VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) 1. b) 0. c) 2.

2. Stačí v schéme (5) definovať (pre $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$):

$$A(i, j) = \begin{cases} i + j - 1, \text{ ak } i + j - 1 \leq n; \\ i + j - 1 - n, \text{ ak } i + j - 1 > n. \end{cases}$$

Pre $n = 5$ dostávame latinský štvorec (4).

3. $L_6 = 6!5!\, R_6 = 720.120.9\,408 = 812\,851\,200$.

4. a) 2. b) 4.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Označme znakom $V'(1)$ počet výskytov prvku p_1 v prvých r riadkoch a posledných $n - s$ stĺpcoch latinského štvorca B rádu n, ktorý vznikol rozšírením danej matice A. Označme ďalej znakom $V''(1)$ počet výskytov prvku p_1 v posledných $n - r$ riadkoch a prvých s stĺpcoch v B. Zrejme $V(1) + V'(1) + V''(1) \leq n$, $V(1) + V'(1) = r$, $V(1) + V''(1) = s$, odkiaľ $V(1) = (V(1) + V'(1)) + (V(1) + V''(1)) - (V(1) + V'(1) + V''(1)) \geq r + s - n$.

7. Hľadaný počet je $D_{20} = N(2, 20) \doteq 20!\mathrm{E} \doteq 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 . 0{,}367\,879\,441\,171\,442\,321\,60 \doteq 895\,014\,631\,192\,902\,120{,}965$, takže

$D_{20} = 895\,014\,631\,192\,902\,121$. Teda na zostavenie 20 „nemanželských" párov je skoro trilión možností.

8. Pravdepodobnosť sa približne rovná číslu a) $E = 0{,}367\,879\ldots$; b) E; c) $\frac{1}{2}E$; d) $\frac{1}{6}E$; e) $1 - \frac{8}{3}E$. V percentách je to približne a) 36,8 %; b) 36,8 %; c) 18,4 %; d) 6,1 %; e) 1,9 %. Pre dôkaz stačí uvážiť, že pravdepodobnosť stretnutia práve k z daných n párov je $D_{n,k}/n!$, čo sa podľa (34) rovná

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right),$$

a to sa zasa približne rovná číslu $E/k!$ (ak $n \geq 9$). Teda výsledok cvičenia by sa podstatne nezmenil, keby sme počet 20 manželských párov nahradili ľubovoľným iným počtom $n \geq 9$. Je prekvapujúce, že napr. aj pri stotisíc pároch pravdepodobnosť, že sa stretne viac manželských párov než 3, je menšia než 2 %.

9. Výsledky: a) $8! = 40\,320$. b) $D_8 = 14\,833$. Dôkazy: Ak použijeme algebraickú šachovú notáciu, pri ktorej a, b, ..., h sú stĺpce šachovnice a 1, 2, ..., 8 sú jej rady (matematik by asi povedal riadky), každé riešenie úlohy a) možno vyjadriť v tvare matice

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \end{bmatrix},$$

kde $[p_1, p_2, \ldots, p_8]$ je poradie prvkov 1, 2, ... 8, ktorých je 8! Ak aj stĺpce označíme 1, 2, ..., 8, každé riešenie úlohy b) možno vyjadriť v tvare normalizovaného latinského obdĺžnika typu 2×8:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \end{bmatrix}.$$

Ich počet je $N(2, 8) = D_8$.

10. Pre každé prirodzené číslo n platí $D_n - D_{n,1} = (-1)^n$. Aby sme to dokázali, stačí použiť (34) a (30):

$$D_n - D_{n,1} = D_n - nD_{n-1} = nD_{n-1} + (-1)^n - nD_{n-1} = \\ = (-1)^n.$$

11. Pre každé prirodzené číslo n platí

$$R(2, n + 1) = nR(2, n) - \frac{R(2, n) + (-1)^n}{n}.$$

Dokáže sa to zo vzťahov (20) a (30).

12. Označme mužov A, B, C, D, E a ich manželky (v danom poradí) a, b, c, d, e. Ak muži sedia okolo stola v základnom poradí $ABCDE$ (v smere hodinových ručičiek), ich manželky môžu byť rozsadené ľubovoľným z nasledujúcich 13 poradí (taktiež v smere hodinových ručičiek), začínajúc od miesta medzi mužmi A a B: *caebd*, *cdeab*, *ceabd*, *cebad*, *daebc*, *daecb*, *deabc*, *deacb*, *debac*, *eabcd*, *edabc*, *edacb*, *edbac*.

13. $$N(3, 8) = D_8D_0U_8 + \binom{8}{1}D_7D_1U_6 + \binom{8}{2}D_6D_2U_4 + \\ + \binom{8}{3}D_5D_3U_2 + \binom{8}{4}D_4D_4U_0 = 70\,299\,264\,.$$

14.

n	1	2	3	4	5	6
$L(1, n)$	1	2	6	24	120	720
$L(2, n)$	0	2	12	216	5 280	190 800
$L(3, n)$	0	0	12	576	66 240	15 321 600
$L(4, n)$	0	0	0	576	161 280	
$L(5, n)$	0	0	0	0	161 280	812 851 200
$L(6, n)$	0	0	0	0	0	812 851 200

15.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(2,n)$	0	1	1	3	11	53	309	2 119	16 687	148 329
$R(3,n)$	0	0	1	4	46	1 064	35 792	1 673 792	103 443 808	8 154 999 232

16. Áno. Stačí použiť ľubovoľný grécko-latinský štvorec rádu 4.

17. a) Latinské štvorce A_2 a A_3 zo (43). b), c), d) Neexistujú (dokonca ani nenormalizované!).

18. Definujme latinské štvorce $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_{n-1}$ rádu n takto:

$$A_k(i, j) \equiv ki + j - k \pmod{n},$$
$$A_k(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

pre

$$i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$j = 1, 2, \ldots, n;$$
$$k = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

(Pre $n = 5$ a $n = 3$ dostávame latinské štvorce (41) resp. (42)).

Poznamenajme, že ak a, b sú celé čísla a n je prirodzené číslo, tak zápis $a \equiv b \pmod{n}$ (čítaj: a je *kongruentné* s b modulo n) znamená, že čísla a, b majú ten istý zvyšok pri delení číslom n. Inými slovami, $a = b + mn$ pre nejaké celé číslo m.

Ľahko sa zistí, že všetky členy v každom riadku ľubovoľnej z týchto matíc A_k sú navzájom rôzne. Z podmienky, že n je prvočíslo, vyplýva, že to isté platí aj pre stĺpce, t. j. sú to latinské štvorce, a že tieto sú navzájom ortogonálne. Podrobný dôkaz tu neuvádzame, ľahko si ho však doplní každý čitateľ, ktorý ovláda základy teórie čísel (počítanie s kongruenciami).

19. Napr.

0,1	4,5			3,9	2,7			6,8
7,9	0,2	5,6			4,1	3,8		
	8,1	0,3	6,7			5,2	4,9	
		9,2	0,4	7,8			6,3	5,1
6,2			1,3	0,5	8,9			7,4
8,5	7,3			2,4	0,6	9,1		
	9,6	8,4			3,5	0,7	1,2	
		1,7	9,5			4,6	0,8	2,3
3,4			2,8	1,6			5,7	0,9

20. Nech existuje roomovský štvorec rádu 3 nad množinou M. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Nech dvojica $\{1, 2\}$ sa nachádza v i-tom riadku a j-tom stĺpci. V i-tom riadku musí byť ešte jedna dvojica, a to $\{3, 4\}$. V j-tom stĺpci musí byť takisto ešte jedna dvojica, a to $\{3, 4\}$. To je však nemožné, lebo dvojica $\{3, 4\}$ by bola v roomovskom štvorci dvakrát.