Co asi nevíte o vzdálenosti

4. kapitola. Vnitřek množiny, hranice množiny. Uzavřená množina

In: Alois Kufner (author): Co asi nevíte o vzdálenosti. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1974. pp. 77–93.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403831

4. kapitola

VNITŘEK MNOŽINY, HRANICE MNOŽINY. UZAVŘENÁ MNOŽINA

U takových množin v rovině, jako je např. obor S z obrázku 28, dovedeme určit, který bod leží „uvnitř“, který „na hranici množiny S“, který „vně“. Existují ovšem i méně názorné rovinné útvary, u nichž už je podobné rozhodnutí podstatně těžší, u nichž naše intuice selhává a může nás svést dokonce na scestí.*) Tyto intuitivně zřejmé pojmy dovedeme pomocí metriky zavést i v obecnějších množinách.

Budiž tedy $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a S podmnožina množiny M. Prvky množiny M pak rozdělíme do *tří* skupin, určených vztahem příslušného prvku k množině S. Nejprve si však připomeneme jisté označení: Symbolem

$$M - S$$

označíme množinu všech prvků z M, které *nepatří* do S. Množinu $M—S$ nazýváme doplňkem množiny S (vzhledem k množině M).

Definice 8. (1) Řekneme, že prvek x z M je *vnitřním bodem množiny* S, existuje-li kladné číslo $r = r(x)$ tak, že koule $K(x, r)$ leží celá v S.

*) S různými takovými velmi „nenázornými“ množinami se může čtenář seznámit např. v knížce N. J. Vilenkina: Neznámý svět nekonečných množin (Praha 1971).

(2) Řekneme, že prvek x z M je *vnějším bodem množiny* S, existuje-li kladné číslo $r = r(x)$ tak, že koule $K(x, r)$ neobsahuje *žádný* bod z S (a leží tedy celá v $M - S$).

(3) Řekneme, že prvek x z M je *hraničním bodem množiny* S, jestliže v každé kouli $K(x, r)$ se středem v bodě x (tj. pro každý poloměr $r > 0$) leží prvek z množiny S a současně prvek z množiny $M—S$.

Množinu všech vnitřních bodů množiny S označíme $\mathscr{I}(S)$ (od francouzského slova „intérieur“ = vnitřní) a nazveme ji vnitřkem množiny S (vzhledem k metrickému prostoru $\{M, \varrho\}$); množinu všech vnějších bodů množiny S označíme $\mathscr{E}(S)$ (od slova „extérieur“ = vnější) a nazveme ji vnějškem množiny S (vzhledem k metrickému prostoru $\{M, \varrho\}$); množinu všech hraničních bodů množiny S označíme $\mathscr{H}(S)$ a nazveme ji hranicí množiny S (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$).

Z definice 8 plynou různé důsledky; zformulujeme je ve tvaru poznámek.

Poznámka 17. Je třeba upozornit na rozdíl mezi vnějškem množiny S a mezi doplňkem $M - S$: Do doplňku $M - S$ patří každý prvek z M, který *nepatří* do S, kdežto do $\mathscr{E}(S)$ patří jen ty prvky z M, které do M nepatří včetně jisté koule, jejímž je příslušný prvek středem.

Poznámka 18. Vnitřní body množiny S nemohou být současně vnějšími body: body z $\mathscr{I}(S)$ totiž *leží* v S, kdežto body z $\mathscr{E}(S)$ tam *neleží*. Můžeme to vyjádřit též takto: vnitřek $\mathscr{I}(S)$ je částí S

$$\mathscr{I}(S) \subset S \tag{54}$$

zatím co vnějšek $\mathscr{E}(S)$ je částí doplňku $M - S$

$$\mathscr{E}(S) \subset M - S \tag{55}$$

Vztahy (54) a (55) přitom platí pro *každou* množinu $S \subset M$. Vztah hranice $\mathscr{H}(S)$ k původní množině S nelze takto jednoznačně charakterizovat; pro různé množiny mohou nastat různé případy (viz níže příklad 42). Hraniční bod ovšem nemůže být ani vnitřním, ani vnějším bodem: z části (3) definice 8 totiž plyne, že neexistuje *žádné* r (a tedy *žádná* koule), pro něž by byla splněna podmínka z části (1) nebo (2). — A konečně lze ukázat, že hraničními body množiny S jsou všechny ty body množiny M, které nejsou ani vnitřní ani vnější: Jestliže totiž bod x z M *není hraniční*, znamená to, že buď (a) existuje jistá koule $K(x, r)$ (tj. jisté kladné číslo r) tak, že tato koule neobsahuje *žádný* bod z S — pak však tato koule leží celá v $M - S$ a bod x je tudíž *vnějším* bodem množiny S; nebo (b) existuje jistá koule $K(x, r)$ (tj. jisté kladné číslo r) tak, že tato koule neobsahuje *žádný* bod z $M - S$ — pak však tato koule leží celá v S a bod x je tudíž *vnitřním* bodem množiny S.

Množinu M tedy můžeme vyjádřit jako sjednocení tří navzájem různých množin: vnitřku, vnějšku a hranice množiny S:

$$M = \mathscr{I}(S) \cup \mathscr{E}(S) \cup \mathscr{H}(S) \tag{56}$$

tento vztah platí pro *každou* množinu $S \subset M$.

Poznámka 19. Z definice 8 je také ihned patrné, že vnější bod množiny S je vnitřním bodem množiny $M - S$:

$$\mathscr{E}(S) = \mathscr{I}(M - S) \tag{57}$$

a že naopak vnitřní bod množiny S je vnějším bodem množiny $M - S$:

$$\mathscr{I}(S) = \mathscr{E}(M - S) \tag{58}$$

Hranice obou množin jsou přitom stejné:

$$\mathscr{H}(S) = \mathscr{H}(M - S) \tag{59}$$

Příklad 42. V příkladu 36 jsme definovali tři množiny v rovině E_2. Čtenář se snadno přesvědčí, že všechny tři množiny mají stejný vnitřek — totiž množinu S_1:

$$\mathscr{I}(S_1) = \mathscr{I}(S_2) = \mathscr{I}(S_3) = S_1$$

že mají stejný vnějšek:

$$\mathscr{E}(S_1) = \mathscr{E}(S_2) = \mathscr{E}(S_3) = \mathsf{E}_2 - S_3$$

(tj. rovinu, z níž vyjmeme půlkruh i křivku, která tento půlkruh ohraničuje), a že mají i stejnou hranici, kterou tvoří půlkružnice $\widehat{AB}$ a úsečka $\overline{AB}$:

$$\mathscr{H}(S_1) = \mathscr{H}(S_2) = \mathscr{H}(S_3)$$

Přitom vztah množiny S_i k její hranici $\mathscr{H}(S_i)$ ilustruje možnosti, které mohou nastat: u množiny S_1 *není* hranice $\mathscr{H}(S_1)$ částí množiny S_1 (a je tedy částí množiny $\mathsf{E}_2 - S_1$); u množiny S_2 patří část hranice $\mathscr{H}(S_2)$ do S_2 (totiž úsečka $\overline{AB}$), zatímco část hranice do S_2 nepatří (totiž oblouk $\widehat{AB}$); u množiny S_3 je *celá* hranice $\mathscr{H}(S_3)$ částí množiny S_3. — Tyto úvahy přitom můžeme provádět v metrických prostorech $\{\mathsf{E}_2, d\}$, $\{\mathsf{E}_2, p\}$ i $\{\mathsf{E}_2, m\}$.

Příklad 43. Uvažujme metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, d\}$ a v něm množinu S tvořenou jediným bodem a. Tato množina *nemá* vnitřek: $\mathscr{I}(S) = \emptyset$; přitom bod a je sám svou hranicí: $\mathscr{H}(S) = S$. Ze vzorce (56) pak plyne, že $\mathscr{E}(S) = \mathsf{E}_2 - S$. — Množina T, tvořená např. úsečkou $\overline{AB}$ (nebo obloukem $\widehat{AB}$) z obr. 27, má tytéž vlastnosti: $\mathscr{H}(T) = T$, $\mathscr{I}(T) = \emptyset$ a $\mathscr{E}(T) = \mathsf{E}_2 - T$.

Nebudeme už pojem vnitřku, vnějšku a hranice množiny ilustrovat na dalších příkladech. Doporučujeme však čtenáři, aby si z hlediska těchto pojmů prošel předcházející příklady a rozebral množiny, které v nich vystupují. Zvláště doporučujeme, aby si dokázal, že hranicí koule $K(a, r)$ v metrických prostorech $\{\mathsf{E}_2, d\}$, $\{\mathsf{E}_2, p\}$ i $\{\mathsf{E}_2, m\}$ je sféra $S(a, r)$.

Uvedeme ovšem dva příklady, které ukazují, že pojmy vnitřku, vnějšku a hranice množiny závisejí — stejně jako pojem otevřené množiny — na zvoleném metrickém prostoru.

Příklad 44. Uvažujme množinu S z obr. 28 (viz příklad 39). Zkoumáme-li množinu S jako podmnožinu *celé* roviny, bude se „chovat" podobně jako množina S_2 z příkladu 42: její vnitřek $\mathscr{I}(S)$ (v $\{\mathsf{E}_2, d\}$) bude tvořit množina, která vznikne, když z S odstraníme úsečku $\overline{AB}$, zatímco její hranici $\mathscr{H}(S)$ (v $\{\mathsf{E}_2, d)\}$ tvoří úsečka $\overline{AB}$ i křivka (oblouk) $\widehat{AB}$ z obr. 28. — Zkoumáme-li však množinu S jako podmnožinu množiny M z příkladu 30 (tj. jako podmnožinu horní poloroviny včetně osy x_1), bude její vnitřek $\mathscr{I}(S)$ (v $\{M, d\}$!!) tvořit *celá* množina S — tj. do vnitřku patří tentokrát *i úsečka* $\overline{AB}$ (plyne to z tvaru koule v metrickém prostoru $\{M, d\}$; rozebírali jsme to v příkladu 30) a hranici $\mathscr{H}(S)$ (v $\{M, d\}$) tvoří jen křivka $\widehat{AB}$.

Příklad 45. O něco výše jsme čtenáři doporučili, aby si ukázal, že v $\{E_2, d\}$ je hranicí koule $K(a, r)$ sféra $S(a, r)$. Tento názorně zcela zřejmý fakt nelze automaticky přenést do jiných metrických prostorů: V prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 27 *není sféra $S(a, r)$ hranicí koule* $K(a, r)$. Dokážeme to: Zvolíme-li např. bod $b = [2, 4]$ z M, který leží na sféře $S(a, 3)$ z obr. 18, je koule $K\left(b, \frac{1}{2}\right)$ tvořena *jediným* bodem b; tato koule tedy neobsahuje *žádný* bod množiny $K(a, 3)$, a proto nemůže patřit do hranice $\mathscr{H}(K(a, 3))$. Naopak: bod b — a tedy celá koule $K\left(b, \frac{1}{2}\right)$ — leží v $M - K(a, 3)$ a patří tudíž do $\mathscr{E}(K(a, 3))$. V prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 27 tedy pro každou kouli K platí: $K = \mathscr{I}(K)$, $M - K = \mathscr{E}(K)$ a hranice $\mathscr{H}(K)$ je *prázdná množina.*

Úloha 9. Srovnáním definice 7 s částí (1) definice 8 dokažte tuto větu:

Věta 7. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a S libovolná podmnožina množiny M. Pak platí:* (1) *Vnitřek $\mathscr{I}(S)$ množiny S je otevřená množina (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$).*

(2) *Množina S je otevřená v $\{M, \varrho\}$ právě tehdy, je-li totožná se svým vnitřkem, tj. platí-li*

$$\mathscr{I}(S) = S$$

Definice 9. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Řekneme, že množina $S \subset M$ je *uzavřená* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$), je-li její doplněk $M - S$ množina otevřená (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$).

Příklad 46. Uzavřená koule $\overline{K(a, r)}$ v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ je v tomto prostoru uzavřenou množinou. Dokážeme to (kreslete si obrázek): Doplněk $M - \overline{K(a, r)}$ je podle definice uzavřené koule tvořen všemi těmi body x z M, pro které je $\varrho(a, x) > r$. Zvolme tedy jeden (libovolný, ale pevný) bod x z doplňku $M - \overline{K(a, r)}$ a označme R jeho vzdálenost od bodu a: $\varrho(a, x) = R$. Pak je $R > r$, a položíme-li $r^* = \frac{1}{2}(R - r)$, bude $r^* > 0$. Ukážeme, že koule $K(x, r^*)$ leží celá v $M - \overline{K(a, r)}$: Budiž y libovolný bod z koule $K(x, r^*)$ — to znamená, že $\varrho(x, y) < r^*$. Podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$\varrho(a, x) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(a, y)$$

čili

$$\varrho(a, y) \geqq \varrho(a, x) - \varrho(x, y)$$

Ale $\varrho(a, x) = R$ a $-\varrho(x, y) > -r^*$, a proto je

$$\varrho(a, y) > R - r^* = R - \frac{1}{2}(R - r) =$$

$$= \frac{1}{2}(R + r) > \frac{1}{2}(r + r) = r$$

(užili jsme toho, že $R > r$). Bod y tedy leží v $M -$ $- \overline{K(a, r)}$, a protože y byl libovolný bod koule $K(x, r^*)$, leží v $M - \overline{K(a, r)}$ celá tato koule. Tím jsme však k danému prvku x z $M - \overline{K(a, r)}$ našli číslo $r^* > 0$, které požaduje definice 7, a podle této definice je tedy množina $M - \overline{K(a, r)}$ otevřená množina. Doplňkem této množiny (vzhledem k M) je však uzavřená koule $\overline{K(a, r)}$, a ta je tedy podle definice 9 uzavřenou množinou.

Příklad 47. Ze vzorce (56) plyne, že doplňkem množiny $\mathscr{I}(S)$ je množina $\mathscr{E}(S) \cup \mathscr{H}(S)$. Protože množina $\mathscr{I}(S)$ je podle tvrzení (1) věty 7 otevřená, dokázali jsme vlastně, že *množina*

$$\mathscr{E}(S) \cup \mathscr{H}(S)$$

je uzavřená v $\{M, \varrho\}$. Toto tvrzení platí pro každou množinu $S \subset M$. Použijeme-li je tedy pro množinu $M - S$, bude uzavřená také množina

$$\mathscr{E}(M - S) \cup \mathscr{H}(M - S)$$

Odtud dostáváme použitím vzorců (58) a (59) ihned tuto větu:

Věta 8. *Budiž* $\{M, \varrho\}$ *metrický prostor a* S *libovolná podmnožina množiny* M. *Pak je množina*

$$\mathscr{I}(S) \cup \mathscr{H}(S)$$

uzavřená v $\{M, \varrho\}$.

Příklad 48. Množina $\mathscr{E}(S)$ je vnitřkem množiny $M - S$ a je tedy podle věty 7 otevřenou množinou. Také $\mathscr{I}(S)$ je otevřená množina, a proto je otevřená také množina

$$\mathscr{I}(S) \cup \mathscr{E}(S)$$

(dokažte to!). Doplňkem této otevřené množiny (vzhledem k M) je podle vzorce (56) hranice $\mathscr{H}(S)$; dokázali jsme tedy, že *hranice libovolné množiny* $S \subset M$ je *uzavřená množina v* $\{M, \varrho\}$.

Příklad 49. Uvažujme znovu metrické prostory a množiny S_1, S_2 a S_3 z příkladu 36 (viz též příklad 42). Množina S_1 je *otevřená* — plyne to nyní např. z věty 7, neboť jsme v příkladu 42 ukázali, že $\mathscr{I}(S_1) = S_1$. Množina S_3 je naproti tomu *uzavřená*: podle příkladu 42 je totiž $\mathscr{E}(S_3) = \mathsf{E}_2 - S_3$, podle vzorce (57) je $\mathscr{E}(S_3) = \mathscr{I}(\mathsf{E}_2 - S_3)$, a tedy je $\mathscr{I}(\mathsf{E}_2 - S_3) = \mathsf{E}_2 - S_3$; to však podle věty 7 znamená, že množina $\mathsf{E}_2 - S_3$ je otevřená. A konečně opět z tvrzení (2) věty 7 plyne, že množina S_2 není *ani otevřená ani uzavřená*: Množina S_2 totiž obsahuje část hranice $\mathscr{H}(S_2)$, takže *není* $\mathscr{I}(S_2) = S_2$, a také množina $\mathsf{E}_2 - S_2$ není otevřená, neboť obsahuje část hranice $\mathscr{H}(S_2) = \mathscr{H}(\mathsf{E}_2 - S_2)$, takže *není* $\mathscr{I}(\mathsf{E}_2 - S_2) = \mathsf{E}_2 - S_2$.

Příklad 50. Vraťme se k prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 45 a označme K kouli v tomto prostoru. Podle úlohy 8 je K otevřená množina v $\{M, d\}$, a tedy je podle věty 7 $\mathscr{I}(K) = K$. — V příkladu 45 jsme ukázali, že $\mathscr{H}(K) = \emptyset$, a proto je $\mathscr{I}(K) \cup \mathscr{H}(K) = \mathscr{I}(K) = K$. Podle věty 8 je však množina $\mathscr{I}(K) \cup \mathscr{H}(K)$ uzavřená v $\{M, d\}$, tj. množina K je uzavřená v $\{M, d\}$. Ukázali jsme tedy, že koule K je v $\{M, d\}$ *současně* otevřená i uzavřená!

Množiny, které jsou současně otevřené i uzavřené, nazýváme *obojetné*. Obojetné množiny existují v *každém* metrickém prostoru:

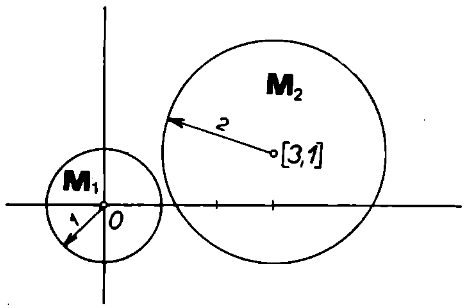
Věta 9. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Pak jsou množiny M a $\emptyset$ obojetné v $\{M, \varrho\}$.*

D ů k a z plyne z věty 4 a z definice 9: Doplňkem množiny M vzhledem k M je prázdná množina $\emptyset$; ta je podle věty 4 otevřená v $\{M, \varrho\}$ čili je množina M uzavřená. Podobně je doplňkem množiny $\emptyset$ vzhledem k M množina M sama; ta je podle věty 4 otevřená v $\{M, \varrho\}$, čili podle definice 9 je množina $\emptyset$ uzavřená.

Z věty 5 a z definice 9 také ihned plyne, že v prostoru $\{M, \varrho\}$, kde M je libovolná množina a ϱ je metrika ze vzorce (45), je obojetná *každá množina* $S \subset M$.

Obojetné množiny působí poněkud „rušivě". Naštěstí však v „běžných" metrických prostorech $\{E_2, d\}$, $\{E_3, d\}$ atp. jsou množiny E_2 (resp. E_3) a prázdná množina $\emptyset$ *jedinými* obojetnými množinami; to zde ovšem nebudeme dokazovat. Uvedeme však ještě jeden příklad obojetné množiny, který ukazuje, že také obojetnost závisí na metrickém prostoru:

Příklad 51. Uvažujme v rovině E_2 dva kruhy: kruh M_1 se středem v počátku a o poloměru 1, a kruh M_2 se středem v bodě [3,1] a o poloměru 2 (viz obr. 29); kružnice,



Obr. 29

které tyto kruhy ohraničují, přitom k množinám M_1 a M_2 *nepočítáme*. Budiž nyní $M = M_1 \cup M_2$; podle věty 1 je $\{M, d\}$ metrický prostor. Snadno se přesvědčíme, že jak M_1, tak M_2 jsou otevřené množiny v $\{M, d\}$. Současně je však M_1 doplňkem (otevřené) množiny M_2 vzhledem k M, a je tedy uzavřenou množinou v $\{M, d\}$, a stejně je uzavřená i množina M_2 jako doplněk otevřené množiny M_1. Množiny M_1 a M_2 jsou tedy v $\{M, d\}$

obojetné. Přitom v $\{\mathsf{E}_2, d\}$ jsou to typické otevřené množiny — např. podle úlohy 8.

Zavedeme na závěr této kapitoly ještě jeden důležitý pojem:

Definice 10. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Řekneme, že prvek x z M je *bodem uzávěru* množiny $S \subset M$, jestliže v každé kouli $K(x, r)$ (tj. pro každé kladné číslo r) leží alespoň jeden prvek množiny S. — Množinu všech bodů uzávěru množiny S nazveme *uzávěrem množiny* S (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) a označíme ji $\overline{S}$.

Všimněme si některých vlastností uzávěru $\overline{S}$:

(1) Především obsahuje uzávěr $\overline{S}$ množinu S:

$$S \subset \overline{S} \tag{60}$$

Je-li totiž x prvek z S, leží v každé kouli $K(x, r)$ alespoň jeden prvek z S, totiž prvek x samotný.

(2) Z části (3) definice 8 ihned plyne, že také každý hraniční bod množiny S patří do $\overline{S}$:

$$\mathscr{H}(S) \subset \overline{S} \tag{61}$$

(3) Z části (2) definice 8 konečně plyne, že vnější body množiny S *nepatří* do $\overline{S}$: $\mathscr{E}(S) \cap \overline{S} = \emptyset$. Pak totiž existuje alespoň jedno číslo $r = r(x)$ tak, že koule $K(x, r)$ neobsahuje žádný bod z S, a není tedy splněna podmínka z definice 10.

Protože ze vzorců (54) a (56) plyne, že $M = S \cup \mathscr{E}(S) \cup \mathscr{H}(S)$, dostáváme z vlastností (1)—(3) uzávěru $\overline{S}$ ihned tento důsledek:

$$\overline{S} = S \cup \mathscr{H}(S) \quad (= \mathscr{I}(S) \cup \mathscr{H}(S)) \tag{62}$$

Můžeme tedy místo (56) psát také

$$M = \overline{S} \cup \mathscr{E}(S) \tag{63}$$

Odtud plyne tato věta:

Věta 10. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a S libovolná podmnožina množiny M. Pak je její uzávěr $\overline{S}$ uzavřená množina (v $\{M, \varrho\}$).*

Důkaz: Podle (63) a podle vlastnosti (3) uzávěru $\overline{S}$ je množina $\overline{S}$ doplňkem vnějšku $\mathscr{E}(S)$. Množina $\mathscr{E}(S)$ je však otevřená — např. podle věty 7, neboť je vnitřkem množiny $M - S$.

Platí dokonce o něco více:

Věta 11. *Množina $S \subset M$ je uzavřená v $\{M, \varrho\}$ právě tehdy, je-li totožná se svým uzávěrem, tj. platí-li*

$$S = \overline{S}$$

Důkaz: (a) Nechť je $S = \overline{S}$. Množina $\overline{S}$ je podle věty 10 uzavřená v $\{M, \varrho\}$, a je tedy uzavřená i množina S.

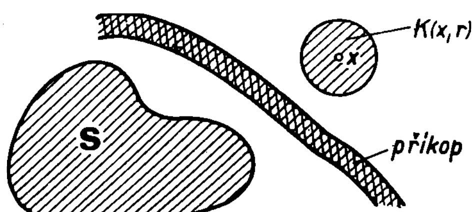
(b) Nechť je množina S uzavřená. To znamená, že množina $M - S$ je otevřená, tj. podle věty 7 je $\mathscr{I}(M - S) = M - S$. Ale $\mathscr{I}(M - S) = \mathscr{E}(S)$, takže máme $\mathscr{E}(S) = M - S$ čili $S = M - \mathscr{E}(S)$. Současně je však podle (63) $\overline{S} = M - \mathscr{E}(S)$, a tedy máme $S = \overline{S}$.

Opět nebudeme pojem uzávěru ilustrovat na příkladech. Množina $\overline{S}$ je totiž určena pomocí množin S a $\mathscr{H}(S)$ a čtenář si snadno uvědomí, jak vypadají uzávěry množin v předcházejících příkladech.

Úloha 10. Ukažte, že uzávěr $\overline{S}$ je *nejmenší* uzavřená množina, která obsahuje množinu S (tj. dokažte toto tvrzení: Je-li T uzavřená množina v $\{M, \varrho\}$ a je-li $S \subset T$, je také $\overline{S} \subset T$).

Úloha 11. Podobně ukažte, že vnitřek $\mathscr{I}(S)$ množiny S je *největší* otevřená množina obsažená v S (tj. dokažte toto tvrzení: Je-li G otevřená množina a je-li $G \subset S$, je také $G \subset \mathscr{I}(S)$).

V poznámce 17 jsme upozornili na rozdíl mezi *doplňkem* množiny S (vzhledem k M) a mezi jejím *vnějškem* $\mathscr{E}(S)$: Je-li x bod z $\mathscr{E}(S)$, existuje koule $K(x, r)$, která celá leží v $\mathscr{E}(S)$, a bod x je tedy od množiny S *oddělen*.



Obr. 30

Tuto situaci si můžeme ilustrovat v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, d\}$: abychom se z množiny S dostali do bodu x z $\mathscr{E}(S)$, musíme „přeskočit příkop“, znázorněný na obr. 30. (Poloha příkopu je pochopitelně závislá na poloze bodu x!) Z tohoto obrázku je též vidět, že bod x je „dosti

„daleko“ od množiny S, tj. že vzdálenost bodu x z $\mathscr{E}(S)$ od množiny S je kladná:

$$d(x, S) > 0$$

Uvidíme v dalším (viz příklad 54), že tak tomu je dokonce v *každém* metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$; současně to naznačuje, že množiny, které jsme v této kapitole zavedli, lze charakterizovat pomocí pojmu vzdálenosti bodu od množiny, zavedeného v definici 5.

Příklad 52. Uvažujme v obecném metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ množinu $S \subset M$ a její hranici $\mathscr{H}(S)$. Pak platí:

$$\text{Je-li } x \text{ z } \mathscr{H}(S), \text{ je } \varrho(x, S) = 0$$

Dokážeme to: Zvolme $r = \frac{1}{n}$. Protože x patří do $\mathscr{H}(S)$, leží podle části (3) definice 8 v kouli $K\left(x, \frac{1}{n}\right)$ nějaký prvek x_n z S; je tedy

$$\varrho(x, x_n) < \frac{1}{n} \tag{64}$$

Takové prvky najdeme pro každé přirozené číslo n, a z nerovnosti (64) tedy plyne, že vždy dovedeme určit prvek y z S tak, aby vzdálenost $\varrho(x, y)$ byla libovolně malá. To však znamená, že $\inf\limits_{y \in S} \varrho(x, y) = 0$, a tvrzení je dokázáno.

Příklad 53. Nechť je S otevřená množina v $\{M, \varrho\}$. Pak je $\mathscr{I}(S) = S$ a prvky z hranice $\mathscr{H}(S)$ nepatří do S. Podle předchozího příkladu mají body hranice $\mathscr{H}(S)$ od množiny S nulovou vzdálenost, ačkoliv do S *nepatří*. Jinými slovy: Z toho, že $\varrho(x, S) = 0$, nemusí ještě plynout, že bod x leží v množině S. S touto skutečností jsme se pro speciální metrické prostory už setkali v příkladech 29 a 34; tento příklad tedy doplňuje poznámku 11, implikaci (a). — Ilustrujte si tento obecný poznatek např. na množinách S_1, S_2 a S_3 z příkladu 36 (s přihlédnutím k příkladu 42).

Pomocí pojmu vzdálenosti bodu od množiny lze plně popsat i uzávěr a hranici množiny S:

Věta 12. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a S podmnožina množiny M. Pak platí: Prvek x z M patří do uzávěru $\overline{S}$ množiny S právě tehdy, je-li*

$$\varrho(x, S) = 0 \tag{65}$$

Důkaz: (a) Podle (62) je $\overline{S} = S \cup \mathscr{H}(S)$. V příkladech 23 a 52 jsme ukázali, že prvky z S i z $\mathscr{H}(S)$ mají od S nulovou vzdálenost, a proto je také pro prvky x z $\overline{S}$ $\varrho(x, S) = 0$. Podmínka (65) je tedy nutná.

(b) Nechť je naopak splněna podmínka (65). Podle definice infima (viz odbočení páté) to znamená, že k libovolnému kladnému číslu ε existuje prvek y_ε z S tak, že $\varrho(x, y_\varepsilon) < \varepsilon$. Bod y_ε tedy leží v kouli $K(x, \varepsilon)$. Protože to platí pro *každou* takovou kouli (tj. pro každé $\varepsilon > 0$), obsahuje každá z těchto koulí bod množiny S, a to znamená, že prvek x patří do uzávěru $\overline{S}$.

Příklad 54. Z věty 12 plyne, že číslo $\varrho(x, S)$ je různé od nuly (a tedy kladné) právě tehdy, když x *nepatří* do $\overline{S}$. Podle (62) je $\overline{S} = \mathscr{I}(S) \cup \mathscr{H}(S)$, a bod x, který nepatří do $\overline{S}$, musí tedy ležet v $\mathscr{E}(S)$. Tím dostáváme:

$$\varrho(x, S) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathscr{E}(S)$$

což potvrzuje situaci, kterou jsme pro speciální metrický prostor ilustrovali na obr. 30.

Věta 13. *Za předpokladů věty* 12 *platí: Prvek x z M patří do hranice $\mathscr{H}(S)$ množiny S právě tehdy, je-li*

$$\varrho(x, S) = \varrho(x, M - S) = 0 \tag{66}$$

Důkaz: (a) Nechť prvek x patří do $\mathscr{H}(S)$. Pak je podle příkladu 52 $\varrho(x, S) = 0$. Protože podle (59) je $\mathscr{H}(S) = \mathscr{H}(M - S)$, patří x také do $\mathscr{H}(M - S)$, a opět podle příkladu 52 je $\varrho(x, M - S) = 0$. Podmínka (66) je tedy nutná.

(b) Nechť jsou naopak splněny podmínky (66). Z rovnosti $\varrho(x, S) = 0$ plyne podle věty 12, že x patří do $\overline{S} = S \cup \mathscr{H}(S)$, z rovnosti $\varrho(x, M - S) = 0$ pak plyne podle téže věty, že x patří do $\overline{M - S} = (M - S) \cup \mathscr{H}(M - S) = (M - S) \cup \mathscr{H}(S)$ [užili jsme opět vzorce (59)]. Prvek x tedy patří *současně* do množin $S \cup \mathscr{H}(S)$ a $(M - S) \cup \mathscr{H}(S)$, a protože množiny S a $M - S$ se navzájem vylučují, musí x patřit do množiny $\mathscr{H}(S)$. Podmínka (66) je tedy postačující.

Hraničními body množiny S v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ jsou tedy právě ty body množiny M, které mají nulovou vzdálenost jak od množiny S, tak od jejího doplňku $M - S$. — Protože rovnosti (66) znamenají podle věty 12, že x leží současně v množině $\overline{S}$ i v množině $\overline{M - S}$, musí bod x z $\mathscr{H}(S)$ ležet v průniku těchto množin:

$$\mathscr{H}(S) = \overline{S} \cap \overline{(M - S)}$$

Opět doporučujeme čtenáři, aby si obsah vět 12 a 13 ilustroval na množinách v různých metrických prostorech, s nimiž jsme se zde dosud setkali.

Učiňme na okamžik tuto úmluvu: Budeme říkat, že prvek x množiny M leží „daleko" od množiny $S \subset M$ (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$), je-li jeho vzdálenost od množiny S *kladná* (číslo $\varrho(x, S)$ přitom může být i velice malé, podstatné je jen to, aby bylo větší než nula). Znamená to tedy, že pak existuje celá koule $K(x, r)$, která nemá s množinou S žádné společné body, že bod x je od množiny S oddělen jakýmsi „příkopem" (viz obr. 30). Naopak řekneme, že bod x leží „blízko" množiny S, je-li $\varrho(x, S) = 0$; pak tedy neexistuje žádný příkop, který by bod x od množiny S odděloval.

V rámci této úmluvy můžeme výsledky předcházejících příkladů a vět ilustrovat takto:

(1) do vnějšku $\mathscr{E}(S)$ množiny S patří právě ty body x z M, které leží „daleko" od S (příklad 54)

(2) uzávěr $\overline{S}$ množiny S je tvořen právě těmi body x z M, které leží „blízko" množiny S (věta 12)

(3) hranici $\mathscr{H}(S)$ množiny S tvoří právě ty body x z M, které leží „blízko" množiny S a současně i „blízko" jejího doplňku $M - S$ (věta 13)

(4) do vnitřku $\mathscr{I}(S)$ množiny S patří právě ty body x z M, které leží „daleko" od doplňku $M - S$ množiny S [to plyne z (1) a z toho, že $\mathscr{I}(S) = \mathscr{E}(M - S)$].