Dodatok II.

NEKONEČNÉ RADY

V teórii nekonečných radov je základným pojmom pojem (nekonečnej) postupnosti. (Nekonečná) postupnosť je funkcia definovaná na množine všetkých prirodzených čísel. Hodnotu postupnosti f v čísle n označujeme znakom f_n (teda $f_n = f(n)$), celú postupnosť znakmi

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

alebo

$$\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots\}.$$

Príklad D 2.1. Napíšte niekoľko členov nasledujúcich postupností

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Inak zapísané

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\},$$

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right\},$$

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\},$$

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}.$$

Označme $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{n+1}{n}$, $c_n = (-1)^n$, $d_n = \frac{1}{2^n}$. Potom napr. $a_{10} = \frac{1}{10}$, $b_{100} = \frac{101}{100}$, $d_5 = \frac{1}{2^5}$, $c_{22} = 1$, $c_{57} = -1$ a pod.

Vidíme, že niektoré postupnosti majú tendenciu ustáliť sa, blížiť sa (v matematike používame termín konvergovať) k určitej hodnote, iné nie. V prvom prípade hovoríme, že postupnosť má limitu, čo označujeme znakom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zdá sa napr., že by malo platiť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Prirodzene najprv musíme presne formulovať, čo znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má za limitu číslo a ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), alebo, čo je to isté, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a.

Definícia D 2.1. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má za limitu číslo a, ak k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také reálne číslo n_0, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ je

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

alebo, čo je isté,

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon .$$

Príklad D 2.2. Dokážme, že $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Nech $\varepsilon > 0$. Položme $n_0 = 1/\varepsilon$. Nech $n > n_0$. Potom $1/n < 1/n_0 = \varepsilon$, teda

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Príklad D 2.3. Dokážme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Opäť by sme mohli rovno udať n_0, od ktorého počnúc je $|a_n - a| < \varepsilon$. Ukážeme si však, ako sa také n nájde. Treba odhadnúť rozdiel

$$|a_n - a| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}.$$

Rozdiel $1/n$ bude menší ako ε práve vtedy, keď $n > 1/\varepsilon$. Preto opäť položíme $n_0 = 1/\varepsilon$. Ak je $n > n_0$, tak

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon .$$

Príklad D 2.4. Dokážme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Má byť

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon .$$

To bude vtedy, keď

$$n \log \frac{1}{2} < \log \varepsilon ,$$

teda keď $\left(\text{pozor!} \quad \log \frac{1}{2} < 0\right)$

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log \frac{1}{2}}.$$

Položme teda $n_0 = \log \varepsilon / \log (1/2)$. Ak $n > n_0$, tak postupne

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log \frac{1}{2}},$$

$$n \log \frac{1}{2} < \log \varepsilon ,$$

$$\log \left(\frac{1}{2}\right)^n < \log \varepsilon ,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon ,$$

teda

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon .$$

Tak isto ako v príklade D 2.4 sa dokáže, že $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$, ak len $|q| < 1$, t. j. $-1 < q < 1$.

Základnou úlohou teórie nekonečných radov je, zhruba povedané, spočítať nekonečne veľa čísel

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nejaká postupnosť. Napr. treba spočítať všetky čísla

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} .$$

Prirodzene, aj v tomto prípade treba najprv presne povedať, čo taký súčet znamená, ako je definovaný.

Definícia D 2.2. Nekonečný rad

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje, ak existuje

$$\lim_{n \to \infty} s_n,$$

kde

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \; (n = 1, 2, \ldots).$$

Súčtom nekonečného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame potom túto limitu. Symbolom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme aj nekonečný rad, aj jeho súčet.

Príklad D 2.5. Zistite, či konverguje nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ a vypočítajte jeho súčet.

V tomto prípade je

$$s_1 = \frac{1}{2},$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{2^2},$$

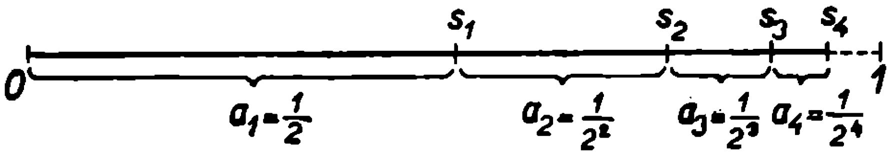
$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3},$$

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Preto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Vidíme teda, že nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konverguje a jeho súčet je 1. Táto skutočnosť sa dá znázorniť aj na číselnej osi.



Obr. 10

Podobne ako v príklade D 2.5, dá sa rozhodnúť o konvergencii každého geometrického radu.

Rad $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ sa nazýva geometrický, ak existuje také číslo q (tzv. kvocient), že pre všetky n je

$$a_n = qa_{n-1}\,,$$

teda

$$a_2 = qa_1,\ a_3 = qa_2 = q^2a_1,\ a_4 = q^3a_1,\ \ldots,$$
$$a_n = q^{n-1}a_1.$$

Príklad D 2.6. Každý geometrický rad, ktorého kvocient $q \in (-1, 1)$ je konvergentný, pričom

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Máme dokázať, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a_1/(1-q)$. Vynásobme najprv rovnosť

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

kvocientom q. Máme

$$s_nq = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n\,.$$

Po odčítaní dostaneme

$$s_n - s_nq = a_1 - a_1q^n\,,$$

teda

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pre $q \in (-1, 1)$, dostávame, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Príklad D 2.7. Zistite, či konverguje nekonečný rad

$$0,7 + 0,7 . 0,4 + 0,7 . 0,4^2 + 0,7 . 0,4^3 + \ldots + \\ + 0,7 . 0,4^{n-1} + \ldots$$

Pretože ide o geometrický rad s kvocientom 0,4, rad konverguje a pre jeho súčet platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0,7 . 0,4^{n-1} = 0,7 + 0,7 . 0,4 + 0,7 . 0,4^2 + \ldots = \\ = \frac{0,7}{1 - 0,4} = 1,1\overline{6}.$$