Latinské štvorce

III. kapitola. Latinské pravouholníky typu $2 \times n$ alebo ako nezasielať listy

In: Juraj Bosák (author): Latinské štvorce. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1976. pp. 32–43.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403868

III. kapitola

LATINSKÉ PRAVOUHOLNÍKY TYPU $2 \times n$

alebo

AKO NEZASIELAŤ LISTY

S latinskými pravouholníkmi typu $2 \times n$ tesne súvisí *úloha o stretnutiach*, známa pod francúzskym názvom „le problème des rencontres". Uveďme ju v nasledujúcom tvare:

Koľkými spôsobmi možno vložiť n listov do n obálok s adresami (každý list do jednej obálky) tak, aby žiaden list nebol v správnej obálke? (Tohto činu sa vraj raz dopustila istá roztržitá sekretárka, ktorá tým spôsobila svojmu šéfovi veľa nepríjemností...)

Aby sme mohli náš problém pohodlnejšie vyšetrovať, očíslujeme listy i obálky číslami od 1 do n tak, aby list a obálka, ktoré k sebe partia. mali rovnaké čísla. Ďalej označme počet riešení našej úlohy znakom D_n.

Rozdelenie listov do obálok môžeme znázorniť pomocou latinského pravouholníka typu $2 \times n$, kde v prvom riadku sú čísla listov a pod každým z nich je napísané číslo obálky, do ktorej bol list vložený. Zrejme môžeme predpokladať, že čísla listov sú v prirodzenom poradí od 1 do n, t. j. že latinský pravouholník je normalizovaný. Napr. latinský pravouholník

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

znázorňuje situáciu s 5 listami a 5 obálkami, keď prvý list je umiestnený v tretej obálke, druhý v piatej atď.

Z tejto reprezentácie problému vyplýva, že počet D_n

jeho riešení sa rovná počtu normalizovaných latinských pravouholníkov typu $2 \times n$. Teda pre každé prirodzené číslo n platí $D_n = N(2, n)$.

Ako uvidíme, bude pre nás výhodné definovať D_n aj pre $n = 0$, a to takto: $D_0 = 1$. Prvýkrát využijeme výhodu tejto dohody ihneď:

Teoréma 5 (L. Euler 1811). *Pre každé prirodzené číslo n platí:*

(24) $$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1}) .$$

Dôkaz. Najprv dokážeme vzťah (24) pre $n = 1$ a $n = 2$. Preto vypočítajme D_n pre $n < 4$. Pred chvíľou sme položili

(25) $$D_0 = 1 .$$

Ďalej zrejme

(26) $$D_1 = 0 ,$$

lebo neexistuje latinský pravouholník typu 2×1. Ďalej existuje práve jeden normalizovaný latinský pravouholník typu 2×2, a to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teda

(27) $$D_2 = 1 .$$

Existujú práve dva normalizované latinské pravouholníky typu 2×3, a to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Teda

(28) $$D_3 = 2 .$$

Z rovností (25)—(28) ľahko overíme, že

$$D_2 = 1(D_1 + D_0)$$
$$D_3 = 2(D_2 + D_1),$$

teda vzťah (24) platí pre $n = 1$ a $n = 2$.

Nech je dané prirodzené číslo $n \geq 3$. Zvoľme prirodzené čísla j a k tak, aby bolo $j \leq n$ a $k \leq n$. Nech

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & n-1 & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{j-1} & p_{j+1} & \dots & p_{n-1} & p_n \end{bmatrix}$$

je latinský pravouholník typu $2 \times (n - 1)$ nad množinou $\{1, 2, 3, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n - 1, n\}$. Pravouholníku P priraďme normalizovaný latinský pravouholník

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n-1 & n & n+1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{j-1} & n+1 & p_{j+1} & \dots & p_{n-1} & p_n & j \end{bmatrix}$$

typu $2 \times (n + 1)$. Číslo j sme mohli zvoliť n spôsobmi a pri každej voľbe čísla j sme mohli pravouholník P zvoliť D_{n-1} spôsobmi (okolnosť, že prvok j je v P vynechaný a namiesto neho n pridaný, je nepodstatná; počet latinských pravouholníkov typu $2 \times (n - 1)$ s pevne zvoleným prvým riadkom zrejme nezávisí od jeho prvkov — len od ich počtu). Vidíme, že existuje práve nD_{n-1} pravouholníkov P, a teda aj P' zostrojených uvedeným spôsobom (ľahko sa presvedčíme, že všetky sú navzájom rôzne).

Ďalej nech

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_{k-1} & q_k & q_{k+1} & \dots & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}$$

je normalizovaný latinský pravouholník typu $2 \times n$. Priraďme mu (a číslu k) normalizovaný latinský pravouholník

$$Q' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n & n+1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_{k-1} & n+1 & q_{k+1} & \dots & q_{n-1} & q_n & q_k \end{bmatrix}$$

typu $2 \times (n+1)$. Číslo k možno zvoliť n spôsobmi, pravouholník Q možno zvoliť D_n, spôsobmi. Teda Q' možno vybrať nD_n spôsobmi. (Opäť sa ľahko zistí, že všetky takto získané pravouholníky Q' sú navzájom rôzne.)

Každý pravouholník Q' je rôzny od každého pravouholníka P'. Keby sa totiž rovnali, museli by sa rovnať ich posledné stĺpce, teda aj

$$j = q_k \,. \tag{28}$$

Ďalej by sa museli rovnať tie stĺpce v P' a Q', ktoré majú v druhom riadku $n+1$, teda

$$j = k \,. \tag{29}$$

Zo vzťahov (28) a (29) vyplýva

$$q_k = k \,.$$

To je však nemožné, lebo potom by Q obsahovalo v k-tom stĺpci dva rovnaké prvky, čo odporuje definícii latinského pravouholníka.

Tak sme zostrojili

$$nD_{n-1} + nD_n = n(D_n + D_{n-1})$$

rôznych normalizovaných latinských pravouholníkov typu $2 \times (n+1)$. Aby sme teorému dokázali, stačí ukázať, že ľubovoľný normalizovaný latinský pravouholník

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} \end{bmatrix}$$

typu $2 \times (n+1)$ sa rovná niektorému z pravouholníkov P' alebo Q'. To je však jednoduché. V druhom riadku pravouholníka S sa totiž niektorý z prvkov $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}$ musí rovnať číslu $n + 1$. Keďže S je latinský pravouholník, nemôže $s_{n+1} = n + 1$. Preto niektorý $s_k = n + 1$, kde $1 \leq k \leq n$. Potom S má tvar

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n-1 & n & n+1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{k-1} & n+1 & s_{k+1} & \ldots & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} \end{bmatrix}$$

Ak $s_{n+1} = k$, tak sa zrejme S rovná niektorému z pravouholníkov P'. V opačnom prípade sa S rovná jednému z pravouholníkov Q'. Tým je teoréma dokázaná.

Poznámka. Teoréma 5 nám umožňuje postupne vypočítavať hodnoty D_n, ak vychádzame z $D_0 = 1$ a $D_1 = 0$. Tak dostávame

$$\begin{aligned} D_2 &= D_1 + D_0 = 0 + 1 = 1, \\ D_3 &= 2(D_2 + D_1) = 2(1 + 0) = 2, \\ D_4 &= 3(D_3 + D_2) = 3(2 + 1) = 9, \\ D_5 &= 4(D_4 + D_3) = 4(9 + 2) = 44 \end{aligned}$$

atď.

Teoréma 5 ukazovala, ako možno vypočítať hodnotu D_{n+1} pomocou dvoch predchádzajúcich hodnôt D_n a D_{n-1}. Ukážeme si teraz, že na výpočet D_{n+1} nám stačí poznať D_n, alebo, čo je vlastne to isté, na výpočet D_n stačí D_{n-1}.

Teoréma 6 (L. Euler 1811). *Pre každé prirodzené číslo n platí*

(30) $$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

Dôkaz vzorca (30) vykonáme indukciou. Pre $n = 1$ (30) platí, lebo

$$1 . D_0 + (-1)^1 = 1 . 1 + (-1) = 0 = D_1.$$

Predpokladajme, že je dané prirodzené číslo k a že (30) platí pre $n = k$, t. j.

$$D_k = kD_{k-1} + (-1)^k.$$

Dokážeme, že potom (30) platí aj pre $n = k + 1$. Pritom použijeme teorému 5:

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= kD_k + kD_{k-1} = kD_k + D_k - (-1)^k = \\ &= (k + 1)\, D_k + (-1)^{k+1}, \end{aligned}$$

čo sme mali dokázať.

Vzorec (30) nám umožňuje veľmi pohodlne postupne vypočítavať čísla D_1, D_2, D_3, ... pomocou predchádzajúcich, pričom kladieme $D_0 = 1$. Tak dostávame

$$\begin{aligned} D_6 &= 6 . D_5 + 1 = 6 . 44 + 1 = 265, \\ D_7 &= 7 . D_6 - 1 = 7 . 265 - 1 = 1854, \\ D_8 &= 8 . D_7 + 1 = 8 . 1854 + 1 = 14\,833, \\ D_9 &= 9 . D_8 - 1 = 9 . 14\,833 - 1 = 133\,496. \\ D_{10} &= 10 . D_9 + 1 = 10 . 133\,496 + 1 = 1\,334\,961 \end{aligned}$$

atď. Existuje však aj veľmi zaujímavý vzorec pre D_n, ktorým nevypočítavame tieto hodnoty rekurentne (t.j. pomocou predchádzajúcich), ale priamo. Uvedieme ho vo forme ďalšej teorémy.

Teoréma 7 (J. J. Weyrauch 1872). *Pre každé celé nezáporné číslo n platí:*

$$(31) \quad D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Dôkaz vykonáme indukciou vzhľadom na n. Vzorec (31) platí pre $n = 0$:

$$0!\,\frac{1}{0!} = 1 . \frac{1}{1} = 1 = D_0 .$$

Predpokladajme, že je dané celé nezáporné číslo k a že vzťah (31) platí pre $n = k$, t.j.

$$D_k = k!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right).$$

Dokážeme, že (31) platí aj pre $n = k + 1$. Podľa teorémy 6 platí:

$$D_{k+1} = (k + 1)\, D_k + (-1)^{k+1} =$$

$$= (k + 1)\, k!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right) +$$

$$+ (-1)^{k+1} = (k + 1)!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots +\right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{1}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{1}{(k + 1)!}\right),$$

čo bolo treba dokázať.

Príklad. Určme počet normalizovaných, redukovaných a všetkých latinských obdĺžnikov typu 2×6 nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Riešenie: Podľa (31) dostávame:

$$N(2, 6) = D_6 = 6!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6!}\right) = 265\,.$$

Podľa (20) z teorémy 3 máme:

$$N(2, 6) = \frac{5!}{4!} R(2, 6) = 5R(2, 6),$$

teda

$$R(2, 6) = \frac{N(2, 6)}{5} = \frac{265}{5} = 53.$$

Podľa (19) z teorémy 3 dostaneme:

$$L(2, 6) = 6!\, N(2, 6) = 720.265 = 190\,800.$$

Zo vzorca (31) z teorémy 7 možno odvodiť zaujímavý fakt, že číslo $D_n = N(2, n)$ sa približne rovná číslu $n!\mathrm{E}$, kde

$$\mathrm{E} = 0{,}367\,879\,441\,171\,442\,321\,595\,5\ldots;$$

presnejšie, číslo $n!\mathrm{E}$ sa líši od D_n menej než o $(n + 1)^{-1}$. Preto číslo D_n možno vypočítať tak, že vypočítame súčin $n!\mathrm{E}$ (pričom číslo E zaokrúhlime tak, aby malo za desatinnou čiarkou o 1 desatinné miesto viac než má číslo $n!$ číslic a nájdeme celé číslo, ktoré je najbližšie k $n!\mathrm{E}$. Toto číslo bude práve D_n. Napr.

$$5!\mathrm{E} \doteq 120.0{,}3679 = 44{,}148 \doteq 44;$$

teda $D_5 = N(2, 5) = 44$.

$$10!\mathrm{E} \doteq 3\,628\,800.0{,}367\,879\,44 = 1\,334\,960{,}911\,872 \doteq$$
$$\doteq 1\,334\,961;$$

teda $D_{10} = N(2, 10) = 1\,334\,961$.

Kto pozná základy teórie nekonečných radov, ľahko odhalí podstatu tejto podivuhodnej metódy. Spočíva v tom, že nekonečný rad

$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots$$

má súčet $\mathrm{E} = \mathrm{e}^{-1}$, kde

$$\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\ldots$$

je základ tzv. prirodzených logaritmov.

Číslo E = 0,367 879... má v úlohe o stretnutiach tento význam: predstavuje približnú hodnotu pravdepodobnosti udalosti, že pri náhodnom rozdelení listov do obálok všetky budú v nesprávnych obálkach. Je pozoruhodné, že táto pravdepodobnosť sa len veľmi málo mení s číslom n (počtom listov i obálok) a už od $n = 4$ sa stále pohybuje okolo 37 %. Napr. ak by sme 100 sekretárok nechali potme roztriediť listy (každej aspoň štyri) do rovnakého počtu obálok s adresami, môžeme očakávať, že asi 37 sekretárok dá všetky listy do nesprávnej obálky!

Úlohu o stretnutiach (le problème des rencontres) možno zovšeobecniť takto:

Dané je prirodzené číslo n a celé číslo k, pričom $0 \leq k \leq n$. Treba určiť počet $d_{n,k}$ spôsobov, ako možno vložiť n listov do n obálok s adresami (každý list do jednej obálky) tak, aby práve k listov bolo v nesprávnej obálke.

Zrejme pôvodný problém dostaneme pre $k = n$, takže $d_{n,n} = D_n$.

Čitateľ, ktorý chce porozumieť nasledujúcemu riešeniu tejto úlohy, by mal vedieť, že číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

udáva počet spôsobov, ktorými možno vybrať k prvkov (bez ohľadu na ich poradie) z n daných prvkov — sú to tzv. *kombinácie* k-tej triedy z n prvkov (bez opakovania). Číslo $\binom{n}{k}$ (čítaj n nad k) sa nazýva *kombinačné číslo* alebo *binomický koeficient.*

Teoréma 8. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n a celé číslo k, pričom $0 \leq k \leq n$, platí:*

$$(32) \qquad d_{n,k} = \binom{n}{k} D_k.$$

Dôkaz. Vyberme z n listov k listov, ktoré majú byť v nesprávnych obálkach. To možno urobiť $\binom{n}{k}$ spôsobmi. Ostatných $n - k$ listov dajme do správnych obálok; to možno urobiť jediným spôsobom. Ostatne nám k listov a k obálok. Tie možno rozmiestniť D_k spôsobmi. Celkový počet možností dostaneme vynásobením týchto čísel, z čoho vyplýva (32).

Dôsledok. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n a celé číslo k, pričom $0 \leq k \leq n$, platí:*

$$(33) \quad d_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right).$$

Dôkaz. Použijeme najprv teorému 8, potom teorému 7:

$$d_{n,k} = \binom{n}{k} D_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right) = \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right).$$

Príklad. 5 listov možno rozdeliť do 5 obálok tak, aby boli všetky v nesprávnych obálkach,

$$d_{5,5} = D_5 = 44$$

spôsobmi. Ak majú byť len 4 listy v nesprávnych obálkach, je počet spôsobov podľa (33):

$$d_{5,4} = \frac{5!}{1!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 45.$$

Podobne vypočítame

$$\begin{aligned} d_{5,3} &= 20, \\ d_{5,2} &= 10, \\ d_{5,1} &= 0, \\ d_{5,0} &= 1. \end{aligned}$$

Pre kontrolu vypočítajme počet všetkých možných rozmiestnení 5 listov do 5 obálok! Je to

$$d_{5,5} + d_{5,4} + d_{5,3} + d_{5,2} + d_{5,1} + d_{5,0} = \\ = 44 + 45 + 20 + 10 + 0 + 1 = 120 = 5!,$$

čo súhlasí.

Poznámka. Pochopiteľne, keby sme chceli vypočítať počet $D_{n,k}$ spôsobov, ako možno vložiť n listov do n obálok s adresami tak, aby práve k listov bolo v správnej obálke, stačí uvážiť, že $D_{n,k} = d_{n,n-k}$, takže z (32) vyplýva:

$$(34) \qquad D_{n,k} = d_{n,n-k} = \binom{n}{n-k} D_{n-k} = \binom{n}{k} D_{n-k},$$

keďže

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}. \text{ Špeciálne } D_{n,0} = d_{n,n} = D_n.$$

Ďalej z (33) dostaneme

$$(35) \qquad D_{n,k} = d_{n,n-k} = \\ = \frac{n!}{k!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right).$$

Cvičenia

7. Absolventi gymnázia usporiadali desať rokov po maturite stretnutie, na ktoré prišlo 20 bývalých spolužiakov aj so svojimi manželkami. Koľkými spôsobmi možno ich zoradiť do 20 tanečných párov tak, aby nikto netancoval so svojou vlastnou manželkou?

8. (Pokračovanie predošlého cvičenia.) Na stretnutí bol usporiadaný aj srdiečkový tanec, pri ktorom boli tanečné páry vyžrebované. Aká je pravdepodobnosť, že v tomto tanci a) netancoval žiaden manželský pár; b) tancoval práve jeden; c) práve dva; d) práve tri; e) viac než tri manželské páry?

9. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť 8 veží na šachovnicu tak, aby v každom rade i stĺpci bola jediná veža? b) Ako sa zmení počet riešení, ak naviac požadujeme, aby na „čiernej" diagonále a1—h8 nebola žiadna veža?

10. Z príkladu za dôsledkom teorémy 8 vidno, že $D_5 = d_{5,5} = 44$, $D_{5,1} = d_{5,4} = 45$. Ako možno tento výsledok zovšeobecniť?

11. Nájdite rekurentný vzťah medzi $R(2, n + 1)$ a $R(2, n)$.