opět musíme odvolat na geometrický názor, přesný důkaz by byl příliš složitý).

Vysvětleme si názorně, co to znamená, že některý oblouk odpovídající hraně náleží hranici pouze jedné oblasti. Mějme opět onen papír s nakreslenou representací $\mathcal{R}(G)$ a rozstříhejme jej tak, jak bylo popsáno výše. Není-li h acyklická, pak příslušný oblouk bude ležet na okrajích dvou různých kousků papíru, které nám rozstříháním vzniknou. Je-li h acyklická hrana, pak na místě oblouku, který jí odpovídá, budeme mít pouze zástřih do jednoho kousku papíru (papír se podél tohoto zástřihu nerozpadá). Kdybychom stříhali pouze podél oblouků odpovídajících hranám, které nejsou acyklické, dostali bychom stejný počet kousků papíru, jako když jsme stříhali podél všech oblouků. Zkuste si obkreslit rovinnou representaci grafu na obrázku IV.2 a rozstříhejte ji. Které hrany jsou acyklické?



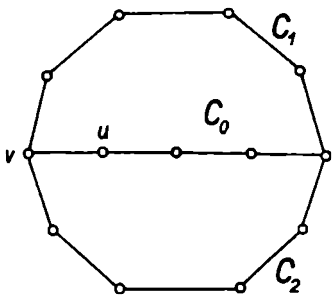
Obr. IV.2

Můžete namítnout, že náleží-li vnitřek nějakého oblouku hranici pouze jedné oblasti, neměli bychom vůbec říkat, že náleží této hranici. Z praxe známe hranice mezi dvěma státy nebo hranici mezi nějakým státem a mořem, ale nikoliv hranici pouze jednoho státu a ničeho jiného. Z toho, co jsme uvedli, však plyne, že každý bod roviny s výjimkou bodů representace $\mathcal{R}(G)$ patří právě do jedné z oblastí této representace, body representace $\mathcal{R}(G)$ nepatří do žádné oblasti. Je tedy vhodné definovat hranici oblasti tak, aby každý bod roviny patřil buď některé oblasti, nebo hranici některé oblasti.

Nyní dokážeme další větu.

Věta IV.2. *Nechť G je rovinný graf, $\omega(G) \geqq 2$. Budiž $\mathscr{R}(G)$ rovinná representace grafu G. Pak hranice každé oblasti representace $\mathscr{R}(G)$ je uzavřená křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám některé kružnice grafu G.*

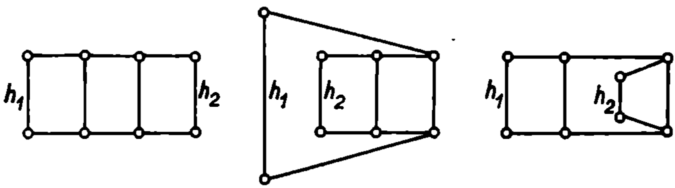
Důkaz. Je-li $\omega(G) \geqq 2$, pak G obsahuje alespoň jednu kružnici a jeho representace $\mathscr{R}(G)$ obsahuje alespoň dvě oblasti. Budiž f oblast této representace. Hranice oblasti f musí obsahovat uzavřenou křivku; jinak by f byla jedinou oblastí representace $\mathscr{R}(G)$. Tato uzavřená křivka je tvořena oblouky odpovídajícími hranám některé kružnice K grafu G. Nechť hranice oblasti f obsahuje oblouk odpovídající některé hraně nepatřící do K. Protože tato hranice je souvislá křivka, existuje hrana h nepatřící do K a incidentní s některým uzlem u kružnice K taková, že oblouk jí odpovídající patří hranici oblasti f. Budiž v koncový uzel hrany h různý od u. Protože $\omega(G) \geqq 2$, graf G' vzniklý z G odstraněním uzlu u je souvislý a existuje cesta C v G' z v do některého uzlu w kružnice K různého od u. Tato cesta ovšem existuje i v G a neobsahuje uzel u. Pro jednoduchost předpokládejme,



Obr. IV.3

že C neobsahuje jiný uzel kružnice K než w; kdyby takovéto uzly obsahovala, mohli bychom místo C uvažovat úsek této cesty z v do nejbližšího takového uzlu. Budiž C_0 cesta z u do w vzniklá z C přidáním uzlu u a hrany uv. Existují dále dvě různé cesty C_1 a C_2 z u do w, které jsou podgrafy kružnice K. Na obrázku IV.3 je jasně vidět, že zvolíme-li na každé z cest C_1, C_2 jeden uzel různý od u a w, pak nemůže existovat oblast, která by byla incidentní s oběma těmito uzly a s uzlem u současně, což je spor s předpokladem, že všechny tyto uzly jsou incidentní s oblastí f.

Definice IV.4. Budiž G rovinný graf, buďtež $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ dvě rovinné representace grafu G. Representace $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ se nazývají *ekvivalentní*, jestliže pro každé dvě hrany h_1 a h_2 grafu G platí, že v representaci $\mathscr{R}_1(G)$ existuje oblast incidentní s h_1 i s h_2 právě tehdy, jestliže takováto oblast existuje v $\mathscr{R}_2(G)$.



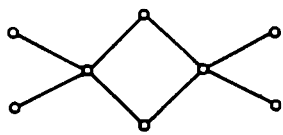
Obr. IV.4

Na obrázku IV.4 vidíme tři rovinné representace téhož grafu G. První dvě z nich jsou spolu ekvivalentní, třetí s nimi ekvivalentní není. Vidíme, že hrany h_1 a h_2 jsou incidentní s touž oblastí v prvních dvou representacích, ve třetí nikoli.

Věta IV.3. *Jestliže K je kružnice v rovinném grafu G a existuje-li rovinná representace $\mathscr{R}(G)$ grafu G taková, že křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám této kružnice není hranicí oblasti této representace, pak množina uzlů této kružnice je řezem grafu G.*

Důkaz. Pokud by neexistoval uzlový bod representace $\mathscr{R}(G)$ uvnitř zmíněné křivky, zřejmě vnitřek této křivky by byl oblastí representace $\mathscr{R}(G)$. Kdyby neexistoval uzlový bod vně této křivky, byl by její vnějšek oblastí representace $\mathscr{R}(G)$. V obou případech by tato křivka byla hranicí oblasti representace $\mathscr{R}(G)$. Existuje tedy alespoň jeden uzlový bod uvnitř této křivky, který odpovídá některému uzlu u grafu G, a alespoň jeden uzlový bod vně této křivky, který odpovídá některému uzlu v. Každá cesta z u do v v grafu G zřejmě obsahuje uzel kružnice K, a tedy po odstranění všech uzlů kružnice K z grafu G vznikne graf, v němž uzly u a v spolu nesouvisí a který je tedy nesouvislý.

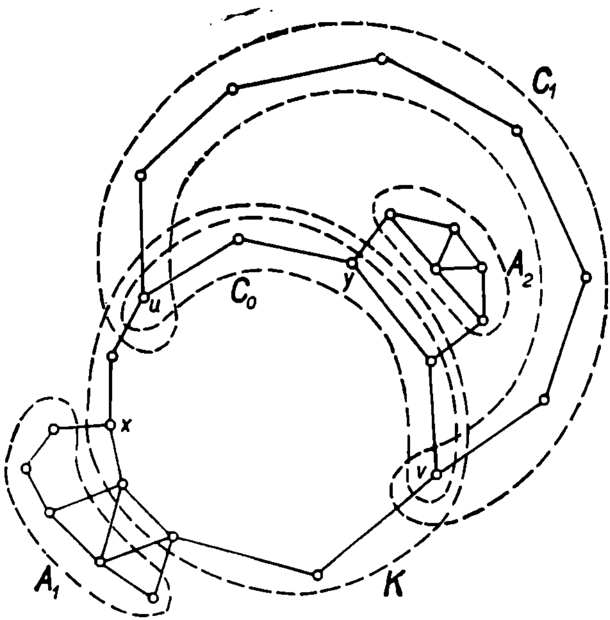
Obrácené tvrzení obecně neplatí (viz obr. IV.5), ale platí pro grafy, jejichž uzlový stupeň souvislosti je větší nebo roven třem a pro graf K_4.



Obr. IV.5

Věta IV.4. *Nechť G je rovinný graf, nechť $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Nechť $\mathscr{R}(G)$ je rovinná representace grafu G. Budiž K kružnice v grafu G. Množina* *uzlů kružnice K je řezem grafu G právě tehdy, jestliže křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám kružnice K v representaci $\mathcal{R}(G)$ je hranicí oblasti representace $\mathcal{R}(G)$.*

Důkaz. Vzhledem k větě IV.3 stačí dokázat, že existuje-li v grafu G kružnice K taková, že množina jejích uzlů je řezem grafu G a křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám kružnice K v representaci $\mathcal{R}(G)$ je hranicí oblasti této representace, pak $\omega(G) \leq 2$. Uvažujme komponenty grafu G' vzniklého z G odstraněním všech uzlů kružnice K. Ke každé takovéto komponentě A existuje alespoň jedna cesta, která je podgrafem kružnice K a má tu vlastnost, že každý uzel kružnice K spojený hranou s uzlem komponenty A patří této cestě (přinejmenším takovouto cestou může být libovolná cesta vzniklá z K odstraněním jedné hrany). Budiž nyní $q(A)$ délka nejkratší takovéto cesty pro komponentu A. Dále budiž A_0 taková komponenta, že $q(A_0)$ je nejmenší ze všech čísel $q(A)$. Předpokládejme nejprve, že $q(A_0) < < k - 1$, kde k je délka kružnice K. Budiž C_0 cesta délky $q(A_0)$ taková, že každý uzel kružnice K spojený hranou s uzlem komponenty A_0 patří do C_0 a C_0 je podgrafem kružnice K. Nechž u a v jsou koncové uzly cesty C_0 (tedy C_0 je cesta z u do v). Každý z uzlů u a v je spojen hranou s některým uzlem komponenty A_0; jinak by existovala kratší cesta s požadovanou vlastností. Existuje tedy cesta C_1 z u do v, jejíž všechny uzly kromě u a v patří do A_0. Budiž K' kružnice, která je sjednocením cest C_0 a C_1. Kružnici K' v representaci $\mathcal{R}(G)$ grafu G odpovídá jednoduchá uzavřená křivka. Protože $q(A_0) < k - 1$, existuje alespoň jeden uzel x kružnice K, který neleží na C_0. Je-li $q(A_0) \leq 2$, pak C_0 neobsahuje žádný uzel kromě u a v, a tedy nejvýše dva uzly kružnice K jsou spojeny s uzly komponenty A_0 (připouštíme i případ $u = v$), což znamená, že v grafu vzniklém odstraněním uzlů u a v z grafu G neexistuje cesta z x do žádného uzlu z A_0 a tedy $\omega(G) \leqq 2$. Je-li $q(A_0) \geqq 3$, existuje alespoň jeden uzel y cesty C_0 různý od u a v. Nechť A_1 je komponenta grafu G' různá od A_0 taková, že některý její uzel je spojen hranou s x, a nechť A_2 je komponenta grafu G' různá od A_0 taková, že některý její uzel je spojen hranou s y. Uzlové body representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající uzlům z A_1 leží buď všechny uvnitř křivky odpovídající kružnici K', nebo všechny vně této křivky; jinak by A_1



Obr. IV.6

musela mít společný uzel s K nebo s A_0. Podobné tvrzení platí i pro A_2. Leží-li nyní uzly komponenty A_1 uvnitř křivky, leží uzly komponenty A_2 vně křivky a obráceně. Je to vidět na obrázku IV.6. Z toho plyne, že neexistuje cesta z x do y, která by neobsahovala u ani v. V grafu G'' vzniklém z G odstraněním uzlů u a v uzly x a y spolu nesouvisí, tedy množina $\{u, v\}$ je řezem grafu G a $\omega(G) \leqq 2$. Nechť nyní $q(A_0) = k - 1$. Znamená to, že všechny uzly kružnice K jsou spojeny hranami s uzly komponenty A_0. Protože $q(A_0)$ je nejmenší ze všech $q(A)$, musí být $q(A) = k - 1$ pro každou komponentu A grafu G' a tedy každý uzel kružnice K je spojen hranami s uzly všech těchto komponent. Buďtež u_1, u_2, u_3 uzly kružnice K takové, že u_2 je spojen hranami s uzly u_1 a u_3. Budiž A' komponenta grafu G' různá od A_0. Existují cesty C_1, C_2 z u_1 do u_3 takové, že všechny uzly cesty C_1 kromě u_1 a u_3 leží v A_0 a všechny uzly cesty C_2 kromě u_1 a u_3 leží v A'. Budiž K_1 kružnice vzniklá z C_1 přidáním uzlu u_2 a hran u_1u_2 a u_2u_3, budiž K_2 kružnice vzniklá z C_2 týmž způsobem. Potom buď všechny uzlové body representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající uzlům z C_1 leží vně křivky odpovídající kružnici K_2, nebo obráceně všechny uzlové body representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající uzlům z C_2 leží vně křivky odpovídající kružnici K_1. V prvním případě všechny uzlové body representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající uzlům komponenty A_0 leží vně křivky odpovídající kružnici K_2 a tedy žádný z nich nemůže být spojen s u_2, což je spor. V druhém případě bychom došli ke sporu analogickou úvahou. Případ $q(A_0) = k - 1$ tedy nemůže nastat, musí platit $q(A_0) < k - 1$ a pro tento případ jsme větu dokázali výše.

V předpokladu věty se mluví o tom, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Formulovali jsme to takto, protože pro úplný graf jsme uzlový stupeň souvislosti nedefinovali. Jak však bylo poznamenáno v kapitole II, někdy se definuje uzlový stupeň souvislosti úplného grafu o n uzlech jako $n - 1$; v tom případě by ovšem bylo $\omega(K_4) = 3$ a stačilo by uvést předpoklad $\omega(G) \geqq 3$. Úplné grafy o více než čtyřech uzlech neuvažujeme, protože již víme, že nejsou rovinné.

Z věty IV.4 nyní odvodíme jednu důležitou větu.

Věta IV.5. *Nechť G je rovinný graf a nechť $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Pak všechny rovinné representace grafu G jsou spolu ekvivalentní.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ jsou dvě rovinné representace grafu G. Nechť h_1 a h_2 jsou dvě hrany grafu G. Předpokládejme, že v representaci $\mathscr{R}_1(G)$ existuje oblast f_1 incidentní s oběma hranami h_1 a h_2. Hranice oblasti f_1 v $\mathscr{R}_1(G)$ je jednoduchá uzavřená křivka, která je tvořena oblouky odpovídajícími hranám některé kružnice K grafu G (graf G zřejmě neobsahuje acyklické hrany). Podle věty IV.3 množina uzlů kružnice K není řezem grafu G, tedy i v $\mathscr{R}_2(G)$ musí existovat oblast f_2 taková, že její hranice je uzavřená křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám kružnice K. Potom ovšem h_1 a h_2 jsou incidentní s f_2 v representaci $\mathscr{R}_2(G)$. Protože h_1 a h_2 byly libovolně zvoleny, jsou representace $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ ekvivalentní. A poněvadž i $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ byly dvě libovolně zvolené rovinné representace grafu G, dokázali jsme, že všechny rovinné representace grafu G jsou spolu ekvivalentní.

Je-li G rovinný graf takový, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech, budeme uvažovat určitou množinu $F(G)$ přiřazenou grafu G. Prvky této množiny jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny kružnicím grafu G, jejichž množiny uzlů nejsou řezy grafu G, a nazývají se oblasti grafu G. Je-li oblast $f \in F(G)$ přiřazena takto kružnici K, pak o uzlu u řekneme, že je incidentní s oblastí f (a oblast f je incidentní s uzlem u) právě tehdy, náleží-li u do K. Podobně definujeme i incidenci mezi hranou h a oblastí f. Pak v každé rovinné representaci $\mathscr{R}(G)$ grafu G každé oblasti $f \in F(G)$ vzájemně jednoznačně odpovídá oblast representace $\mathscr{R}(G)$ tak, že tato incidence je zachována.

Vidíme tedy, že věta IV.4 nám umožňuje podstatně zjednodušit vyjadřování. Splňuje-li graf předpoklady této věty, nemusíme již mluvit o oblastech rovinné representace tohoto grafu, ale pouze o oblastech grafu G.

Dokážeme ještě další větu o těchto grafech.

Věta IV.6. *Nechť G je rovinný graf takový, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Nechť f_1, f_2 jsou oblasti grafu G. Pak existuje nejvýše jedna hrana grafu G, která je incidentní současně s f_1 i s f_2.*

Důkaz. Budiž $\mathscr{R}(G)$ rovinná representace grafu G. Předpokládejme, že existují oblasti f_1, f_2 a hrany h_1, h_2 grafu G tak, že $f_1 \neq f_2$, $h_1 \neq h_2$ a každá z hran h_1, h_2 je incidentní s f_1 i s f_2. V representaci $\mathscr{R}(G)$ oblastem f_1 a f_2 odpovídají oblasti této representace, které budeme značit také f_1 a f_2. Nechť G' je graf vzniklý z G odstraněním hrany h_1. Odstraníme-li z $\mathscr{R}(G)$ oblouk odpovídající hraně h_1 (s výjimkou uzlových bodů, které spojuje), dostaneme rovinnou representaci $\mathscr{R}(G')$ grafu G'. V $\mathscr{R}(G')$ hrana h_2 je incidentní pouze s jednou oblastí; tato oblast se skládá ze všech bodů oblasti f_1, ze všech bodů oblasti f_2 a ze všech vnitřních bodů oblouku odpovídajícího hraně h_1 (tento oblouk už v $\mathscr{R}(G')$ není). Z toho plyne podle věty IV.1, že h_2 je acyklická hrana grafu G'. Odstraněním hrany h_2 z G' tedy vznikne nesouvislý graf G''. Graf G'' vznikne z G odstraněním hran h_1 a h_2. Existuje tedy řez grafu G složený z uzlu u_1 incidentního s h_1 a uzlu u_2 incidentního s h_2; při odstraňování uzlů u_1 a u_2 se odstraní rovněž hrany h_1 a h_2. Je tedy $\omega(G) \leqq 2$, což je spor.

Všimněme si nyní blíže incidence hran a oblastí rovinného grafu G, pro nějž $\omega(G) \geqq 3$ nebo který je úplným grafem o čtyřech uzlech. Každá hrana je incidentní právě s dvěma oblastmi podle věty IV.1 a ke každým dvěma oblastem existuje nejvýše jedna hrana incidentní s oběma současně podle věty IV.5. Vidíme, že incidence mezi hranami a oblastmi v grafu G má tytéž vlastnosti jako incidence mezi hranami a uzly. Můžeme tedy vyslovit další definici.

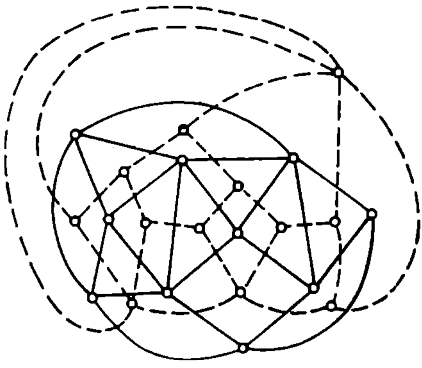
Definice IV.5. Nechť G je rovinný graf takový, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Nechť $F(G)$ je množina oblastí grafu G. Sestrojíme graf G^* tak, že každé oblasti z $F(G)$ přiřadíme uzel grafu G^* a dva uzly grafu G^* spojíme hranou právě tehdy, existuje-li v G hrana, která je incidentní s oběma oblastmi odpovídajícími těmto uzlům. Pak graf G^* nazýváme *duálním grafem* ke grafu G.

Dokážeme větu o duálních grafech.

Věta IV.7. *Nechť G je rovinný graf takový, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Budiž G^* duální graf ke grafu G. Pak graf G^* je rovinný.*

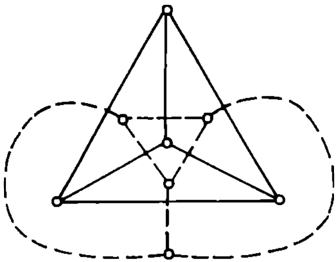
Důkaz. Nebudeme větu dokazovat podle věty Kuratowského, ale opřeme se o názor. Mějme rovinnou representaci $\mathscr{R}(G)$ grafu G. V každé oblasti representace $\mathscr{R}(G)$ zvolíme jeden bod; tento bod bude uzlovým bodem rovinné representace $\mathscr{R}(G^*)$ grafu G^* odpovídajícím uzlu grafu G^*, který je příslušnou oblastí grafu G. Jsou-li f_1 a f_2 dvě oblasti grafu G takové, že existuje hrana h incidentní s f_1 i s f_2, pak spojíme bod zvolený v oblasti f_1 s bodem zvoleným v oblasti f_2 obloukem jednoduché spojité křivky tak, aby tento oblouk protínal oblouk representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající hraně h v některém jeho vnitřním bodě a neměl společný bod se žádným jiným obloukem representace $\mathscr{R}(G)$. Učiníme-li to pro každou dvojici f_1, f_2 oblastí s uvedenou vlastností, dostaneme rovinnou representaci grafu G^*.

Je to vidět na obrázku IV.7. Hrany grafu G jsou nakresleny plnými čarami, hrany grafu G^* čárkovaně.



Obr. IV.7

Vidíme rovněž, že duální graf ke grafu G^* je opět G. Přesně vzato, abychom toto mohli tvrdit, museli bychom vědět, zda duální graf ke grafu G^* je vůbec definován, to jest zda G^* splňuje předpoklady definice IV.5. Řekněme si bez důkazu, že tomu tak skutečně je.

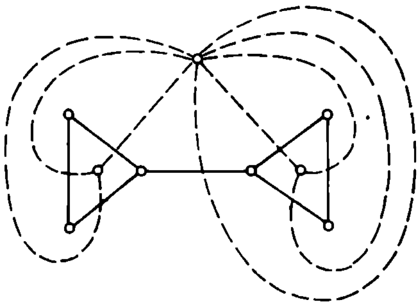


Obr. IV.8

Na obrázku IV.8 vidíme duální graf ke grafu K_4. Je to opět úplný graf o čtyřech uzlech. Proto graf K_4 nazýváme autoduální. Předpona „auto-“ značí „samo-“.

Duální grafy by bylo možno definovat i pro grafy o uzlovém stupni souvislosti menším než 3. Protože však takovéto grafy mohou mít neekvivalentní representace, museli bychom vždy mluvit o duálním grafu vzhledem k dané rovinné representaci. Dále by se v duálním grafu mohly vyskytovat i dvojice uzlů spojené více než jednou hranou (pokud by existovala více než jedna hrana incidentní s týmiž dvěma oblastmi v representaci původního grafu) a smyčky (pokud by původní graf obsahoval acyklické hrany). Pro zajímavost ukážeme takovýto graf na obrázku IV.9. V každém případě platí, že počet hran duálního grafu je roven počtu hran původního grafu.

Nyní ukážeme, že počet oblastí rovinné representace grafu je jednoznačně určen počtem uzlů a hran tohoto grafu. Plyne z toho samozřejmě, že všechny rovinné representace téhož grafu mají tentýž počet oblastí.



Obr. IV.9

Věta IV.8. (Eulerův vzorec). *Budiž G souvislý rovinný graf o n uzlech a m hranách. Budiž $\mathcal{R}(G)$ rovinná representace grafu G a nechť $\mathcal{R}(G)$ má p oblastí. Pak platí*

$$n - m + p = 2.$$

Důkaz. Jsou-li všechny hrany grafu G acyklické, pak graf G je stromem. Tedy $m = n - 1$ podle věty II.7. Dále každá hrana grafu G patří hranici pouze jediné oblasti representace $\mathcal{R}(G)$ (podle věty IV.1) a tedy $p = 1$; kdyby existovaly dvě různé oblasti, musela by existovat hrana incidentní se dvěma oblastmi v representaci $\mathcal{R}(G)$. Máme

$$n - m + p = n - (n - 1) + 1 = 2.$$

Nechť nyní G obsahuje hranu h, která není acyklická. Budiž G' graf získaný z grafu G odstraněním hrany h.

Vezměme rovinnou representaci $\mathcal{R}(G)$ grafu G a odstraňme z ní oblouk odpovídající hraně h (s výjimkou uzlových bodů, které spojuje). Dostaneme tak rovinnou representaci $\mathcal{R}(G')$ grafu G'. Hrana h je v $\mathcal{R}(G)$ incidentní se dvěma různými oblastmi f_1 a f_2 (protože není acyklická). V representaci $\mathcal{R}(G')$ máme oblast f, která se skládá ze všech bodů oblasti f_1, všech bodů oblasti f_2 a všech vnitřních bodů oblouku odpovídajícího hraně h v $\mathcal{R}(G)$. Všechny oblasti representace $\mathcal{R}(G)$ různé od f_1 a f_2 jsou zřejmě oblastmi i v $\mathcal{R}(G')$. Je-li nyní n' počet uzlů a m' počet hran grafu G' a je-li p' počet oblastí representace $\mathcal{R}(G')$, pak $n' = n$, $m' = m - 1$, $p' = p - 1$. Máme

$$n' - m' + p' = n - (m - 1) + (p - 1) =$$
$$= n - m + p.$$

Odstraněním hrany, která není acyklická, se tedy hodnota výrazu $n - m + p$ nemění. Jak jsme však viděli v důkaze věty II.8, postupným opakováním této operace dostaneme kostru grafu G, která je stromem, a tedy pro ni tato hodnota je rovna 2. Musí být tedy rovna 2 i pro původní graf G.

Vzorec se nazývá Eulerův podle slavného matematika Leonharda Eulera, o kterém jste jistě už slyšeli.

Nakonec se ještě zmíníme o možnostech representací grafu na jiné ploše, než je rovina. Representace grafu na libovolné ploše se definuje analogicky jako rovinná representace.

Věta IV.9. *Nechť G je graf. Representace grafu G na kulové ploše existuje právě tehdy, je-li graf G rovinný.*

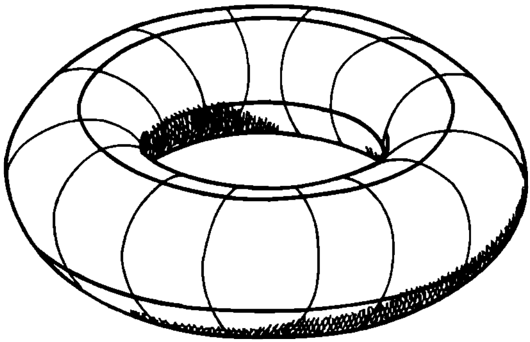
Důkaz. Nechž graf G je rovinný. Pak existuje jeho rovinná representace $\mathcal{R}(G)$ v nějaké rovině π. Uvažujme kulovou plochu $\varkappa$ která se dotýká roviny π v některém bodě T. Budiž S bod plochy $\varkappa$ protilehlý bodu T. Body roviny π budeme promítat na plochu $\varkappa$ středovým promítáním o středu S. Znamená to, že je-li A bod roviny π, pak jeho průmětem bude bod A', který je průsečíkem přímky AS s plochou $\varkappa$ různým od S. Takto každému bodu roviny π je přiřazen právě jeden bod plochy $\varkappa$, přičemž různým bodům roviny jsou přiřazeny různé body kulové plochy. Průmětem rovinné representace $\mathscr{R}(G)$ bude representace grafu G na kulové ploše $\varkappa$. Obráceně, existuje-li representace grafu G na kulové ploše $\varkappa$, můžeme ji opět promítnout na tečnou rovinu π této plochy; pouze bod dotyku T musí být zvolen tak, aby bod S k němu protilehlý nebyl bodem této representace; to však lze snadno provést. Průmětem této representace je rovinná representace grafu G.

Promítání, kterého jsme užili, je takzvaná azimutální projekce. Používá se jí v kartografii. Máme-li nějakou mapu nakreslenou na globu, pomocí této projekce ji promítneme do roviny a dostaneme tak mapu v rovině. Středem promítání bývá obvykle buď některý zeměpisný pól, nebo některý bod na rovníku. Názorně si tuto projekci můžeme představit tak, že kulová plocha $\varkappa$ je ze skla, rovina π je projekční plátno, na němž kulová plocha leží, a v nejvyšším bodě kulové plochy máme bodový světelný zdroj. Takto se nám kresba na kulové ploše promítne na rovinu.

Závěrem uvedeme bez důkazu větu, kterou nezávisle na sobě dokázali I. Fáry, S. K. Stein a K. Wagner.

Věta IV.10. *Nechť G je rovinný graf. Pak existuje rovinná representace grafu G, v níž všem hranám grafu G odpovídají úsečky.*

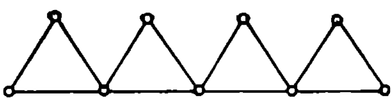
Studují se ovšem representace grafů i na jiných plochách. Tak například na anuloidu (plocha připomínající pneumatiku, viz obr. IV.10) existuje representace každého rovinného grafu, existují však i nerovinné grafy, které mají takovouto representaci (například K_7).



Obr. IV.10

Cvičení

1. Na obrázku IV.11 je rovinná representace určitého grafu. Najděte rovinnou representaci téhož grafu, která s ní není ekvivalentní.



Obr. IV.11

2. Nakreslete rovinnou representaci souvislého rovinného grafu, který obsahuje pouze jednu kružnici (sám však není kružnicí). Kolik oblastí má jeho rovinná representace? Kolik má tento graf hran, má-li n uzlů?

3. Nakreslete rovinnou representaci grafu získaného z K_5 odstraněním jedné hrany a sestrojte příslušný duální graf.

4. Kolik oblastí má rovinná representace rovinného pravidelného grafu stupně 4 o n uzlech?

5. Nechť graf G sestává z kružnice K, uzlu u nepatřícího této kružnici a všech hran spojujících uzel u se všemi uzly kružnice K (takovému grafu se říká kolo). Jaký je duální graf k takovémuto grafu?

6. Nakreslete rovinnou representaci grafu vzniklého z grafu $K_{3,3}$ odstraněním jedné hrany.

7. Rovinný graf má 30 hran a jeho počet uzlů je roven počtu oblastí. Kolik má uzlů?