Dodatok I.

KOMBINATORIKA

Uvažujme o množine $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Permutáciou z n prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazývame taký prvok množiny $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ činiteľov}}$ (t. j. usporiadanú n-ticu), ktorý obsahuje každý z prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ práve raz.

Príklad D 1.1. Všetky permutácie z prvkov 1, 2, 3 sú

$$
\begin{array}{lll}
\diagup\; 1 < & 2 - 3 & 1, 2, 3 \\
 & 3 - 2 & 1, 3, 2 \\
-\; 2 < & 1 - 3 & 2, 1, 3 \\
 & 3 - 1 & 2, 3, 1 \\
\diagdown\; 3 < & 1 - 2 & 3, 1, 2 \\
 & 2 - 1 & 3, 2, 1
\end{array}
$$

Zrejme prvý prvok môžeme vybrať tromi rôznymi spôsobmi, druhý prvok už len dvomi rôznymi spôsobmi, tretí prvok už len jedným spôsobom. Spolu máme

$$3 . 2 . 1 = 3! \text{ možností.}$$

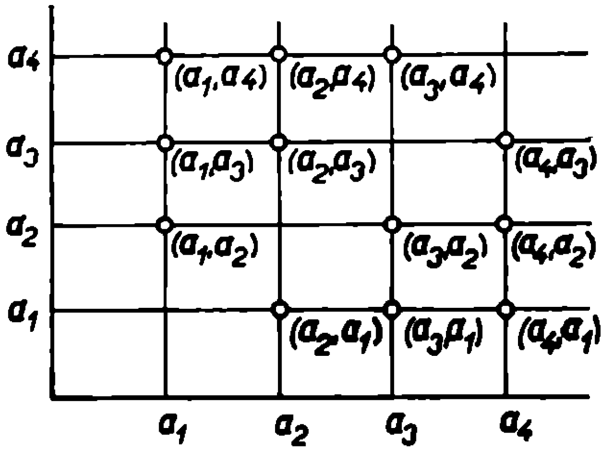
Teda všetkých permutácií z troch prvkov je $3! = 6$.

Všeobedne platí: Počet všetkých permutácií z n prvkov je $P_n = n!$

Variáciou r-tej triedy z n prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(r \leqq n)$

nazývame taký prvok množiny $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{r \text{ činiteľov}}$ (t. j. usporiadanú r-ticu), ktorý obsahuje každý z prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ najviac raz.

Príklad D 1.2. Variácie druhej triedy zo štyroch prvkov a_1, a_2, a_3, a_4 sú:



Obr. 9

resp.

$$a_1 \left\langle \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \right. \qquad (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4)$$

$$a_2 \left\langle \begin{matrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \right. \qquad (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_2, a_4)$$

$$a_3 \left\langle \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{matrix} \right. \qquad (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_4)$$

$$a_4 \left\langle \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \right. \qquad (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_3)$$

Celkom máme $4 . 3 = 12$ variácií.

Príklad D 1.3. Nájdime počet všetkých variácií tretej triedy zo šiestich prvkov a, b, c, d, e, f.

Zrejme prvý prvok môžeme vybrať šiestimi rôznymi spôsobmi, druhý prvok už len piatimi rôznymi spôsobmi a tretí prvok štyrmi rôznymi spôsobmi. Spolu máme 6.5.4 možností. Teda počet všetkých variácií tretej triedy zo šiestich prvkov je

$$6.5.4 = \frac{6!}{3!}.$$

Všeobecne platí: Počet $V(n, r)$ všetkých variácií r-tej triedy z n prvkov je $V(n, r) = n(n - 1) \dots (n - r + 1) = n!/(n - r)!$

Kombináciou r-tej triedy z n prvkov $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($r \leqq n$) nazývame ľubovoľnú r-prvkovú podmnožinu množiny $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Príklad D 1.4. Kombinácie tretej triedy zo štyroch prvkov a, b, c, d sú:

$$\{a, b, c\}\,,\ \{a, b, d\}\,,\ \{a, c, d\}\,,\ \{b, c, d\}\,.$$

Príklad D 1.5. Porovnajme počet $C(4, 3)$ všetkých kombinácií tretej triedy zo štyroch prvkov a, b, c, d s počtom $V(4, 3)$ všetkých variácií tretej triedy zo štyroch prvkov a, b, c, d.

Kombinácie	Variácie
$\{a, b, c\}$	$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c)$ $(b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$
$\{a, b, d\}$	$(a, b, d), (a, d, b), (b, a, d)$ $(b, d, a), (d, a, b), (d, b, a)$
$\{a, c, d\}$	$(a, c, d), (a, d, c), (c, a, d)$ $(c, d, a), (d, a, c), (d, c, a)$

$\{b, c, d\}$ $\qquad$ $(b, c, d), (b, d, c), (c, b, d)$
$\qquad\qquad\qquad$ $(c, d, b), (d, b, c), (d, c, b)$

Teda $V(4, 3) = C(4, 3).3!$ a z toho $C(4, 3) = V(4, 3)/3!$
Všeobecne platí:

$$V(n, r) = C(n, r).r!$$

a z toho

$$C(n, r) = \frac{V(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n - r)!} = \binom{n}{r},$$

kde $C(n, r)$ je počet všetkých kombinácií r-tej triedy z n prvkov. Symbol $\binom{n}{r}$ sa nazýva kombinačné číslo.

Variácia r-tej triedy s opakovaním z n prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (r, n sú ľubovoľné prirodzené čísla) je každý prvok množiny $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{r \text{ činiteľov}}$, kde $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Príklad D 1.6. Utvorme všetky variácie tretej triedy s opakovaním z dvoch prvkov a, b. Vieme, že sú to všetky prvky množiny $A \times A \times A$, kde $A = \{a, b\}$. Keďže pre kartézsky súčin platí asociatívny zákon, je $A \times A \times A = (A \times A) \times A$. Prvky $A \times A$ sú

$$a \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a, a) \\ (a, b) \end{array}$$

$$b \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array} \qquad \begin{array}{l} (b, a) \\ (b, b) \end{array}$$

$A \times A$ má teda $2.2 = 2^2$ prvkov.

Prvky $(A \times A) \times A$ sú

$$(a, a) \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a, a, a) \\ (a, a, b) \end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
(a, b) & \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array} & \begin{array}{l} (a, b, a) \\ (a, b, b) \end{array} \\
(b, a) & \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array} & \begin{array}{l} (b, a, a) \\ (b, a, b) \end{array} \\
(b, b) & \begin{array}{l} \nearrow a \\ \searrow b \end{array} & \begin{array}{l} (b, b, a) \\ (b, b, b) \end{array}
\end{array}
$$

$(A \times A) \times A$ má teda $2^2 . 2 = 2^3$ prvkov. Preto počet všetkých variácií tretej triedy s opakovaním z dvoch prvkov je 2^3.

Všeobecne platí: Počet všetkých variácií r-tej triedy z n prvkov s opakovaním je n^r.

Príklad D 1.7. Ak chceme v Sazke obsiahnuť všetky možnosti, musíme utvoriť všetky variácie dvanástej triedy z troch prvkov 0, 1, 2. Teda ako tipy musíme vsadiť všetky prvky množiny $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{12 \text{ činiteľov}}$, kde

$$A = \{0, 1, 2\} \text{ a tých je } 3^{12} = 531\,441.$$

Často nás zaujíma počet tzv. permutácií s opakovaním z prvkov, z ktorých niektoré sú rovnaké.

Příklad D 1.8. Majme 3 prvky, z ktorých 2 sú rovnaké: a, a, b. Ak by sme rovnaké prvky očíslovali a utvorili všetky permutácie z prvkov a_1, a_2, b, dostali by sme

$$
\begin{array}{ll}
(a_1, a_2, b), & (a_2, a_1, b) \\
(a_2, b, a_1), & (a_1, b, a_2) \\
(b, a_1, a_2), & (b, a_2, a_1)
\end{array}
$$

teda celkom 3! permutácií. Pretože však a_1, a_2 sú rovnaké, je vždy 2! usporiadaní (tie, ktoré vzniknú len permutovaním prvkov a_1, a_2) rovnakých. Rôznych je teda len $3!/\ 2!$ permutácií. Sú to (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a).

Permutáciou s opakovaním z n prvkov, z ktorých n_1 je rovných a_1, n_2 rovných a_2, ..., n_k prvkov rovných a_k $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$ **rozumieme taký prvok množiny** $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ činiteľov}}$, v ktorom je n_1 súradníc rovných a_1, n_2 rovných a_2, ..., n_k rovných a_k.

Počet všetkých takých permutácií s opakovaním je

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}.$$