IV. kapitola. Latinské pravouholníky typu $3 \times n$ alebo ako rozsadiť hostí pri stole

IV. kapitola

LATINSKÉ PRAVOUHOLNÍKY TYPU $3 \times n$ alebo AKO ROZSADIŤ HOSTÍ PRI STOLE

S latinskými pravouholníkmi typu $3 \times n$ súvisí nasledujúca *úloha o hosťoch* známa pod francúzskym názvom „le problème des ménages“:

Dané je prirodzené číslo $n \geq 2$. Na večierok bolo pozvaných n manželských párov. Koľkorakým spôsobom možno týchto $2n$ hostí posadiť okolo okrúhleho stola s $2n$ stoličkami tak, aby sa muži a ženy pravidelne striedali a aby žiaden muž nesedel vedľa svojej manželky?

Ľahko zistíme, že pre $n = 2$ úloha nemá riešenie a pre $n = 3$ má práve 12 riešení, z ktorých každé je určené už rozsadením mužov. Ak sú muži označení A, B, C a ich manželky v danom poradí a, b, c, sú to tieto rozsadenia:

A	A	B	B	C	C
$b\ \ c$	$c\ \ b$	$a\ \ c$	$c\ \ a$	$a\ \ b$	$b\ \ a$
$C\ B$	$B\ C$	$C\ A$	$A\ C$	$B\ A$	$A\ B$
a	a	b	b	c	c
b	c	a	c	a	b
$C\ A$	$B\ A$	$C\ B$	$A\ B$	$B\ C$	$A\ C$
$a\ \ c$	$a\ \ b$	$b\ \ c$	$b\ \ a$	$c\ \ b$	$c\ \ a$
B	C	A	C	A	B

Prv, než sa zoznámime s riešením úlohy o hosťoch, zavedieme jeden pomocný pojem: Latinský pravouholník typu $3 \times n$ nazveme *silne normalizovaný*, ak má tvar

$$(36) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{n-1} & z_n \end{bmatrix}$$

Ďalej pre $n \geq 2$ označme znakom U_n počet silne normalizovaných latinských pravouholníkov typu $3 \times n$. Keďže neexistuje latinský pravouholník typu 3×2, platí $U_2 = 0$, Ďalej existuje jediný silne normalizovaný latinský pravouholník typu 3×3, a to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a práve dva typu 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Teda $U_3 = 1$, $U_4 = 2$. Ako neskôr uvidíme, bude výhodné položiť $U_0 = 1$, $U_1 = -1$, aj keď tieto čísla nemajú priamy súvis s počtom silne normalizovaných latinských pravouholníkov. Teraz už môžeme vysloviť teorému:

Teoréma 9. *Pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí: Úloha o hosťoch má práve*

$$2n!U_n$$

riešení, kde U_n je počet silne normalizovaných latinských pravouholníkov typu $3 \times n$.

Dôkaz. Aby sme si úlohu o hosťoch zjednodušili, predpokladajme, že stoličky uložené okolo stola sú striedavo hnedé a čierne a že muži sú už určitým spôsobom rozsadení. Zrejme buď všetci sedia na hnedých stoličkách (a takéto rozsadenie možno urobiť $n!$ spôsobmi) alebo všetci na čiernych stoličkách (opäť je $n!$ spôsobov). Celkový počet rozsadení mužov je

$$n! + n! = 2n!$$

Ak majú muži pevne určené miesta, pre n žien ostáva n stoličiek, ktoré môžu byť obsadené v podstate $n!$ spôsobmi. V danej úlohe však ich počet zmenšuje podmienka, že manželia nemajú sedieť vedľa seba. Aby sme mohli tieto možnosti rozobrať, očíslujme mužov, tak ako sedia vedľa seba, číslami $1, 2, \ldots, n$ (pričom číslovanie môžeme začať od ktoréhokoľvek muža a okolo stola postupujeme napr. v smere hodinových ručičiek). Očíslujme voľné stoličky pri stole taktiež $1, 2, \ldots, n$, a to tak, aby po pravej strane muža s číslom i bola vždy voľná stolička číslo i (pre $i = 1, 2, \ldots, n$). Nakoniec očíslujme ženy rovnakými číslami ako majú ich manželia.

Podľa podmienok úlohy na voľnú stoličku s číslom 1 si nesmie sadnúť žena s číslom 1 ani s číslom n, na stoličku 2 žena 2 ani žena 1 atď., až na miesto n si nesmie sadnúť žena n ani žena $n - 1$. Predpokladajme, že v súlade s týmito pravidlami si na stoličku 1 sadne žena, ktorú označíme z_1, na stoličku 2 si sadne žena z_2 atď. až na stoličku n si sadne žena z_n.

Ľahko sa presvedčíme, že potom (36) je silne normalizovaný latinský pravouholník typu $3 \times n$. Žena z_1 totiž sedí vedľa mužov 1 a n, teda nesmie mať číslo 1 ani n. Podobne žena z_2 sediaca medzi mužmi 2 a 1 nesmie mať číslo 2 ani 1 atď. To je však práve podmienka, aby žiaden stĺpec matice (36) neobsahoval dva rovnaké členy. Ďalšie podmienky, aby (36) bol silne normalizovaný latinský pravouholník, sú zrejme splnené.

Obrátene, každému silne normalizovanému latinskému pravouholníku typu $3 \times n$ zodpovedá riešenie našej úlohy (pri danom rozsadení mužov). Keďže týchto sme mohli rozsadiť $2n!$ spôsobmi, je počet riešení úlohy o hosťoch daný číslom $2n!U_n$, čo sme mali dokázať.

Ukážeme si, akým spôsobom možno vypočítať čísla U_n:

Teoréma 10 (J. Touchard 1934, I. Kaplansky 1943). *Pre každé prirodzené číslo n platí:*

$$U_n = 2n\left(\frac{1.2\ldots(2n-1)}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} - \frac{2.3\ldots(2n-2)}{n(n+1)\ldots(2n-2)} + \right.$$
$$+ \frac{3.4\ldots(2n-3)}{(n-1)n\ldots(2n-4)} - \ldots +$$
$$+ (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)\ldots(2n-k)}{(n-k+2)(n-k+3)\ldots(2n-2k+2)} +$$
$$\left. + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{(n-1)n(n+1)}{3.4} + (-1)^{n-1}\frac{n}{2}\right) + 2(-1)^n.$$

Dôkaz nevykonáme, keďže je zdĺhavý a pomerne obťažný.

Príklad. Riešte úlohu o hosťoch pre 5 manželských párov. Riešenie: Podľa teorémy 10

$$U_5 = 10\left(\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{6.7.8.9.10} - \frac{2.3.4.5.6.7.8}{5.6.7.8} + \right.$$
$$\left. + \frac{3.4.5.6.7}{4.5.6} - \frac{4.5.6}{3.4} + \frac{5}{2}\right) - 2 =$$
$$= 10\left(12 - 24 + 21 - 10 + \frac{5}{2}\right) - 2 = 13.$$

Podľa teorémy 9 úloha o hosťoch má

$$2.5!.U_5 = 2.120.13 = 3\,120$$

riešení.

Aj pri výpočte čísel U_n možno s výhodou použiť rekurentný vzťah:

Teoréma 11 (A. Cayley 1878). *Pre každé prirodzené číslo $n \geq 3$ platí:*

$$U_n = nU_{n-1} + \frac{nU_{n-2} + 4(-1)^{n+1}}{n-2},$$

pričom $U_1 = -1$, $U_2 = 0$.

Dôkaz pre jeho komplikovanosť opäť vynechávame.

S použitím teorémy 11 ľahko môžeme postupne vypočítavať čísla U_3, U_4, U_5, ..., vychádzajúc z hodnôt $U_1 = -1$, $U_2 = 0$:

$$U_3 = 3U_2 + \frac{3U_1 + 4}{1} = 1,$$

$$U_4 = 4U_3 + \frac{4U_2 - 4}{2} = 2,$$

$$U_5 = 5U_4 + \frac{5U_3 + 4}{3} = 13,$$

$$U_6 = 6U_5 + \frac{6U_4 - 4}{4} = 80,$$

$$U_7 = 7U_6 + \frac{7U_5 + 4}{5} = 579,$$

$$U_8 = 8U_7 + \frac{8U_6 - 4}{6} = 4738,$$

$$U_9 = 9U_8 + \frac{9U_7 + 4}{7} = 43\,387,$$

$$U_{10} = 10U_9 + \frac{10U_8 - 4}{8} = 439\,792$$

atď.

Zhrňme čísla D_n známe z úlohy o stretnutiach a čísla U_n z úlohy o hosťoch do tabuľky:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1854	14 833	133 496	1 334 961
U_n	1	−1	0	1	2	13	80	579	4738	43 387	439 792

Čísla U_n (pre $n \geq 2$) vyjadrujú počet silne normalizovaných latinských pravouholníkov typu $3 \times n$. Pomocou čísel D_n a U_n však možno vyjadriť aj počet $N(3, n)$ všetkých normalizovaných latinských pravouholníkov typu $3 \times n$:

Teoréma 12 (J. Riordan 1944). *Pre každé prirodzené číslo n platí:*

$$N(3, n) = \binom{n}{0} D_n D_0 U_n + \binom{n}{1} D_{n-1} D_1 U_{n-2} + \\ + \binom{n}{2} D_{n-2} D_2 U_{n-4} + \ldots + \binom{n}{m} D_{n-m} D_m U_{n-2m},$$

kde m je najväčšie z celých čísel x, ktoré spĺňajú vzťah $x \leq \frac{n}{2}$.

Poznámka. Číslo m sa nazýva *„celá časť"* čísla $\frac{n}{2}$ a označuje sa symbolom $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Dôkaz teorémy 12 zasa vynecháme pre jeho obťažnosť.

J. Riordan r. 1945—46 dokázal, že pre veľké n sa $N(3, n)$ približne rovná číslu $(n!)^2e^{-3}$, kde $e = 2{,}718\ldots$. Tento výsledok zovšeobecnili P. Erdös a I. Kaplansky r. 1946 a K. Yamamoto 1951 a ukázali, že počet $N(m, n)$ normalizovaných latinských pravouholníkov typu $m \times n$ sa približne rovná číslu

$$(n!)^{m-1}e^{-\binom{m}{2}},$$

čiže počet $L(m, n)$ všetkých latinských pravouholníkov typu $m \times n$ nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa približne rovná číslu

$$(n!)^m e^{-\binom{m}{2}},$$

ak m je „malé" vzhľadom na n; zhruba povedané, ak $m < \sqrt[3]{n}$.

Pre $m = 2$ dostávame výsledok, ktorý sme už spomínali v III. kapitole: číslo $N(2, n) = D_n$ sa približne rovná $n!e^{-1}$, teda $L(2, n)$ sa približne rovná $(n!)^2e^{-1}$.

Príklad. Určete počet normalizovaných latinských pravouholníkov typu 3×7.

Riešenie:

$$N(3, 7) = \binom{7}{0} D_7D_0U_7 + \binom{7}{1} D_6D_1U_5 + \binom{7}{2} D_5D_2U_3 +$$
$$+ \binom{7}{3} D_4D_3U_1 = 1.1\,854.1.579 + 7.265.0.13 +$$
$$+ 21.44.1.1 + 35.9.2.(-1) = 1\,073\,760\,.$$

Keby sme použili Riordanov odhad, dostali by sme

$$N(3, 7) \doteq (7!)^2 e^{-3} \doteq 25\,401\,600 . 0{,}049\,787\,067 \doteq \doteq 1\,264\,671 .$$

Pomerne veľká odchýlka od správneho výsledku neprekvapuje, keďže $m = 3$ nie je „malé“ v porovnaní s $n = 7$; dokonca neplatí ani podmienka $m < \sqrt[3]{n}$.

Na základe doterajších výsledkov z I.—IV. kapitoly môžeme vypočítať hodnoty $N(m, n)$ pre $m \leq 7$, $n \leq 7$, ktoré sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

n	1	2	3	4	5	6	7
$N(1, n)$	1	1	1	1	1	1	1
$N(2, n)$	0	1	2	9	44	265	1 854
$N(3, n)$	0	0	2	24	552	21 280	1 073 760
$N(4, n)$	0	0	0	24	1 344		
$N(5, n)$	0	0	0	0	1 344	1 128 960	
$N(6, n)$	0	0	0	0	0	1 128 960	12 198 297 600
$N(7, n)$	0	0	0	0	0	0	12 198 297 600

Napr. $N(6, 6)$ sme vypočítali pomocou (20) a (12) takto:

$$N(6,6) = \frac{5!}{0!} R(6, 6) = 120 R_6 = 120 . 9\,408 = 1\,128\,960 .$$

Ak použijeme vzťah (20) z teorémy 3, môžeme z predchádzajúcej tabuľky vypočítať príslušné hodnoty $R(m, n)$, t. j. počty redukovaných latinských pravouholníkov typu $m \times n$. Takýmto spôsobom môžeme vypočítať hodnoty z nasledujúcej tabuľky:

n	1	2	3	4	5	6	7
$R(1, n)$	1	1	1	1	1	1	1
$R(2, n)$	0	1	1	3	11	53	309
$R(3, n)$	0	0	1	4	46	1 064	35 792
$R(4, n)$	0	0	0	4	56		
$R(5, n)$	0	0	0	0	56	9 408	
$R(6, n)$	0	0	0	0	0	9 408	16 942 080
$R(7, n)$	0	0	0	0	0	0	16 942 080

Cvičenia

12. Nájdite všetky riešenia úlohy o hosťoch pre $n = 5$ pri pevnom rozsadení mužov.

13. Vypočítajte číslo $N(3, 8)$.

14. Zostrojte tabuľku hodnôt $L(m, n)$ pre $m \leq 6$, $n \leq 6$, $[m, n] \neq [4, 6]$.

15. Vypočítajte čísla $R(2, n)$ a $R(3, n)$ pre $n \leq 10$.