PŘÍPRAVNÁ KAPITOLA

V dalším podstatně využijeme tohoto pomocného tvrzení:

Věta P.1. *Budiž α reálné číslo, $t > 0$. Pak platí*

(P.1) $\quad t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \geqq 0$ *pro* $\alpha > 1$ *a pro* $\alpha < 0$,

(P.2) $\quad t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \leqq 0$ *pro* $\alpha \in (0, 1)$.

Rovnost v (P.1) *i v* (P.2) *nastává tehdy a jen tehdy, je-li* $t = 1$.

Poznámka P.1. Pro hodnoty $\alpha = 0$ a $\alpha = 1$ není ve větě P.1 vysloveno žádné tvrzení. Je však ihned vidět, že pro tyto hodnoty platí v (P.1) rovnost pro všechna $t \geqq 0$.

Úloha P.1. Předpokládejte, že platí (P.1) pro $\alpha > 1$, a dokažte, že pak platí (P.1) pro $\alpha < 0$ a (P.2) pro $\alpha \in (0, 1)$.

Z předcházející úlohy plyne, že stačí dokázat (P.1) pro $\alpha > 1$, a tím už bude dokázána celá věta P.1.

Budiž $s > 0$ a budiž n přirozené číslo. Pak je

$$\frac{s^{n+1} - 1}{n + 1} - \frac{s^n - 1}{n} = \frac{s - 1}{n + 1}(s^n + s^{n-1} + \ldots + s + 1) -$$

$$- \frac{s - 1}{n}(s^{n-1} + \ldots + s + 1) =$$

$$= \frac{s - 1}{n(n + 1)}(ns^n - s^{n-1} - \ldots - s - 1);$$

odtud plyne (musíme rozlišit případy $0 < s \leqq 1$ a $s > 1$), že

$$\text{(P.3)} \qquad \frac{s^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{s^n - 1}{n} \geqq 0$$

a že rovnost nastane tehdy a jen tehdy, je-li $s = 1$.

Jsou-li nyní m a n přirozená čísla, $m > n$, plyne z (P.3)

$$\frac{s^m - 1}{m} - \frac{s^n - 1}{n} \geqq 0 \, ;$$

položíme-li zde $s = t^{1/n}$ $(t > 0)$ dostáváme nerovnost

$$t^{m/n} - 1 - \frac{m}{n}(t - 1) \geqq 0 \, ,$$

což je nerovnost (P.1) pro racionální čísla $r > 1$:

$$\text{(P.4)} \qquad t^r - rt + r - 1 \geqq 0, \quad r > 1 \quad \text{racionální;}$$

tato nerovnost je ostrá pro $t \neq 1$.

Je-li nyní α iracionální číslo, $\alpha > 1$, existuje posloupnost $\{r_k\}$ racionálních čísel $r_k > 1$ tak, že $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = \alpha$. Pro každé r_k platí (P.4); přejdeme-li tam k limitě pro $k \to \infty$, dostáváme (P.1) i pro $\alpha > 1$. Tato nerovnost už ovšem nemusí být ostrá pro $t \neq 1$. To však „napravíme" takto: Je-li $\alpha > 1$ a $t \neq 1$ $(t > 0)$, položíme

$$\alpha = r . \beta, \text{ kde } r \text{ je racionální číslo, } r > 1, \beta > 1.$$

Užijeme-li nerovnosti (P.4) pro t^β místo pro t $(t^\beta \neq 1)$, bude

$$(t^\beta)^r - rt^\beta + r - 1 > 0 \quad \text{čili} \quad (t^\beta)^r > rt^\beta - r + 1.$$

Pak však je

$$\begin{aligned} t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 &= (t^\beta)^r - r\beta t + r\beta - 1 > \\ &> rt^\beta - r + 1 - r\beta t + r\beta - 1 = \\ &= r(t^\beta - \beta t + \beta - 1) \geqq 0\,, \end{aligned}$$

takže nerovnost (P.1) je opět ostrá pro $\alpha > 1$ a $t \neq 1$.

Poznámka P.2. Větu P.1 lze ovšem snadno dokázat, ovládáme-li základy diferenciálního počtu.

V dalším budeme používat označení, které nyní zavedeme: Budiž n přirozené číslo, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ komplexní čísla; n-tici těchto čísel budeme značit $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

a budeme hovořit o (komplexním) vektoru $\boldsymbol{x}$. Budou-li čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reálná, řekneme, že vektor $\boldsymbol{x}$ je reálný. Někdy budeme hovořit o bodu $\boldsymbol{x}$ — bude tím míněn bod n-rozměrného eukleidovského prostoru, který má souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

A nyní označení:

$\boldsymbol{1} = (1, 1, \ldots, 1)$; $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$;

$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ znamená, že $x_k \geqq 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ (hovoříme pak o nezáporném vektoru $\boldsymbol{x}$);

$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ znamená, že $x_k > 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ (hovoříme pak o kladném vektoru $\boldsymbol{x}$);

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ znamená, že $x_k \neq 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ (tj. pro *všechna* k);

$\boldsymbol{x} \not\equiv \boldsymbol{0}$ znamená, že $x_k \neq 0$ *alespoň pro jedno* z čísel k;

$$\frac{1}{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{pro } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\,;$$

$\mathbf{x}^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$ pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ a kladné číslo p resp. pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a reálné číslo p; speciálně je

$\sqrt{\mathbf{x}} = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n})$;

$|\mathbf{x}| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$;

$m_n(\mathbf{x})$ je pro reálný vektor $\mathbf{x}$ *nejmenší* z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$M_n(\mathbf{x})$ je pro reálný vektor $\mathbf{x}$ *největší* z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Je-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, pak

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,

$\mathbf{x} . \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n)$,

$c . \mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$ pro komplexní číslo c,

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}\right) \quad \text{pro } \mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

$\mathbf{x} = \mathbf{y}$ znamená, že $x_k = y_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou **úměrné**, a zapíšeme to symbolem

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y},$$

existují-li reálná čísla α, β tak, že $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ a že

$$\alpha \mathbf{x} = \beta \mathbf{y}$$

(tj. $\alpha x_k = \beta y_k$ pro $k = 1, 2. \ldots, n$).