Nerovnosti a odhady

Kapitola II. Cauchyova nerovnost

In: Alois Kufner (author): Nerovnosti a odhady. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1976. pp. 45–69.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403883

Kapitola II.

CAUCHYOVA NEROVNOST

V této kapitole se budeme většinou zabývat reálnými vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ atd. Půjde-li o komplexní vektory, výslovně to podotkneme.

Začněme hlavním tvrzením kapitoly:

Věta II.1. *Pro každou dvojici reálných vektorů* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *platí*

$$(\text{II.1}) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Rovnost zde nastává tehdy a jen tehdy, jsou-li vektory $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$ *úměrné.*

Nerovnosti (II.1) se říká *Cauchyova*, někdy však také *Schwarzova* nebo *Buňakovského* — podle matematiků, kteří ji zobecnili, resp. dokázali pro obecnější objekty než jsou vektory. Uvedeme zde opět několik rozdílných důkazů této nerovnosti, kterou můžeme psát též takto:

$$[A_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y})]^2 \leqq A_n(\mathbf{x}^2)\,.\,A_n(\mathbf{y}^2)$$

(dokažte!).

Cauchyova nerovnost se často zapisuje ve tvaru

$$(\text{II.2}) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,.\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}\,,$$

který dostaneme z (II.1) odmocněním.

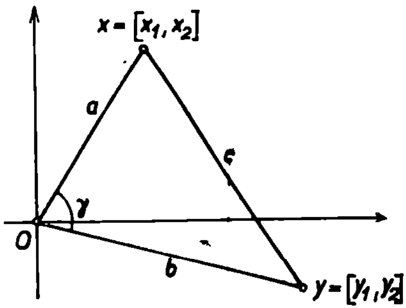
Ještě než začneme Cauchyovu nerovnost dokazovat, ukážeme, že má názorný geometrický význam:

Budiž $n = 2$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. Pro úsečky a, b, c z obr. 3 platí

$$a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, b = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\,, c = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Podle kosinové věty je $2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$ (viz označení z obr. 3) čili

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\,.$$



Obr. 3

Cauchyova nerovnost v zápisu (II.2) vypadá pro $n = 2$ takto:

$$|\, x_1 y_1 + x_2 y_2 \,| \leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

čili pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ to znamená, že

$$|\cos (\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}})\,| \leqq 1\,,$$

kde $\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}$ je úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{0x}$ a $\boldsymbol{0y}$ (a který jsme na obr. 3 označili γ).

Chápeme-li (pro $n \geqq 2$) $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jako vektory v n-rozměrném eukleidovském prostoru, má Cauchyova nerovnost stejný význam. Při této geometrické interpretaci Cauchyovy nerovnosti vynikne i význam úměrnosti vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ — pak je totiž $|\cos(\widehat{\mathbf{xy}})| = 1$ čili $\widehat{\mathbf{xy}} = 0$ nebo $\widehat{\mathbf{xy}} = \pi$.

Nyní dokážeme větu II.1.

První důkaz. Výraz

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} (x_k t + y_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)t^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)t + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \tag{II.3}$$

je pro každé reálné číslo t nezáporný, takže kvadratická rovnice $P(t) = 0$ má *nejvýše jeden* reálný kořen. To však znamená, že diskriminant této rovnice musí být nekladný, tj.

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \leqq 0\,;$$

odtud už plyne (II.1). — Rovnost v (II.1) je ekvivalentní s tím, že rovnice $P(t) = 0$ má *právě jeden* reálný kořen t_0. Pak však je z (II.3) vidět, že musí být $y_k = -t_0 x_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, tj. vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou úměrné.

Druhý důkaz vychází z tzv. *Lagrangeovy identity*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = \sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} (x_i y_k - x_k y_i)^2\,, \tag{II.4}$$

jejíž platnost čtenář snadno ověří. Protože pravá strana v (II.4) je nezáporná, plyne odtud ihned (II.1). — Má-li platit v (II.1) rovnost, musí být pravá strana v (II.4) rovna nule, tj. musí být $x_i y_k = x_k y_i$ pro všechny různé dvojice i, k. Zvolíme-li i pevně (a tak, aby bylo $x_i^2 + y_i^2 \neq 0$), znamená to, že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou úměrné.

Poznámka II.1. Také Lagrangeova identita má geometrický význam: Budiž $n = 2$ a použijme označení z obr. 3. Je

$$\cos^2\gamma = \frac{(x_1y_1 + x_2y_2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)},$$

a tedy

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)}$$

(proveďte příslušné výpočty!). Lagrangeova identita má pro $n = 2$ a pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ po úpravě tvar

$$\frac{(x_1y_1 + x_2y_2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} + \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)} = 1,$$

a to není nic jiného než známý vztah

$$\cos^2(\widehat{\mathbf{xy}}) + \sin^2(\widehat{\mathbf{xy}}) = 1.$$

Analogicky je tomu i pro $n > 2$.

Třetí důkaz věty II.1 využívá nerovnosti (I.17), kterou jsme dokázali už v úvodu a která platí pro každou dvojici reálných čísel a, b:

$$ab \leqq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

s rovností tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$. Zvolme libovolné nenulové číslo ε a položme $a = \varepsilon \mid x_k \mid$, $b = \frac{1}{\varepsilon} \mid y_k \mid$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Dostaneme pak n nerovností

$$\text{(II.5)} \qquad |x_k y_k| = (\varepsilon\,|x_k|)\left(\frac{1}{\varepsilon}\,|\,y_k\,|\right) \leqq \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 x_k^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,y_k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

a po jejich sečtení máme

$$\text{(II.6)} \qquad \sum_{k=1}^{n} |\,x_k y_k\,| \leqq \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} y_k^2\,.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon \neq 0$. Nerovnost (II.1) zřejmě platí, je-li $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$ nebo $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = 0$: pak je totiž $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ nebo $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$. Můžeme proto předpokládat, že $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$ a $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 > 0$, a položíme pak

$$\varepsilon^2 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}}\,.$$

Potom je

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)}$$

a z (II.6)máme

$$\sum_{k=1}^{n} |\,x_k y_k\,| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)}\,.$$

Protože $(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 = |\sum_{k=1}^{n} x_k y_k|^2 \leqq (\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|)^2$, plyne odtud (II.1). — Rovnost nastane tehdy a jen tehdy, platí-li rovnost ve všech nerovnostech v (II.5) a je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|$; musí tedy být $\varepsilon |x_k| = \frac{1}{\varepsilon} |y_k|$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a čísla x_k, y_k musí mít stejná znaménka, což znamená, že vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou úměrné.

Poznámka II.2. Další důkaz Cauchyovy nerovnosti najde čtenář v 33. svazku Školy mladých matematiků *O dynamickém programování* od J. Morávka.

Ve větě II.1 jsme předpokládali, že vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou reálné. Jsou-li x_j a y_j komplexní čísla, platí Cauchyova nerovnost ve tvaru

$$(\text{II.7}) \qquad |\sum_{k=1}^{n} x_k y_k|^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 . \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 .$$

Je totiž

$$|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leqq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|$$

a stačí nyní užít nerovnosti (II.1) pro reálné vektory $|\boldsymbol{x}|$ a $|\boldsymbol{y}|$.

Poznámka II.3. Také Cauchyova nerovnost je v jistém smyslu přesná; v dalším však uvidíme, že existuje celá škála výrazů $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které lze vložit mezi $(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2$ a $(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2)$. (Viz analogickou poznámku I.1.)

Uvedeme nyní úlohy na procvičení a příklady na užití Cauchyovy nerovnosti.

Úloha II.1. Dokažte, že pro každý reálný vektor $\boldsymbol{x}$ je

$$(\text{II.8}) \qquad (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 \leqq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \, ;$$

rovnost platí tehdy a jen tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Úloha II.2. Pro každé reálné číslo a platí vztah

$$3(1 + a^2 + a^4) \geqq (1 + a + a^2)^2 \, ;$$

dokažte a určete všechna reálná čísla a, pro která nastane rovnost. (4. ročník MO, kategorie B.)

Úloha II. 3. Buďte x, y, z nezáporná čísla. Dokažte pomocí (II.1), že platí

$$(\text{II.9}) \qquad \sqrt{xy + yz + zx} \leqq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, .$$

Využijte této nerovnosti a nerovnosti (II.1) k novému důkazu nerovnosti (I.48) z příkladu I.9.

Příklad II.1. Ve 2. ročníku MO byla v kategorii B zadána tato úloha: Dokažte, že pro libovolnou trojici reálných čísel a, b, c platí

$$(\text{II.10}) \qquad (a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 \geqq ab + bc + ca \, .$$

Vyřešíme tuto úlohu pomocí Cauchyovy nerovnosti. Z (II.1) především plyne, že

$$(\text{II.11}) \qquad ab + bc + ca \leqq a^2 + b^2 + c^2$$

(viz úlohu II.3). Protože

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 =$$
$$= a^2 + (b - c)^2 + 2a(b - c) + b^2 + (c - a)^2 +$$
$$+ 2b(c - a) + c^2 + (a - b)^2 + 2c(a - b) =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 +$$
$$+ (a - b)^2 \geqq a^2 + b^2 + c^2 ,$$

plyne (II.10) odtud a z (II.11). Dokonce jsme ukázali, že rovnost nastane v (II.10) tehdy a jen tehdy, je-li $a = b = c$.

Poznámka II.4. Zavedeme-li v předchozím příkladu označení x_1, x_2, x_3 místo a, b, c a budeme-li předpokládat, že $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) > \mathbf{0}$, můžeme pomocí označení z příkladů I.5 a I.7 zapsat nerovnost (II.10) takto:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leqq g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 .$$

Doporučujeme čtenáři, aby uvážil, zda tuto nerovnost je možno dokázat pomocí výsledků z kapitoly I a zda ji lze zobecnit pro $n > 3$.

Příklad II.2. Budiž $\mathbf{z}$ vektor, $\mathbf{z} > \mathbf{0}$, a položme $x_k = \sqrt{z_k}$, $y_k = \dfrac{1}{\sqrt{z_k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Pak je $x_k y_k = 1$ a nerovnost (II.1) dává

$$n^2 = (\sum_{k=1}^{n} 1)^2 \leqq (\sum_{k=1}^{n} z_k)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right);$$

to je jiný důkaz nerovnosti (I.32).

Příklad II.3. Nechť reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 1)$ splňují nerovnost

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq \sqrt{(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

Pak jsou všechna čísla x_i nezáporná, tj. $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$.

Dokážeme toto tvrzení sporem: Předpokládejme, že některé z čísel x_i je záporné — nechť je to třeba x_n. Protože $x_n < 0$, je

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n < x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} .$$

Z nerovnosti (II.8), použité pro $n - 1$ místo n, plyne

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leqq \sqrt{n-1} . \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2} ,$$

a protože

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2,$$

plyne ze všech čtyř výše uvedených nerovností vztah

$$\sqrt{(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)} < \\ < \sqrt{n-1} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} ,$$

což je spor.

Příklad II.4. Buďte z_i komplexní čísla a α_i kladná čísla taková, že $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} = 1$. Pak platí

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n|^2 \leqq \\ \leqq \alpha_1 |z_1|^2 + \alpha_2 |z_2|^2 + \ldots + \alpha_n |z_n|^2 . \tag{II.12}$$

Podle (II.1) totiž platí pro každý reálný vektor $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

$$(\sum_{i=1}^{n} \beta_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} . \beta_i \sqrt{\alpha_i}\right)^2 \leqq (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}) (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i^2) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i^2$$

a nyní stačí volit

$$\beta_i = \frac{|z_i|}{\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

je-li $\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k| \neq 0$ (v případě $\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k| = 0$ nerovnost (II.12) zřejmě platí).

Úloha II.4. Buďte $\alpha_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Dokažte, že pro reálné vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ platí

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k} y_k^2\right).$$

Různou volbou čísel α_k dostaneme řadu zajímavých nerovností.

Úloha II.5. Buďte $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ reálné vektory, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geqq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k}\,; \tag{II.13}$$

rovnost přitom nastává právě tehdy, jsou-li vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ úměrné.

Příklad II.5. Buďte $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ vektory, α, β čísla. Pak je

$$x_k y_k = (x_k^\alpha y_k^\beta)\,(x_k^{1-\alpha} y_k^{1-\beta})\,.$$

Použijeme-li nyní Cauchyovy nerovnosti (II.1), kde ovšem místo x_k volíme $x_k^\alpha y_k^\beta$ a místo y_k volíme $x_k^{1-\alpha} y_k^{1-\beta}$, dostaneme

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{2\alpha} y_k^{2\beta}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{2-2\alpha} y_k^{2-2\beta}\right).$$

Volbou čísel α a β dostáváme různé odhady. Pro $\alpha = 1$ a $\beta = 0$ nebo pro $\alpha = 0$ a $\beta = 1$ dostáváme nerovnost (II.1), pro $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ dostáváme zřejmou identitu, pro $\alpha = \beta = 0$ máme nerovnost

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 \leqq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2 ,$$

která ovšem ihned plyne např. z (II.8). Zvolíme-li $\beta = 1 - \alpha$, dostaneme symetrickou nerovnost

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^{2\alpha} y_k^{2-2\alpha}) (\sum_{k=1}^{n} x_k^{2-2\alpha} y_k^{2\alpha}) .$$

Pracujeme-li s komplexními čísly, lze Cauchyovu nerovnost trochu zlepšit. Buďte tedy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reálná čísla a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ čísla komplexní a předpokládejme pro jednoduchost (není to podstatné), že je $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k \geqq 0$. Pak platí

$$\text{(II.14)} \qquad |\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k|^2 \leqq \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2) (\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + |\sum_{k=1}^{n} z_k^2|) .$$

Tato nerovnost je ostřejší než nerovnost (II.7) (kde ovšem píšeme $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{z}$ místo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$): (II.7) plyne z (II.14), užijeme-li toho, že

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k^2| \leqq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 .$$

Dokažme (II.14): Položíme $z_k = x_k + iy_k$; pak je $|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k|^2 = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k)^2$, neboť podle předpokladu je

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = 0$. Užijeme-li Cauchyovy nerovnosti pro reálné vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{x}$ ve tvaru (II.1), máme

$$|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k|^2 = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k)^2 \leqq (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2)(\sum_{k=1}^{n} x_k^2).$$

Nerovnost (II.14) odtud plyne, použijeme-li toho, že

$$x_k^2 = \frac{1}{2}|z_k|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{Re} z_k^2$$

a že

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k^2 = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \leqq |\sum_{k=1}^{n} z_k^2|.$$

V Cauchyově nerovnosti vystupují dva vektory — $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Čtenář si jistě snadno odvodí další analogické odhady pro více vektorů. Uveďme alespoň dvě úlohy:

Úloha II.6. Buďte $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ reálné vektory. Pak platí

$$\text{(II.15)} \quad (\sum_{k=1}^{n} x_k y_k z_k)^4 \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^4)(\sum_{k=1}^{n} y_k^4)(\sum_{k=1}^{n} z_k^2)^2.$$

Úloha II.7. Buďte $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ reálné vektory. Pak platí

$$\text{(II.16)} \quad (\sum_{k=1}^{n} w_k x_k y_k z_k)^4 \leqq (\sum_{k=1}^{n} w_k^4)(\sum_{k=1}^{n} x_k^4)(\sum_{k=1}^{n} y_k^4)(\sum_{k=1}^{n} z_k^4).$$

Kdy nastává rovnost?

Budiž $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$. Rozdíl mezi pravou stranou a levou stranou v Cauchyově nerovnosti (II.1), tj. číslo

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2) - (\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2$$

známe: udává nám je Lagrangeova identita (II.4). Pro podíl obou těchto sčítanců dostáváme z (II.1) odhad zdola:

$$\frac{(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2)}{(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2} \geqq 1 .$$

Horní odhad udává tato nerovnost:

$$\text{(II.17)} \qquad \frac{(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2)}{(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{M(\mathbf{x})M(\mathbf{y})}{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}} + \sqrt{\frac{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}{M(\mathbf{x})M(\mathbf{y})}}\right]^2,$$

kde $m(\mathbf{x}) = m_n(\mathbf{x})$, $M(\mathbf{x}) = M_n(\mathbf{x})$ a podobně pro $\mathbf{y}$. Je $m(\mathbf{x}) > 0$ a $m(\mathbf{y}) > 0$, neboť předpokládáme $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$; tím spíše je tedy $M(\mathbf{x}) > 0$ a $M(\mathbf{y}) > 0$.

Úloha II.8. Dokažte nerovnost (II.17).

Uvedeme ještě dva příklady, v nichž je použito Cauchyovy nerovnosti:

Příklad II.6. Budiž $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \geqq 0$ a buďte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reálná čísla. Nechť jsou splněny tyto nerovnosti:

$$\text{(II.18)} \qquad x_1 \leqq y_1, \; x_1 + x_2 \leqq y_1 + y_2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leqq y_1 + y_2 + y_3, \ldots,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq y_1 + y_2 + \ldots + y_n.$$

Pak platí

$$\text{(II.19)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} y_k^2 .$$

Důkaz: Vynásobíme první nerovnost v (II.18) nezáporným číslem $x_1 - x_2$, druhou nerovnost nezáporným číslem $x_2 - x_3$ atd.; poslední nerovnost v (II.18) vynásobíme číslem x_n. Sečteme-li všechny takto vzniklé nerovnosti, dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

Pravou stranu odhadneme pomocí Cauchyovy nerovnosti ve tvaru (II.2) a máme

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} ;$$

odtud už plyne (II.19).

Příklad II.7. Označme $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = X$, $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = Y$, $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = Z$ a předpokládejme, že reálné vektory **x** a **y** nejsou úměrné. Pak je podle (II.1)

$$Z^2 < XY \quad \text{čili} \quad XY - Z^2 > 0 .$$

Budiž nyní $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ vektor, který vyhovuje těmto podmínkám:

$$\text{(II.20)} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \xi_i = 1 .$$

Pak platí

$$\text{(II.21)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \geqq \frac{X}{XY - Z^2} ;$$

rovnost zde nastává tehdy a jen tehdy, je-li

$$\xi_i = \frac{y_i X - x_i Z}{XY - Z^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{II.22}$$

Důkaz: Budiž $\eta_i = \dfrac{y_i X - x_i Z}{XY - Z^2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; pak je

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i = \frac{X . \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - Z . \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{XY - Z^2} = \frac{XZ - ZX}{XY - Z^2} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \eta_i = \frac{X . \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - Z . \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{XY - Z^2} = \frac{XY - Z^2}{XY - Z^2} = 1.$$

Vektor η tedy vyhovuje podmínkám (II.20).

Budiž ξ libovolný reálný vektor, který také vyhovuje podmínkám (II.20). Pak je

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \frac{X . \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i y_i - Z . \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i}{XY - Z^2} = \frac{X}{XY - Z^2};$$

speciálně lze za ξ volit vektor η a máme

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 = \frac{X}{XY - Z^2}.$$

Je tedy

(II.23)

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \frac{2X}{XY - Z^2} + \frac{X}{XY - Z^2} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \frac{X}{XY - Z^2},$$

a odtud už plyne (II.21). Rovnost v (II.21) může platit tehdy a jen tehdy, bude-li platit rovnost v (II.23); to však nastane právě tehdy, bude-li $\xi_i = \eta_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), což je (II.22) vzhledem k definici čísel η_i.

Poznámka II.5. Ve čtenáři může vzniknout dojem, že příklad II.7 je sice možná zajímavý, ale dosti umělý a neprůhledný: není vidět, jaký má smysl. Ale příkladu II.7 lze dát názorný geometrický význam: V úvodu této kapitoly jsme uvedli, že výraz $\frac{Z^2}{XY}$ souvisí s kosinem úhlu, který svírají vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$: $\frac{Z^2}{XY} = \cos^2(\widehat{\boldsymbol{xy}})$. Odtud je $\sin^2(\widehat{\boldsymbol{xy}}) = 1 - \frac{Z^2}{XY} = \frac{XY - Z^2}{XY}$; přitom je $X \neq 0$ i $Y \neq 0$, neboť vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ nejsou podle předpokladu úměrné a je tedy $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$.

Označme nyní $\Xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, kde ξ je vektor z příkladu II.7; z druhé podmínky v (II.20) plyne, že je $\xi \neq \boldsymbol{0}$ a tedy $\Xi > 0$. První podmínka v (II.20) říká, že vektor ξ je kolmý na vektor $\boldsymbol{x}$: je totiž

$$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{x}\xi}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i\right)^2}{X\,.\,\Xi} = 0 \quad \text{čili} \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{x}\xi}) = 0$$

čili $\widehat{\boldsymbol{x}\xi} = \frac{\pi}{2}$. Druhá podmínka v (II.20) říká, že

$$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{y}\xi}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\xi_i\right)^2}{Y\,.\,\Xi} = \frac{1}{Y\Xi}\,.$$

Nerovnost (II.21) znamená, že

$$\Xi \geqq \frac{1}{Y \sin^2 (\widehat{\mathbf{xy}})}$$

čili že

$$\sin^2 (\widehat{\mathbf{xy}}) \geqq \frac{1}{Y\Xi} = \cos^2 (\widehat{\mathbf{y}\xi}) ;$$

(II.22) znamená, že vektor ξ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Příklad II.7 lze tedy formulovat takto: *Buďte dány dva vektory* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, *které nejsou úměrné. Je-li* ξ *vektor kolmý k vektoru* $\mathbf{x}$, *platí*

$$\cos^2 (\widehat{\mathbf{y}\xi}) \leqq \sin^2 (\widehat{\mathbf{xy}}) ;$$

rovnost zde platí právě tehdy, je-li vektor ξ *jistou speciální lineární kombinací vektorů* $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$.

(Nakreslete si obrázek pro $n = 3$!)

Cauchyovu nerovnost můžeme psát ve tvaru

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqq$$
$$\leqq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) .$$

Lze se nyní ptát, zda platí nějaká analogická nerovnost, jestliže místo *součtů* budeme uvažovat v závorkách *rozdíly*. Nejjednodušší to bude v případě $n = 2$: ptáme se, zda je mezi čísly

$$L = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 \quad \text{a} \quad P = (x_1^2 - x_2^2)(y_1^2 - y_2^2)$$

nějaký vztah (třeba nerovnost), který by platil např. pro všechny nezáporné vektory (x_1, x_2), (y_1, y_2). Rozhodně *neplatí* pro všechny takové vektory nerovnost $L \leqq P$, neboť pro $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ a $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ je $L = 0$ a $P = -1$, není však zatím jasné, zda tedy pro všechny takové vektory je $L \geqq P$. Jistou odpověď (i pro $n > 2$) dává tato věta:

Věta II.2. *Buďte* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *nezáporná čísla a nechť je buď*

$$x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \tag{II.24}$$

nebo

$$y_0^2 > y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \,. \tag{II.25}$$

Pak platí

$$\begin{aligned}(x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots - x_ny_n)^2 &\geqq \\ \geqq (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2) &. \\ . (y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2) &.\end{aligned} \tag{II.26}$$

Rovnost nastane tehdy a jen tehdy, budou-li vektory $\tilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\tilde{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *úměrné.*

Poznámka II.6. Výrazy, stojící na pravé straně nerovnosnosti (II.26), souvisejí s Einsteinovou teorií relativity. Einsteinův princip relativity ukázal nutnost změny starých představ o prostoru a času; tyto změny jsou spojeny se jménem holandského fyzika H. A. Lorentze („Lorentzovy transformace"); německý matematik H. Minkowski pak přispěl podstatnou měrou k vyřešení úkolu vybudovat vhodný matematický aparát pro popis zákonů teorie relativity. Jak to však souvisí s nerovností (II.26)? V roce 1908 upozornil Minkowski v přednášce „Prostor a čas" na 80. sjezdu německých přírodovědců a lékařů, že „nikdo nepozoroval nějaké místo jinak než v určitém čase a čas jinak než na určitém místě". Zavedl čtyřrozměrný prostor tzv. „světobodů" $[x_1, x_2, x_3, t]$, kde x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice bodu v trojrozměrném prostoru a t je čas, a množina všech světobodů se dnes nazývá *časoprostor* nebo též *prostoročas*. V geometrii tohoto časoprostoru hrají důležitou roli výrazy $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2$ nebo $t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$; píšeme-li zde x_0 místo t, máme výrazy z věty II.2 (pro $n = 3$).

Větu II.2 lze dokázat opět různým způsobem. Jeden důkaz využívá Cauchyovy nerovnosti (II.1); ten však zde nebudeme uvádět a odkazujeme na třetí kapitolu, kde tímto postupem dokážeme větu obecnější (viz příklad III.6).

Dva důkazy, které zde provedeme, jsou vlastně analogiemi obou prvních důkazů věty II.1.

První důkaz. Nechť je splněna podmínka (II.24) a uvažujme kvadratický výraz

$$P(t) = (x_0 t - y_0)^2 - \sum_{k=1}^{n} (x_k t - y_k)^2 =$$

$$= (x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)\, t^2 - 2(x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k)\, t + (y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2)\,.$$

Protože koeficient u t^2 je kladný, bude $P(t) > 0$ pro čísla t, pro něž bude $|t|$ dosti velká. Zvolíme-li $t_0 = \dfrac{y_0}{x_0}$ (to lze, neboť vzhledem k (II.24) je $x_0 > 0$), bude

$$\text{(II.27)} \quad P(t_0) = P\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \left(x_k \frac{y_0}{x_0} - y_k\right)^2 \leqq 0\,,$$

a to znamená, že rovnice $P(t) = 0$ má *alespoň jeden* reálný kořen. Diskriminant této rovnice tedy musí být nezáporný, čili

$$4(x_0y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k)^2 - 4(x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)(y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2) \geqq 0\,,$$

a to je (II.26). Rovnost zde bude platit právě tehdy, bude-li rovnice $P(t) = 0$ mít *právě jeden* reálný kořen. Pro všechna t tedy bude $P(t) \geqq 0$ a speciálně bude $P\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \geqq 0$. Srovnání s (II.27) ukazuje, že tím jediným kořenem bude číslo t_0 a že to nastane právě tehdy, bude-li $y_k = \frac{y_0}{x_0} x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; to však znamená, že vektory $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou úměrné.

Předpokládali jsme, že je splněna podmínka (II.24). Je-li splněna podmínka (II.25), zaměníme pouze role vektorů $\tilde{\mathbf{x}}$ a $\tilde{\mathbf{y}}$.

Druhý důkaz využívá následující identity, kterou čtenář snadno ověří:

(II.28)

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)\,[(x_0y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k)^2 - (x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)(y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2)] =$$

$$= (y_0\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_0\sum_{k=1}^{n} x_ky_k)^2 + (x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)\,[(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2) -$$

$$- (\sum_{k=1}^{n} x_ky_k)^2]\,.$$

Je-li splněna podmínka (II.24), je pravá strana nezáporná, neboť poslední součinitel je nezáporný v důsledku Cauchyovy nerovnosti (II.1). Je-li tedy $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$, plyne nerovnost (II.26) z identity (II.28). Je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$, je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ a nerovnost (II.26) je zřejmě opět splněna. — Rovnost v (II.26) nastane právě tehdy, bude-li pravá strana v (II.28) rovna nule. To především znamená, že musí platit rovnost v Cauchyově nerovnosti pro vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tj. podle věty II.1 musí být tyto vektory úměrné: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ čili $\alpha x_k = \beta y_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Dále musí být $y_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x_0 \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$; čtenář si už snadno dokáže, že odtud plyne $\beta y_0 = \alpha x_0$, což znamená, že vektory $\tilde{\mathbf{x}}$ a $\tilde{\mathbf{y}}$ jsou úměrné.

Předpokládáme-li, že je splněna podmínka (II.25), musíme identitu (II.28) zřejmým způsobem upravit.

Úloha II.9. Ukažte, že nerovnost (II.26) platí i tehdy, bude-li $x_0^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ nebo $y_0^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$.

Vzniká nyní přirozená otázka, jaký vztah bude platit mezi levou a pravou stranou v (II.26), bude-li současně platit

$$x_0^2 < \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \qquad y_0^2 < \sum_{k=1}^{n} y_k^2 . \tag{II.29}$$

Bude pak v (II.26) platit obrácená nerovnost, tj. bude

$$\left(x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 < \left(x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) ? \tag{II.30}$$

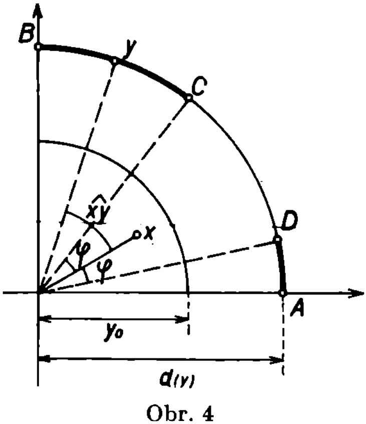
Úloha II.10. Ukažte, že v případě $n = 1$ nerovnost (II.30) neplatí nikdy. Pro $n \geqq 2$ nalezněte dvojici vektorů $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$, pro které platí (II.29) i (II.30), a jinou dvojici vektorů $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$, pro které (II.29) platí, (II.30) však nikoliv.

Poznámka II.7. Úkol, který je obsažen v závěru předchozího odstavce, stačí vyřešit pro $n = 2$; přechod k případu $n > 2$ je pak snadný: položíme $x_i = y_i = 0$ pro $i = 3, 4, \ldots, n$. Pro $n = 2$ však má nerovnost (II.30) — a pochopitelně i nerovnost (II.26) — geometrický význam.

Budiž tedy $n = 2$. Pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \geqq \mathbf{0}$ označme $d(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $d(\mathbf{y}) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ (je to vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{y}$ v rovině od počátku); pro jednoduchost zvolme ještě $x_0 = 0$, $y_0 > 0$. Nerovnosti (II.29) můžeme zapsat takto:

$$d^2(\mathbf{x}) > 0\,, \quad d^2(\mathbf{y}) > y_0^2\,;$$

druhá nerovnost říká, že bod $\mathbf{y}$ leží v prvním kvadrantu



Obr. 4

vně čtvrtkruhu se středem v počátku a o poloměru y_0 (viz obr. 4). Nerovnost (II.30) lze zapsat takto:

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 < (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2 - y_0^2) =$$
$$= d^2(\mathbf{x})d^2(\mathbf{y}) - y_0^2d^2(\mathbf{x})$$

čili po úpravě

$$\left(\frac{x_1y_1 + x_2y_2}{d(\mathbf{x})d(\mathbf{y})}\right)^2 < 1 - \left(\frac{y_0}{d(\mathbf{y})}\right)^2.$$

Připomeneme-li si geometrický význam Cauchyovy nerovnosti (viz začátek této kapitoly), lze tuto nerovnost zapsat takto:

$$\cos^2(\widehat{\mathbf{xy}}) < 1 - \left(\frac{y_0}{d(\mathbf{y})}\right)^2$$

čili

$$\sin^2(\widehat{\mathbf{xy}}) > \left(\frac{y_0}{d(\mathbf{y})}\right)^2.$$

Označíme-li ještě symbolem φ úhel mezi 0 a $\frac{\pi}{2}$, pro který platí

(II.31) $$\sin\varphi = \frac{y_0}{d(\mathbf{y})},$$

má vlastně nerovnost (II.30) tento význam:

$$\sin^2(\widehat{\mathbf{xy}}) > \sin^2\varphi$$

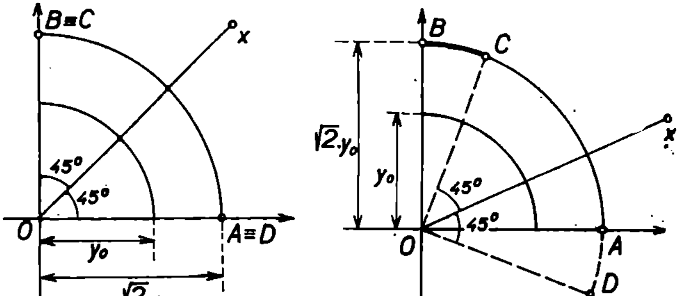
čili

(II.32) $$|\sin(\widehat{\mathbf{xy}})| > \sin\varphi.$$

Zvolme nyní $x_0 = 0$, x_1, x_2 a y_0 pevně a vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ zvolme tak, aby se neměnilo číslo $d(\mathbf{y})$ (a aby bylo $d(\mathbf{y}) > y_0$ čili $d^2(\mathbf{y}) > y_0^2$); odpovídající body (y_1, y_2) budou pak ležet na čtvrtkružnici o poloměru

$d(\mathbf{y})$ (viz obr. 4). Najdeme ještě φ tak, aby platilo (II.31), a úhel φ naneseme na obě strany od úsečky $\mathbf{0x}$. Ty body $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, pro které platí (II.32) — a tedy (II.30) —, leží na čtvrtkružnici $\widehat{AB}$ vně oblouku $\widehat{CD}$; na oblouku $\widehat{CD}$ (včetně obou koncových bodů) leží pak ty body $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, pro které platí za předpokladů (II.29) nerovnost (II.26).

Velikost úhlu φ závisí pochopitelně na čísle $d(\mathbf{y})$, které lze volit (ovšem tak, aby bylo $d(\mathbf{y}) > y_0$); čím větší bude $d(\mathbf{y})$, tím menší bude úhel φ a tím větší část z oblouku $\widehat{AB}$ zaberou ta $\mathbf{y}$, která leží vně oblouku $\widehat{CD}$ a pro něž tedy za předpokladů (II.29) platí (II.30). Záleží pochopitelně také na poloze bodu $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$: Volíme-li $x_1 = x_2$ a $d(\mathbf{y}) = \sqrt{2}\,.\,y_0$, bude $\varphi = 45°$ a oblouk $\widehat{CD}$ bude totožný s obloukem $\widehat{AB}$, takže (II.30) neplatí pro *žádné* $\mathbf{y}$ takové, že $d(\mathbf{y}) = \sqrt{2}\,.\,y_0$. Jiná situace však nastane, volíme-li $x_1 > x_2$ (a opět $d(\mathbf{y}) = \sqrt{2}\,.\,y_0$) — pak se oblouk $\widehat{CD}$ překryje jen s částí oblouku $\widehat{AB}$ a najdeme vektory $\mathbf{y}$, pro něž platí (II.30) (viz obr. 5a, 5b).



Obr. 5a, b

Pomocí těchto geometrických úvah tedy můžeme řešit úlohu II.10.

V poznámce II.3 jsme se zmínili o výrazech, které lze vložit mezi levou a pravou stranu v Cauchyově nerovnosti. V následující kapitole se setkáme s řadou takových výrazů; zde uveďme na závěr alespoň jeden:

Úloha II.11. Ukažte, že pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ platí

$$(\text{II.33}) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) \leqq$$

$$\leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right),$$

a zjistěte, kdy platí všude rovnosti.