Co asi nevíte o vzdálenosti

Závěr

In: Alois Kufner (author): Co asi nevíte o vzdálenosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1974. pp. 114–[118].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403833

ZÁVĚR

V předcházejících kapitolách jsme čtenáři předložili malou ukázku problémů, které vzniknou, když se pokusíme o zobecnění tak „běžného" pojmu jako je *vzdálenost*. Výběr těchto ukázek byl přitom nesystematický a nutně omezený; o tomto tématu by se dala napsat ještě řada dalších kapitol. Ale snad alespoň z těchto „vzorků" vyplynulo, jak mnohotvárná je matematika, jak na jedné straně často potvrzuje naši intuici a „rozumnost" uspořádání světa kolem nás a jak nás na druhé straně překvapí nečekanými a na první pohled „nepřirozenými" výsledky.

Domnívám se, že nejvhodnějším zakončením této knížky o metrikách a metrických prostorech bude ještě jedna ukázka: zavedeme další metriku v rovině E_2, metriku, která opět podivuhodně vystihuje jev, s nímž se setkáváme v životě velmi často.

Příklad 74. Definujme pro body $x = [x_1, x_2]$ a $y = [y_1, y_2]$ v rovině E_2 „vzdálenost" $h(x, y)$ takto:

(1) pro $x = y$ položíme $h(x, y) = 0$

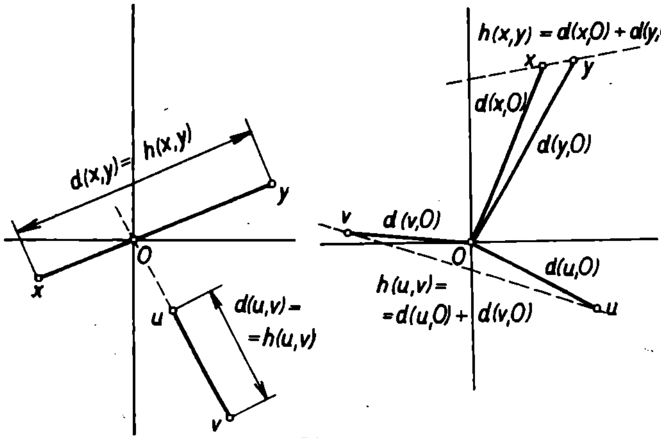
(2) je-li $x \neq y$ a přímka, určená body x a y, prochází počátkem, položíme

$$h(x, y) = d(x, y)$$

(3) je-li $x \neq y$ a přímka, určená body x a y, neprochází počátkem, položíme

$$h(x, y) = d(x, 0) + d(y, 0)$$

(viz obr. 31; d je přitom eukleidovská vzdálenost a 0 je počátek).



Obr. 31.

Podrobnějším rozborem čtenář zjistí, že $h(x, y)$ je vzdálenost, kterou musíme urazit, chceme-li se dostat z bodu x do bodu y ve městě, jehož městská hromadná doprava se řídí heslem „Vše přes centrum“: Ulice našeho města jsou uspořádány hvězdicovitě s průsečíkem v počátku; neleží-li body x a y na témže paprsku, musíme v místě x nasednout na tramvaj, jedoucí do centra, a tam přesednout na tramvaj, jedoucí po paprsku, na němž leží místo y. S touto situací — ovšem ještě náležitě zkomplikovanou tím, že paprsky mohou být i „křivé“ — se jistě většina čtenářů už někde setkala.

Úloha 13. Přesvědčte se, že vzdálenost h z příkladu 74 vyhovuje skutečně podmínkám **A**, **B** a **C**, kladeným na metriku, a zjistěte, jaký geometrický tvar mají koule $K(x, r)$ v metrickém prostoru $\{E_2, h\}$.

Poznámka 25. Čtenář, který vyřešil předcházející úlohu, jistě zjistil, že koule $K(0, 1)$ má v metrickém prostoru $\{E_2, h\}$ stejný tvar jako v metrickém prostoru $\{E_2, d\}$. Mohl by si nyní položit otázku, jak to souvisí s úvahami na str. 64, kde jsme k jistému danému rovinnému útvaru $\mathscr{U}$ našli metriku ϱ tak, že $\mathscr{U}$ byla koule $K(0, 1)$ v metrickém prostoru $\{E_2, \varrho\}$. Nedošli jsme k nějakému rozporu? Vždyť zmíněná metrika ϱ byla dána jednoznačně vzorcem (51), a my jsme k evidentně *stejnému* útvaru — kruhu $\mathscr{K}$ — našli dvě zcela *rozdílné* metriky d a h tak, že kruh $\mathscr{K}$ je koule $K(0, 1)$ jak v metrickém prostoru $\{E_2, d\}$, tak v metrickém prostoru $\{E_2, h\}$.

Tento rozpor je pouze zdánlivý. Ze vzorce (51) plyne, že metrika ϱ, určená tímto vzorcem, má vlastnost analogickou vlastnosti **D** eukleidovské metriky d (viz str. 16): platí

D* $\quad \varrho(x + u, y + u) = \varrho(x, y) \quad$ pro každé tři body x, y, u z E_2

(Dokažte to použitím vlastnosti **D**!) Odtud pak plyne, že *každá* koule $K(a, 1)$ o poloměru jedna v $\{E_2, \varrho\}$ má stejný tvar jako útvar $\mathscr{U}$ a vznikne jen jeho *posunutím*, při němž bod $0 = [0, 0]$ přejde v bod a. To už nelze říci o koulích $K(a, 1)$ v metrickém prostoru $\{E_2, h\}$ — ty už pro $a \neq [0, 0]$ mají jiný tvar: např. pro $a = [2, 0]$ je koule $K(a, 1)$ v $\{\mathsf{E}_2, h\}$ tvořena *úsečkou* délky 2, ležící na ose x_1 a mající střed v bodě a.

To znamená, že metrika h *nemá* vlastnost typu **D**, a nemůže být tedy dána vzorcem typu (51). Poznamenejme nakonec, že pochyby, které jsme právě rozptýlili, by vůbec nevznikly, kdybychom při definici metriky h zvolili za bod, v němž se „křižují všechny hvězdicovitě uspořádané tramvajové linky", nějaký jiný bod než právě počátek $[0, 0]$.