1. kapitola

UDALOSŤ A JEJ PRAVDEPODOBNOSŤ

Pojem pravdepodobnosti je nám známy z bežného života. Ak sme o niečom pevne presvedčení, hovoríme, že je to isté na 100 %. Ak však o niečom prehlásime, že máme 95% istotu, pripúšťame, že zo 100 prípadov asi v piatich dané tvrdenie neplatí.

V matematike vyjadrujeme pravdepodobnosť nejakej udalosti nie v percentách, ale odpovedajúcim číslom z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Teda nehovoríme o pravdepodobnosti 57 %, 13 %, 20 % a pod., ale 0,57, 0,13, 0,2 a pod. Skutočnosť, že pravdepodobnosť nejakej udalosti je 0,2 intuitívne chápeme tak, že pri „veľkom počte" pokusov nastane tá udalosť asi v 1/5 prípadov.

Spočiatku budeme pracovať s tým azda najjednoduchším modelom: buďeme predpokladať, že daný experiment má len konečný počet možných výsledkov a všetky sú rovnako pravdepodobné. Napr., ak hádžeme kockou, ktorej steny sú očíslované číslami 1 až 6, máme 6 možných výsledkov; označme ich $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$. Ak je tá kocka pravidelná a homogenná, predpoklad, že všetky výsledky sú rovnako pravdepodobné (t. j., že každá číslica bude „rovnako často" padať) je prijateľný.

Definícia 1.1. *Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots. \omega_n\}$ je neprázdna množina. Podmnožiny množiny Ω budeme nazývať tiež udalosťami; špeciálne $\emptyset$ sa nazýva nemožná udalosť, Ω sa* *nazýva istá udalosť. Pravdepodobnosťou $P(A)$ udalosti A rozumieme číslo*

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

kde m je počet prvkov množiny A (počet prvkov prázdnej množiny $\emptyset$ je 0) a n je počet prvkov množiny Ω.

Príklad 1.1. Vykonajme hod pravidelnou kockou, na stenách ktorej je postupne jedna, dve, tri, ..., šesť bodiek. Aká je pravdepodobnosť udalosti, že na padnutej stene bude párny počet bodiek?

Riešenie. V našom prípade je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, pričom prvok ω_i odpovedá stene, na ktorej je práve i bodiek. Pýtame sa teda na pravdepodobnosť udalosti

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},$$

ktorá má tri prvky. Podľa definície platí $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Príklad 1.2. V hromade hracích kariet je 32 dobre zamiešaných kariet. Vyberieme tri. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky tri budú červene?

Riešenie. Prvkov základného priestoru A je toľko, koľko je možných rôznych trojíc kariet vybratých spomedzi 32. Ako je známe (pozri Doplnok I), trojprvkových kombinácií z 32 prvkov možno vytvoriť celkom

$$\binom{32}{3} = \frac{32.31.30}{3.2.1} = 4\,960.$$

Preto $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{4\,960}\}$. Každé ω_i je trojica kariet. Jednou trojicou je napr. trojica (červená sedma, červená osma, zelený túz). Označme ju ω_{i_0}. Udalosť A, ktorej pravdepodobnosť hľadáme pozostáva len z takých trojíc, v ktorých všetky karty sú červene. Uvedená trojica ω_{i_0} nepatrí do A (čo zapisujeme $\omega_{i_0} \notin A$). A obsahuje toľko prvkov (trojíc), koľko trojprvkových kombinácií možno vybrať spomedzi ôsmich prvkov. A to je

$$\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56 \cdot$$

Preto

$$P(A) = \frac{56}{4\,960} = 0{,}011 \cdot$$

Príklad 1.3. Do stanice vchádza vlak s dvanástimi vozňami. Nastupuje doňho 7 cestujúcich. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetci siedmi pocestujú v rôznych vagónoch (t. j. v žiadnom vagóne nepocestuje viac ako jeden z nich)?

Riešenie. Podobne ako v predošlých príkladoch je $P(A) = m/n$, kde n je počet všetkých možných rozmiestnení 7 cestujúcich do 12 vagónov a m je počet takých rozmiestnení, pri ktorých sú každé dve osoby v dvoch rôznych vagónoch.

Číslo n je vlastne počet variácií s opakovaním 7-ej triedy z 12 prvkov. Prvého cestujúceho môžeme umiestniť do ľubovoľného z 12 vagónov. K ľubovoľnému umiestneniu prvého cestujúceho máme 12 umiestnení druhého, teda prvých dvoch cestujúcich môžeme umiestniť celkom $12.12 = 12^2$ spôsobmi, prvých troch $12.12.12 = 12^3$ spôsobmi atď. Vidíme teda, že $n = 12^7$.

Číslo m je zase počet variácií bez opakovania 7. triedy z 12 prvkov. Prvého cestujúceho môžeme umiestniť do ľubovoľného z dvanástich vagónov, druhého už len do ľubovoľného zo zvyšných jedenástich atď. Teda na umiestnenie všetkých siedmich máme možností celkom

$$m = 12.11.10.9.8.7.6 = \frac{12!}{5!}.$$

Preto

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12.11.10.9.8.7.6}{12.12.12.12.12.12.12} = 0{,}1114.$$

Napriek tomu, že formálne je riešenie príkladu 1.3 v poriadku, zdá sa, že výsledok nie je v súlade so skutočnosťou. Skúsenosti ukazujú, že nemožno akceptovať predpoklad, že nastúpenie cestujúceho do ľubovoľného z vozňov je rovnako pravdepodobné. Okrem toho cestujúci obvykle necestujú nezávisle jeden na druhom, ale vo väčších, či menších skupinkách. Použitý matematický model je nevhodný. (Pravdaže, ťažkosti uvedeného rázu nie sú špecialitou teórie pravdepodobnosti. S podobnými ťažkosťami treba rátať pri aplikovaní ľubovoľného matematického aparátu v praxi.)

Príklad 1.4. Predpokladajme, že v sérii 100 výrobkov je 5 chybných. Vyberme spomedzi tých 100 výrobkov náhodne 10. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi týmito desiatimi výrobkami budú práve tri chybné?

Riešenie. Počet n všetkých desaťmiestnych výberov zo 100 výrobkov, tj. počet všetkých kombinácií desiatej triedy zo sto prvkov je

$$n = \binom{100}{10}.$$

Skutočnosť, že vyberáme náhodne znamená vlastne to, že každá z týchto desatíc (teda každý prvok základného priestoru) je rovnako pravdepodobná. Tri chybné výrobky spomedzi piatich môžeme vybrať $\binom{5}{3}$ spôsobmi. Zvyšných sedem výrobkov musí byť dobrých, teda vyberáme ich spomedzi 95 dobrých výrobkov. Na výber siedmich spomedzi 95 dobrých výrobkov máme $\binom{95}{7}$ možností. Ku každej z týchto sedmíc dobrých máme $\binom{5}{3}$ trojíc chybných výrobkov. Preto desatíc skúmanej vlastnosti (7 dobrých, 3 chybné) je

$$m = \binom{95}{7}\binom{5}{3},$$

čiže

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{95}{7}\binom{5}{3}}{\binom{100}{10}}.$$

Príklad 1.5. Hádžeme dvoma hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť toho, že súčet bodiek na oboch kockách bude 9?

Riešenie. Tento príklad použijeme aj na to, aby sme si pripomenuli pojem kartézskeho súčinu dvoch množín. Kartézskym súčinom dvoch množín A, B (označenie $A \times B$) rozumieme množinu všetkých takých usporiadaných dvojíc (x, y), že $x \in A$, $y \in B$. V našom príklade je A množina výsledkov na prvej kocke, B je množina výsledkov na druhej kocke. Všetky možné výsledky pri hode dvoma kockami sú charakterizované všetkými dvojicami (i, j), kde $i = 1, 2, \ldots, 6$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, teda kartézskym súčinom

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

Základný priestor teda pozostáva z $n = 36$ prvkov. Podrobne rozpísané

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1), (1,2), \ldots, (1,6),\\ &(2,1), (2,2), \ldots, (2,6),\\ &\vdots\\ &(6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}\,.\end{aligned}$$

Napr. prvok (5,2) charakterizuje tú skutočnosť, že na prvej kocke padla stena s piatimi bodkami, na druhej stena s dvoma bodkami.

Udalosť M, ktorej pravdepodobnosť hľadáme pozostáva z týchto prvkov

$$M = \{(6,3), (3,6), (4,5), (5,4)\}\,.$$

teda $m = 4$ a

$$P(M) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}\,.$$

Príklad 1.6. V telefónnej ústredni možno vytáčať trojmiestne čísla (0 môže byť aj na začiatku). Aká je pravdepodobnosť toho, že v náhodne vytočenom trojmiestnom čísle budú všetky cifry rôzne?

Riešenie. Všetkých možností je toľko, koľko je variácií s opakovaním tretej triedy z 10 prvkov 0, 1, 2, ..., 9. teda

$$n = 10^3.$$

Fakt, že sme vytáčali náhodne znamená, že všetky trojice sú rovnako pravdepodobné.

Do skúmanej udalosti A patria tie usporiadané trojice (i, j, k), v ktorých sú i, j, k navzájom rôzne. Počet m takýchto trojíc je počet všetkých variácií (bez opakovania) tretej triedy z 10 prvkov, teda

$$m = 10.9.8.$$

Preto

$$P(A) = \frac{10.9.8}{10.10.10} = 0{,}72.$$

Cvičenia

1.1. Na otvorenie trezoru je potrebné poznať určité trojmiestne číslo (nula môže byť aj na začiatku). a) Aká je pravdepodobnosť toho, že při 27 náhodno volených trojčísliach otvoríme trezor? b) Koľko volieb treba urobiť, aby pravdepodobnosť toho, že trezor otvoríme bola väčšia ako $1/3^3$?

1.2. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma hracími kockami padne na oboch to isté číslo?

1.3. V triede je 12 dievčat a 15 chlapcov. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi prvými desiatimi podľa abecedy je práve 5 dievčat?

1.4. Aká je v Športke pravdepodobnosť výhry tretej ceny na jeden tip? (Zo 49 čísel tipujeme 6 čísel, pričom na tretiu cenu musíme uhádnuť práve štyri čísla.)

1.5. Do výťahu v dvadsaťposchodovej budove vstupuje 5 osôb. Aká je pravdepodobnosť toho, že každý výstúpi na inom poschodí? (Predpokladáme pritom, že vystupujú nezávisle na sebe a pravdepodobnosť vystúpenia na ktoromkoľvek poschodí je rovnaká.)

1.6. Aká je pravdepodobnosť toho, že dvaja náhodne vybratí ľudia nemajú ten istý mesiac a deň narodenia? (Na roku nezáleží, 29. február vylúčime z úvah.)

1.7. Na festivalové predstavenie kúpili si nezávisle po jednom do jedného radu lístky 3 Američania, 5 Francúzi, 2 Poliaci a 5 Sovieti. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetci príslušníci tej istej krajiny budú sedieť spolu?

Pravda, siahať po definícii pravdepodobnosti nemusí byť vždy najschodnejšou cestou. Niekedy je vhodné rozložiť danú udalosť na jednoduchšie, resp. vyjadriť ju pomocou iných udalostí. K tomu slúžia množinové operácie. Budeme používať tri.

Komplement A' množiny A je množina tých prvkov $\omega \in \Omega$, ktoré nepatria do A. Stručne zapísané, $A' = \{\omega \in \Omega;\ \omega \notin A\}$. V teórii pravdepodobnosti sa A' nazýva aj *opačnou udalosťou* k udalosti A.

Zjednotenie $A \cup B$ *množín* A, B je množina práve tých prvkov $\omega \in \Omega$, ktoré patria aspoň do jednej z množín A, B. (Ale môžu patriť aj do obidvoch!) Teda $A \cup B = \{\omega \in \Omega;\ \omega \in A$, alebo $\omega \in B\}$.

Konečne *prienik* $A \cap B$ množín A, B je množina práve tých prvkov $\omega \in \Omega$, ktoré patria súčasne do oboch množín A, B; $A \cap B = \{\omega \in \Omega;\ \omega \in A$ a $\omega \in B\}$.

Nech napr. A je udalosť spočívajúca v tom, že na hracej kocke padne stena s párnym počtom bodiek, B — padne stena s počtom bodiek väčším ako 2. Teda

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}\,, \quad B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}\,.$$

Potom

$$A' = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

spočíva v tom, že padne stena s nepárnym počtom bodiek,

$$A \cap B = \{\omega_4, \omega_6\}$$

spočíva v tom, že padne stena, na ktorej sú štyri bodky, alebo stena, na ktorej je 6 bodiek; konečne

$$A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

nastane, ak padne stena s väčším počtom bodiek ako 1.

K tomu, aby sme vedeli vypočítať pravdepodobnosti udalostí A', $A \cap B$, $A \cup B$ je potrebné poznať počty prvkov množín A', $A \cap B$, $A \cup B$. (Označme ich $m(A')$, $m(A \cap B)$, $m(A \cup B)$ resp. $m(A)$, $m(B)$.) Najľahšie je to v prípade udalosti A'.

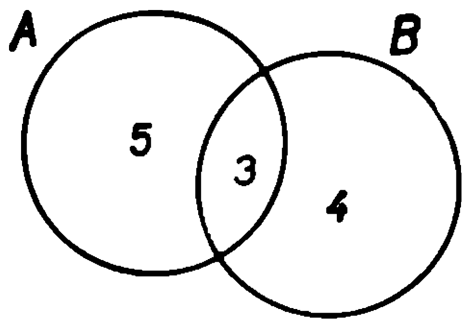
Ak udalosť A obsahuje $m(A) = m$ prvkov a celý priestor obsahuje n prvkov, tak udalosť A' obsahuje $n - m$ prvkov, totiž tie prvky z Ω, ktoré nepatria do A. Preto

$$m(A') = n - m = n - m(A)\,,$$

$$P(A') = \frac{m(A')}{n} = \frac{n - m(A)}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m(A)}{n} =$$
$$= 1 - P(A).$$

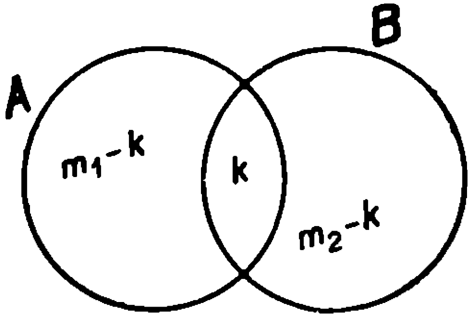
Pravdepodobnosť opačnej udalosti (k udalosti A) je teda číslo $1 - P(A)$.

V prípade udalostí $A \cap B$, $A \cup B$ je situácia komplikovaná tým, že počet prvkov množín $A \cap B$, $A \cup B$ nie je určený počtom prvkov množín A, B. $A \cap B$ môže byť napríklad prázdna množina $\emptyset$, dvojprvková ako v predošlom príklade a pod. Ak je ale známy počet prvkov $A \cap B$, už je známy aj počet prvkov množiny $A \cup B$. Nech napr. $m(A \cap B) = 3$, $m(A) = 8$, $m(B) =$



Obr. 1

$= 7$. Potom „mesiačik" $A \cap B'$ (množina tých ω, ktoré patria do A, ale nie do B; označuje sa tiež $A - B$) obsahuje $8 - 3 = 5$ prvkov. Celá množina A má 8 prvkov; z nich 3 patria aj do B, teda 5 je takých, čo partria do A a nepatria do B. Podobne zistíme, že množina $B \cap A'$ má $7 - 3 = 4$ prvky, teda množina $A \cup B$ má celkom $5 + 3 + 4 = 12$ prvkov.



Obr. 2

Prejdime k všeobecnému prípadu. Nech množina $A \cap B$ má k prvkov, množina A má m_1 prvkov, množina B má m_2 prvkov, t. j. $m(A \cap B) = k$, $m(A) = m_1$, $m(B) = m_2$. Potom množina $A \cap B'$ má $m_1 - k$ prvkov, množina $B \cap A'$ má $m_2 - k$ prvkov, teda počet prvkov množiny $A \cup B$ je

$$m(A \cup B) = (m_1 - k) + k + (m_2 - k) =$$

$$= m_1 + m_2 - k = m(A) + m(B) - m(A \cap B) .$$

Ak predelíme uvedenú rovnosť počtom n prvkov základného priestoru Ω, dostaneme

$$P(A \cup B) =$$

$$= \frac{m(A \cup B)}{n} = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} - \frac{m(A \cap B)}{n} =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) .$$

Dokázané rovnosti

$$P(A') = 1 - P(A) , \qquad (1)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (2)$$

budú v ďalších príkladoch našim základným pracovným prostriedkom.

Všimnime si špeciálny, ale dôležitý prípad, kedy A, B nemajú spoločné prvky, t. j. $A \cap B = \emptyset$. O takýchto udalostiach hovoríme, že sú disjunktné, alebo, že sa navzájom vylučujú. V takom prípade

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)\,,$$

teda

$$P(A \cup B) = \frac{m(A \cup B)}{n} = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} =$$

$$= P(A) + P(B)\,.$$

Pravdepodobnosť zjednotenia navzájom sa vylučujúcich udalostí sa rovná súčtu ich pravdepodobností:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)\,. \qquad (3)$$

Implikácia (3) je ostatne bezprostredným dôsledkom (2). Ak totiž $A \cap B = \emptyset$, tak $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$, teda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0 = P(A) + P(B)\,.$$

Príklad 1.7. Hádžeme tromi hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň na jednej bude šestka?

Riešenie. Lahšie vypočítame pravdepodobnosť udalosti A: ani na jednej kocke nepadne šestka. Skutočne

$$P(A) = \frac{5.5.5}{6.6.6} = \frac{5^3}{6^3}\,,$$

pretože všetkých usporiadaných trojíc z čísel 1, 2, ..., 6 je 6^3 a všetkých usporiadaných trojíc z čísel 1, 2, ..., 5 je 5^3. Skúmaná udalosť — aspoň na jednej kocke padne šestka — je opačnou k udalosti A. Preto pre jej pravdepodobnosť platí

$$P(A') = 1 - \frac{5^3}{6^3}.$$

Príklad 1.8. Opäť hádžeme tromi hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť, že padne nanajvýš jedna šestka?

Riešenie. Nech A_0 je udalosť: nepadne žiadna šestka, A_1 — padne práve jedna šestka, A — padne najviac jedna šestka. Potom $A = A_0 \cup A_1$, $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, teda

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1).$$

Zrejme

$$P(A_0) = \frac{5^3}{6^3}.$$

Ďalej, $A_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, kde B_i znamená, že na i-tej kocke padne šestka, ale na zvyšných dvoch nie. Teda napr. B_1 pozostáva zo všetkých trojíc $(6, i, j)$, kde $i \neq 6$, $j \neq 6$. Takých trojíc je 5.5 teda

$$P(B_1) = \frac{5^2}{6^3}.$$

Podobne

$$P(B_2) = P(B_3) = \frac{5^2}{6^3},$$

teda (vzhľadom na to, že B_1, B_2, B_3 se navzájom vylučujú)

$$P(A_1) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{3 . 5^2}{6^3},$$

$$P(A) = \frac{5^3}{6^3} + \frac{3 \,.\, 5^2}{6^3} = 0{,}93.$$

Príklad 1,9. Hádžeme dvoma hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň na jednej padne šestka?

Riešenie. Podobnú úlohu sme riešili v príklade 1.7. Tentokrát nepoužijeme opačnú udalosť, ale rovnosť (2). Nech A je udalosť — šestka padne na prvej kocke, B — šestka padne na druhej kocke. Máme vypočítať $P(A \cup B)$;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,.$$

Ale $P(A) = P(B) = 6/36$, $P(A \cap B) = 1/36$, teda

$$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}\cdot$$

Chvalabohu, pomocou opačnej udalosti výjde ten istý výsledok.

$$P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - \frac{5^2}{6^2} = \frac{11}{36}\cdot$$

Konečne, prvky množiny $A \cup B$ možno systematicky vypísať:

(6,1), (6,2), . . ., (6,5)
(1,6), (2,6), . . ., (5,6)
(6.6)

Skutočne, $P(A \cup B) = \dfrac{11}{36}\cdot$

Cvičenia

1.8. Aká je pravdepodobnosť toho, že dvaja náhodne vybratí ľudia majú v ten istý deň narodeniny?

1.9. Aká je pravdepodobnosť toho, že z r náhodne vybratých ľudí aspoň dvaja majú v ten istý deň narodeniny?

1.10. Skupinu z koľkých ľudí musíme mať, aby sme s pravdepodobnosťou väčšou ako 1/2 mohli tvrdiť, že aspoň dvaja členovia tej skupiny majú narodeniny v ten istý deň?

1.11. Do výťahu sedemposchodového domu nastupujú 3 osoby. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň dve z nich vystúpia na tom istom poschodí? (Podobne ako inde predpokladáme, že vystupujú nezávisle na sebe a pravdepodobnosť vystúpenia na ľubovoľnom poschodí je rovnaká.)

1.12. Aká je pravdepodobnosť toho, že pri sedemnásobnom hode hracej kocky padne šestka a) práve dvakrát b) najviac dvakrát c) aspoň dvakrát?

1.13. Z dvanástich predajní mäsa v meste v štyroch predražujú tovar. Náhodne vyberieme na kontrólu 2 predajne mäsa. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) v oboch predražujú tovar b) v oboch predávajú bez predražovania c) aspoň v jednej predražujú tovar?

1.14. Medzi 10 dobrých žiaroviek bolo omylom primiešených 5 chybných. Náhodne vyberieme 3 z tých 15 žiaroviek. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) všetky tri sú dobré b) práve jedna je chybná c) aspoň jedna je chybná?

1.15. Do okresného mesta v okrese, v ktorom je 30 obcí sa schádzajú dvadsiati branci. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň dvaja budú z tej istej obce?

Vlastnosť (3) môžeme zovšeobecnit na viac činiteľov ako 2. Už v príklade 1.6 sme to použili.

Príklad 1.10. Dokážte: Ak $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú navzájom sa vylučujúce udalosti (t. j. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$), tak

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Riešenie. Dôkaz urobíme indukciou pomocou (3). Pre $n = 1$ uvedené tvrdenie platí ($P(A_1) = P(A_1)$). Predpo-

kladajme, že platí pre nejaké n. Máme ju dokázať pre $n + 1$. Majme teda $n + 1$ navzájom sa vylučujúcich udalostí $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ (t. j. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$).
Potom udalosti

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n, B = A_{n+1}$$

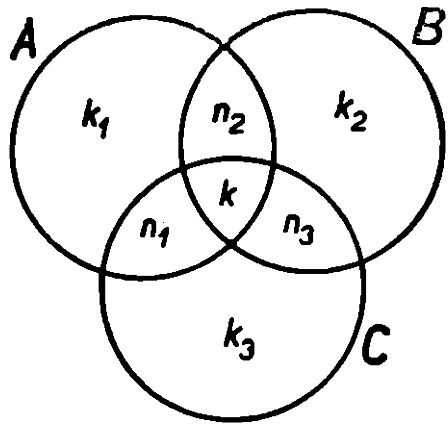
sú tiež disjunktné, t. j. $A \cap B = \emptyset$. Keby totiž existoval prvok $\omega \in A \cap B$, potom by existoval taký index i spomedzi $1, 2, \ldots, n$, že $\omega \in A_i$; súčasne $\omega \in A_{n+1}$, teda $\omega \in A_i \cap A_{n+1}$, čo nie je možné, pretože $i \neq n + 1$. Podľa (3) potom máme

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_{n+1}),$$

teda, ak použijeme indukčný predpoklad, dostaneme

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) = P(A_1) + \ldots +$$
$$+ P(A_n) + P(A_{n+1}).$$

Príklad 1.11. Skúsme sformulovať a dokázať tvrdenie



Obr. 3

analogické rovnosti (2) pre tri množiny, t. j. vyjadriť $P(A \cup B \cup C)$ pomocou $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ a pravdepodobností prienikov.

Riešenie. Zostrojme Vennov diagram. Máme ($m(E)$ — počet prvkov množiny E)

$$m(A \cup B \cup C) = k_1 + k_2 + k_3 + n_1 + n_2 + n_3 + k = (k_1 + n_1 + n_2 + k) + (k_2 + n_2 + n_3 + k) + (k_3 + n_1 + n_3 + k) - (n_1 + n_2 + n_3 + 2k) = m(A) + m(B) + m(C) - (n_1 + k) - (n_2 + k) - (n_3 + k) + k = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap C) - m(A \cap B) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C) .$$

Dostali sme teda vzorec

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) .$$

Teraz uvedený vzorec dokážeme pomocou vzťahu (2):

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) .$$

Ale podľa toho istého vzťahu (2) je

$$P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) +$$

$$+ P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) =$$
$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C).$$

Preto

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$
$$- P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B) +$$
$$+ P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap B \cap C).$$

Cvičenia

1.16. Dokážte: Ak A, B sú ľubovoľné udalosti, tak $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$.

1.17. Nech A, B sú také udalosti, že $P(A \cup B) = 3/4$, $P(A') = 2/3$, $P(A \cap B) = 1/4$. Nájdite a) $P(A)$ b) $P(B)$ c) $P(A \cap B')$.

1.18. Dokážte: Ak A, B sú ľubovoľné udalosti, potom $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$.

1.19. Vyjadrite podobne ako v príklade 1.11 $P(A \cup B \cup C \cup D \cup E)$ pomocou $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$, $P(E)$ a pravdepodobností prienikov.

1.20. Nájdite vzorec pre výpočet $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ a dokážte ho indukciou.

Príklad 1.12. Na 5 vešiakov si 5 návštevníkov odložilo 5 úplne rovnakých klobúkov. Pri odchode si náhodne vyberajú klobúky. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden z návštevníkov odíde v tom istom klobúku ako prišiel?

Riešenie. Nech A_i znamená: i-ty zákazník odchádza s tým istým klobúkom, s ktorým prišiel. Hľadáme

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5)$. Podľa cvičenia 1.19 (resp. 1.20, $n = 5$)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5) = P(A_1) + P(A_2) + \\ + \ldots + P(A_5) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \\ - \ldots - P(A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \\ + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + P(A_3 \cap A_4 \cap A_5) - \\ - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \ldots - P(A_2 \cap A_3 \cap \\ \cap A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\,.$$

Počítajme $P(A_1)$. Všetkých rozmiestnení piatich klobúkov na päť vešiakov je 5! (počet permutácií z 5 prvkov). A_1 nastane, ak prvý návštevník vezme svoj klobúk; ostatní štyria sa môžu podeliť o zvyšné klobúky 4! spôsobmi. Preto

$$P(A_1) = \frac{4!}{5!} = \frac{4.3.2.1}{5.4.3.2.1} = \frac{1}{5}\,.$$

Podobne

$$P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = \frac{1}{5}\,.$$

Vypočítajme teraz $P(A_1 \cap A_2)$. Všetkých rozmiestnení je opäť 5!, ale „priaznivé" sú len tie, pri ktorých prvý a druhý návštevník natrafili na svoj klobúk. Zvyšní traja sa preto môžu podeliť o ostatné klobúky už len 3! spôsobmi. Preto

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3!}{5!} = \frac{3.2.1}{5.4.3.2.1} = \frac{1}{5.4}\,.$$

Podobne

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_4) = \ldots = P(A_4 \cap A_5) = \frac{1}{5.4}$$

a analogicky

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \ldots =$$

$$= P(A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{5.4.3},$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \ldots =$$

$$= P(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{5.4.3.2},$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{5.4.3.2.1}.$$

Ak uvážime, že udalostí $A_1, A_2, \ldots, A_5$ je päť, prienikov $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3, \ldots$ je $\binom{5}{2}$, prienikov $A_1 \cap \cap A_2 \cap A_3, A_1 \cap A_2 \cap A_4, \ldots$ je $\binom{5}{3}$, atď. dostaneme

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5) = \binom{5}{1}\frac{1}{5} - \binom{5}{2}\frac{1}{5.4} +$$

$$+ \binom{5}{3}\frac{1}{5.4.3} - \binom{5}{4}\frac{1}{5.4.3.2} + \binom{5}{5}\frac{1}{5!} =$$

$$= 1 - \frac{5.4}{2.1.5.4} + \frac{5.4.3}{3.2.1.5.4.3} -$$

$$- \frac{5.4.3.2}{4.3.2.1.5.4.3.2} + \frac{1}{5!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}.$$

Cvičenia

1.21. Sekretárka náhodným spôsobom rozmiestňuje päť listov do piatich správne napísaných obálok. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň jeden list sa dostane do správnych rúk?

1.22. 32 kariet rozdali medzi štyroch hráčov. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň jeden z nich dostane všetky karty rovnakej farby?

1.23. V novostavbe odovzdali šiestim obyvateľom šesť rôznych kľúčikov od šiestich označených listových schránok. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) žiadny nedostal správny kľúčik t. j. kľúčik od svojej schránky b) jediný dostal správny kľúčik c) aspoň jeden dostal správny kľúčik d) aspoň dvaja dostali správny kľúčik?

Zdá se, že je na čase, aby sme upustili od predpokladu, že všetky prvky priestoru Ω sú rovnako pravdepodobné. Budeme predpokladať, že pravdepodobnosti jednotlivých jednoprvkových množín $\{\omega_i\}$ sú dané. Napr. ak hádžeme nepravidelnou kockou, nebudú všetky steny padať s rovnakou pravdepodobnosťou. Príslušné pravdepodobnosti sa v praxi získavajú (odhadujú) experimentálne a v našich príkladoch sú vopred dané. Nech napr. $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/9, P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = 2/9$, $P(\{\omega_5\}) = P(\{\omega_6\}) = 1/6$. (Prirodzene, súčet všetkých $P(\{\omega_i\})$ musí byť 1.) Pravdepodobnosť iných udalostí určíme pomocou vzťahu z príkladu 1.10. Všetky $\{\omega_i\}$ sa totiž navzájom vylučujú. Preto je rozumné definovať pravdepodobnosť nejakej udalosti A ako súčet pravdepodobností tých $\{\omega_i\}$, pre ktoré $\omega_i \in A$. Napr., ak A znamená padnutie steny s párnym počtom bodiek, tak

$$P(A) = P(\{\omega_2\} \cup \{\omega_4\} \cup \{\omega_6\}) =$$

$$= P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_4\}) + P(\{\omega_6\}) =$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Pravdepodobnosť toho, že padne stena s počtom bodiek väčším ako 3 je

$$P(B) = P(\{\omega_4\} \cup \{\omega_5\} \cup \{\omega_6\}) =$$
$$= P(\{\omega_4\}) + P(\{\omega_5\}) + P(\{\omega_6\}) =$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{9}.$$

Definícia 1.2. *Nech $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ je konečná neprázdna množina, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sú nezáporné čísla, ktorých súčet je 1. Pravdepodobnosťou udalosti $A \subset \Omega$ je číslo*

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Ďalej definujeme $P(\emptyset) = 0$.

Všimnime si, že pojem pravdepodobnosti z definície 1.1 je špeciálnym prípadom pravdepodobnosti z definície 1.2. Skutočne, položme v definícii 1.2 $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$. Potom

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} m(A) = \frac{m(A)}{n},$$

kde $m(A)$ je počet prvkov množiny A.

Tiež si je hodno povšimnúť, že aj pri tomto zovšeobecnení zostanú v platnosti rovnosti (1), (2) t. j.

$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

a teda aj implikácia (3):

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) .$$

Príklad 1.13. Dva prístroje pracujú tak, že po celý deň je zapnutý aspoň jeden z nich. Pritom 1. prístroj pracuje 70 % dňa, 2. prístroj 65 % dňa. Aká je pravdepodobnosť, že v určitý časový okamih budú zapojené oba prístroje? (Predpokladáme, že sa zapínajú a vypínajú nezávisle jeden na druhom.)

Riešenie. Nech A je udalosť — v danom okamihu je zapnutý 1. prístroj, B — zapnutý je 2. prístroj. Podľa predpokladu $A \cup B = \Omega$ je istá udalosť. Preto

$$1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0{,}7 + 0{,}65 - P(A \cap B)$$

odkiaľ

$$P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}65 - 1 = 0{,}35 .$$

Cvičenia

1.24. V prístroji sú tri súčiastky. Pravdepodobnosť toho, že v určitom okamihu pracuje určitá súčiastka je pre každú z nich 0,5, že pracujú súčasne určité dve spomedzi nich je (pre každú dvojicu) 0,1875, že pracujú všetky tri naraz je 0,0625. Aká je pravdepodobnosť toho, že v danom okamihu nebude pracovať ani jedna súčiastka?

1.25. V skupine tlmočníkov je 90 % takých, čo ovládajú jazyky A, F, R. Pravdepodobnosť, že tlmočník ovláda A je 1/3, pre F tiež 1/3, pre R 2/3, pravdepodobnosť, že ovláda všetky tri uvedené jazyky je 1/30. Aká je pravdepodobnosť toho, že tlmočník ovláda aspoň dva jazyky?