7. kapitola

O JEDNOM PŘIŘAZOVACÍM PROBLÉMU

Nechť jsou dány dvě n-tice reálných čísel

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{a} \quad (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

kde n je dané přirozené číslo. Náš problém záleží v tom, přiřadit číslům a_1, a_2, ..., a_n vzájemně jednoznačně v nějakém obecně novém pořadí čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tak, aby součet součinů přiřazených dvojic byl maximální. Jinými slovy, hledáme takové pořadí b_{k_1}, b_{k_2}, ..., b_{k_n} čísel $b_1, b_2, \ldots, b_k$, pro které platí

$$a_1 b_{k_1} + \ldots + a_n b_{k_n} \geqq a_1 b_{l_1} + \ldots + a_n b_{l_n}$$

pro všechna možná pořadí b_{l_1}, b_{l_2}, ..., b_{l_n} čísel b_1, b_2, ..., b_n.

Řešení zformulovaného problému je v principu možné provádět následující triviální metodou: Vyzkouší se všechna možná pořadí čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a určí se jim odpovídající součty součinů a z nich se vyhledá maximální. Protože všech zmíněných pořadí je $n! = 1 . 2 . \ldots . n$, je takováto metoda pro „větší" hodnoty n velmi neefektivní. Velmi jednoduché řešení problému nám umožní další věta, jejíž důkaz je založen na myšlence dynamického programování. Při formulaci věty budeme předpokládat, že platí

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \tag{9}$$

(Splnění tohoto předpokladu lze snadno dosáhnout vhodným přečíslováním.)

Věta 18: Nechť n-tice čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ splňuje podmínku (9) a nechť $b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_n}$ je takové pořadí čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$, pro které platí $b_{k_1} \leqq b_{k_2} \leqq \ldots \leqq b_{k_n}$. Potom je $a_1 b_{k_1} + \ldots + a_n b_{k_n}$ maximální.

K důkazu věty budeme potřebovat následující pomocnou větu, jejíž snadný důkaz přenecháváme čtenáři.

Lemma 3: Nechť pořadí $b_{r_1}, b_{r_2}, \ldots, b_{r_n}$ splňuje nerovnost $b_{r_i} \geqq b_{r_j}$ pro některou uspořádanou dvojici indexů (i, j), kde $i < j$. Sestrojme nové pořadí $b_{s_1}, b_{s_2}, \ldots, b_{s_n}$, kde $s_j = r_i$, $s_i = r_j$ a $s_k = r_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq k \neq j$. Potom platí $a_1 b_{r_1} + \ldots + a_n b_{r_n} \leqq \leqq a_1 b_{s_1} + \ldots + a_n b_{s_n}$.

Budeme říkat, že pořadí $b_{s_1}, \ldots, b_{s_n}$ z lemmatu 3 vzniklo z pořadí $b_{r_1}, \ldots, b_{r_n}$ *transpozicí* dvojice (b_{r_i}, b_{r_j}).

Důkaz věty 18: Větu dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že tvrzení věty platí pro přirozené číslo n a dokažme je pro $n + 1$. Nechť $b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_{n+1}}$ je pořadí splňující předpoklad věty a nechť $b_{l_1}, b_{l_2}, \ldots, b_{l_{n+1}}$ je libovolné pořadí čísel $b_1, \ldots, b_{n+1}$. Naším cílem je ukázat, že platí

$$a_1 b_{l_1} + \ldots + a_{n+1} b_{l_{n+1}} \leqq a_1 b_{k_1} + \ldots + a_{n+1} b_{k_{n+1}}, \quad (10)$$

Rozlišíme dva případy: a) $l_{n+1} = k_{n+1}$, b) $l_{n+1} \neq k_{n+1}$. V případě a) platí $a_{n+1} b_{l_{n+1}} = a_{n+1} b_{k_{n+1}}$, takže dokazovaná nerovnost vyplývá ze vztahu $a_1 b_{l_1} + \ldots + a_n b_{l_n} \leqq$

$\leq a_1 b_{k_1} + \ldots + a_n b_{k_n}$, který však platí na základě indukčního předpokladu. V případě b) postupujeme takto: V pořadí $b_{l_1}, b_{l_2}, \ldots, b_{l_n}$ nalezneme člen b_{l_i}, pro který $l_i = k_{n+1}$ a transpozicí dvojice $(b_{l_i}, b_{l_{n+1}})$ získáme z pořadí $b_{l_1}, \ldots, b_{l_n}, b_{l_{n+1}}$ nové pořadí $b_{p_1}, \ldots, b_{p_n}, b_{p_{n+1}}$, pro které $p_{n+1} = k_{n+1}$. Platí tedy jednak $a_1 b_{p_1} + \ldots + a_{n+1} b_{p_{n+1}} \leqq a_1 b_{k_1} + \ldots + a_{n+1} b_{k_{n+1}}$ (případ a)), a dále, protože $b_{l_i} = b_{k_{n+1}} \geqq b_{l_{n+1}}$, dostáváme na základě lemmatu 3 $a_1 b_{l_1} + \ldots + a_{n+1} b_{l_{n+1}} \leqq a_1 b_{p_1} + \ldots + a_{n+1} b_{p_{n+1}}$.

Spojením posledních dvou nerovností získáváme nerovnost (10), čímž je důkaz dokončen.

Věta 18 nám poskytuje jednoduchou metodu pro řešení zformulovaného extremálního problému, záležející v tom, že se čísla $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ uspořádají „podle velikosti" a přiřadí se navzájem členy nacházející se na stejném místě v obou pořadích.

Příklad 6: Použijeme větu 18 pro $n = 7$,

$$a_1 = -2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 0,$$
$$a_5 = 1,\ a_6 = 3,\ a_7 = -1$$
$$b_1 = 10,\ b_2 = 5,\ b_3 = -4,\ b_4 = 6,$$
$$b_5 = 0,\ b_6 = -3,\ b_7 = 2$$

Sestrojíme nová pořadí

$$a_1 = -2,\ a_7 = -1,\ a_4 = 0,\ a_5 = 1,$$
$$a_2 = 3,\ a_6 = 3,\ a_3 = 4$$
$$b_3 = -4,\ b_6 = -3,\ b_5 = 0,\ b_7 = 2,$$
$$b_2 = 5,\ b_4 = 6,\ b_1 = 10$$

odkud dostáváme hledané přiřazení. Maximální hodnota, odpovídající potom našemu maximalizačnímu problému je $a_1 b_3 + a_7 b_6 + \ldots + a_3 b_1 = 86$.

Analogický problém o minimu se řeší na základě analogické věty, jejíž důkaz přenecháváme čtenáři.

Věta 19: Nechť n-tice čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ splňuje podmínku (9) a nechť $b_{m_1}, \ldots, b_{m_n}$ je takové pořadí čísel $b_1, \ldots, b_n$, že platí $b_{m_1} \geqq b_{m_2} \geqq \ldots \geqq b_{m_n}$. Potom má součet $a_1 b_{m_1} + \ldots + a_n b_{m_n}$ nejmenší možnou hodnotu ze všech takových součtů.

Cvičení

Cvičení 1: Dokažte lemma 3.

Cvičení 2: Dokažte větu 19.

Cvičení 3: Řešte minimalizační problém v podmínkách příkladu 6.

Cvičení 4: Dokažte následující tvrzení: Nechť čísla $a_1, \ldots, a_n$ i čísla $b_1, \ldots, b_n$ jsou navzájem různá, a nechť platí $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Potom je $a_1 b_{k_1} + \ldots + a_n b_{k_n}$ maximální tehdy a jen tehdy, jestliže $b_{k_1} < b_{k_2} < \ldots < b_{k_n}$.

Cvičení 5: Řešte následující extremální problémy:

a) Nalezněte pořadí $b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_n}$ čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$, pro které $\max\{a_j b_{k_j} \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$ nabývá své minimální hodnoty.

b) Nalezněte pořadí $b_{r_1}, b_{r_2}, \ldots, b_{r_n}$ čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$, pro které $\min\{a_j b_{r_j} \mid j = 1, \ldots, n\}$ nabývá své maximální hodnoty.

Cvičení 6: Cestující chce postupně navštívit 5 měst **A, B, C, D** a **E** v uvedeném pořadí. Všechny úseky cesty **AB, BC, CD,** a **DE** mají navzájem různou délku a k dispozici jsou celkem čtyři typy letadel s navzájem různými cestovními rychlostmi, přičemž všechny typy létají na každém ze čtyř úseků. Dokažte: Jestliže cestující chce vyzkoušet každý typ letadla a přitom vykonat cestu za nejkratší možnou dobu, musí používat tím rychlejší letadlo, čím je delší úsek.*)

*) Srovnej s úlohou č. 84 z knížky *Dynkina, Molčanova a Rozentala*, „*Matěmatičeskije sorevnovanija* (Arifmetika i algebra)", Nauka, Moskva, 1970.