O dynamickém programování

6. kapitola. Úloha o nejcennějším nákladu lodi

6. kapitola

ÚLOHA O NEJCENNĚJŠÍM NÁKLADU LODI

Obecný extremální problém, kterým se v tomto odstavci chceme zabývat, může být motivován touto praktickou úlohou:

Obchodní loď s nosností b tun se vydává na cestu z jednoho přístavu do druhého a vzniká otázka o vhodném složení nákladu. Přitom je k dispozici n různých zboží*), přičemž váha j-tého zboží ($j = 1, 2, \ldots, n$) je a_j tun a jeho cena je c_j jednotek měny. Nyní chceme sestavit takové složení nákladu, aby nebyla překročena nosnost lodi a přitom aby celková cena nákladu byla maximální. Hledané složení nákladu popíšeme uspořádanou n-ticí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde položíme $x_j = 1$, jestliže j-té zboží je naloženo a $x_j = 0$ v opačném případě. Při tomto označení je celková cena nákladu $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ jednotek měny, jeho váha je $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ tun, a přicházíme tedy k následujícímu extremálnímu problému: máme nalézt maximum funkce

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{7}$$

na množině

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_j \in \{0, 1\} \ (j = 1, \ldots, n) \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqq b \end{array}\right\} \tag{8}$$

*) Předpokládáme, že každé zboží je nedělitelné, tj. v případě, že se nakládá, musí se naložit celé, nikoliv pouze jeho část.

Vyložíme algoritmus dynamického programování pro řešení zformulovaného extremálního problému (7), (8) za předpokladu, že c_j jsou libovolná reálná čísla, a_j jsou přirozená čísla a b je celé nezáporné.

Poznámka: Číselné údaje vyskytující se v praxi, mají obvykle tvar racionálních čísel (dokonce čísel s konečným dekadickým rozvojem). Je tedy rozumné předpokládat, že v případě úlohy o nejcennějším nákladu jsou čísla a_j, b a c_j racionální, kladná; přechodem k menším jednotkám lze pak dosáhnout toho, že jsou to čísla přirozená.

Algoritmus pro řešení maximalizačního problému (7), (8) se zakládá na rekurentním výpočtu jistých hodnot $\mathbf{g}_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$; $x = 0, 1, \ldots, b$), zavedených takto:

1. $\mathbf{g}_j(x)$ není definováno, jestliže

$$\left\{(x_1, \ldots, x_j) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\}\ (i = 1, \ldots, j) \\ a_1x_1 + \ldots + a_jx_j = x \end{array}\right\} = \emptyset$$

2. $\mathbf{g}_j(x)$ je definováno, jestliže

$$\left\{(x_1, \ldots, x_j) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_j \in \{0, 1\}\ (i = 1, \ldots, j) \\ a_1x_1 + \ldots + a_jx_j = x \end{array}\right\} \neq \emptyset\ ;$$

v posledním případě položíme

$$\mathbf{g}_j(x) = \max \left\{c_1x_1 + \ldots + c_jx_j \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\}\ (i = 1, \ldots, j) \\ a_1x_1 + \ldots + a_jx_j = x \end{array}\right\}$$

Hodnoty $\mathbf{g}_j(x)$ jsou tedy zavedeny analogicky jako hodnoty $f_j(x)$ v kapitole 3, avšak hlavní rozdíl, určený specifikou tohoto extremálního problému je v tom, že $\mathbf{g}_j(x)$ nejsou obecně definovány pro všechny dvojice (j, x), kde $j = 1, \ldots, n$ a $x = 0, 1, \ldots, b$. Při pevném j odpovídá definovaným hodnotám $\mathbf{g}_j(x)$ jistá funkce

$y = g_j(x)$, definovaná na nějaké podmnožině množiny $\{0, 1, \ldots, b\}$ (ve speciálním případě však může být definičním oborem celá množina $\{0, 1, \ldots, b\}$). Z důvodu stručnosti zápisu budeme dále místo „$g_j(x)$ není definováno" psát pouze „$g_j(x)$ nedef" a místo „$g_j(x)$ je definováno" pouze „$g_j(x)$ def".

Dále položíme

$$g^* = \max \left\{ c_1 x_1 + \ldots + c_n . x_n \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\} \; (i = 1, \ldots, n) \\ a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leqq b \end{array} \right\}$$

Maximum na pravé straně posledního vztahu skutečně existuje, neboť množina

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \ldots, n) \\ a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leqq b \end{array} \right\}$$

je za předpokladů o číslech a_j a b, uvedených na začátku kapitoly, neprázdná. Algoritmus pro řešení problému (7), (8) je založen na rekurentním výpočtu hodnot $g_j(x)$ a g^*, jak ukazuje následující věta.

Věta 16:

a) Platí $g_1(0) = 0$, $g_1(a_1) = c_1$ a $g_1(x)$ nedef pro všechna ostatní x.

b) Položme

$$\bar{g}_j(x) \begin{cases} \text{nedef, jestliže } g_j(x - a_{j+1}) \text{ nedef} \\ = g_j(x - a_{j+1}) + c_{j+1}, \text{ jestliže } g_j(x - a_{j+1}) \text{ def} \end{cases}$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$; $x = 0, 1, \ldots, b$.

Potom platí

$$g_{j+1}(x) \begin{cases} \text{nedef, jestliže } g_j(x) \text{ nedef a } \bar{g}_j(x) \text{ nedef} \\ = g_j(x), \text{ jestliže } g_j(x) \text{ def a } \bar{g}_j(x) \text{ nedef} \\ = \bar{g}_j(x), \text{ jestliže } g_j(x) \text{ nedef a } \bar{g}_j(x) \text{ def} \\ = \max\,(g_j(x), \bar{g}_j(x)), \text{ jestliže } g_j(x) \text{ def a } \bar{g}_j(x) \text{ def} \end{cases}$$

$(j = 1, 2, \ldots, n-1;\ x = 0, 1, \ldots, b)$

c) Platí $g^* = \max\{\mathbf{g}_n(x) | x = 0, \ldots, b;\ \mathbf{g}_n(x) \text{ def}\}$.

Důkaz: a) $\mathbf{g}_1(0) = \max\left\{c_1 x_1 \middle| x_1 \in \{0, 1\};\ a_1 x_1 = 0\right\} = \max\{c_1\, 0\} = 0$;

$\mathbf{g}_1(a_1) = \max\{c_1 x_1 | x_1 \in \{0, 1\};\ a_1 x_1 = a_1\} = \max\{c_1\, 1\} = c_1$;

$0 < x \neq a_1 \Rightarrow \left\{(x_1) \middle| x_1 \in \{0, 1\};\ a_1 x_1 = x\right\} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{g}_1(x)$ nedef

b) 1. $\mathbf{g}_j(x)$ nedef a $\bar{\mathbf{g}}_j(x)$ nedef, tj. $\mathbf{g}_j(x - a_{j+1})$ nedef.

Odtud vyplývá, že rovnice

$a_1 x_1 + \ldots + a_j x_j = x$ a $a_1 x_1 + \ldots + a_j x_j = x - a_{j+1}$ nemají žádné $\{0, 1\}$ — řešení $(x_1, \ldots, x_j)$*), a tedy ani rovnice

$$a_1 x_1 + \ldots + a_j x_j + a_{j+1} x_{j+1} = x$$

nemá žádné $\{0, 1\}$ — řešení $(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1})$. Tudíž platí $\mathbf{g}_{j+1}(x)$ nedef, což jsme měli ukázat.

2. $\mathbf{g}_j(x)$ def a $\bar{\mathbf{g}}_j(x)$ nedef, tj. $\mathbf{g}_j(x - a_{j+1})$ nedef. Potom rovnice $a_1 x_1 + \ldots + a_j x_j = x$ má $\{0, 1\}$ — řešení $(x_1, \ldots, x_j)$, ale rovnice $a_1 x_1 + \ldots + a_j x_j = x - a_{j+1}$ žádné $\{0, 1\}$ — řešení $(x_1, \ldots, x_j)$ nemá. Odtud vyplývá, že množina

$$\left\{(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}) \middle| \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\}\ (i = 1, \ldots, j, j+1) \\ a_1 x_1 + \ldots + a_j x_j + a_{j+1} x_{j+1} = x \end{array}\right\}$$

je neprázdná, avšak pro každou $(j+1)$-tici $(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1})$ z této množiny platí $x_{j+1} = 0$. Dostáváme tedy

$\mathbf{g}_{j+1}(x) =$

---

*) Pro stručnost vyjadřujeme obratem „$\{0, 1\}$ — řešení $(x_1, \ldots, x_j)$" okolnost, že $x_1 \in \{0, 1\}, \ldots, x_j \in \{0, 1\}$.

$$= \max \left\{ c_1x_1 + \ldots + c_jx_j + c_{j+1}x_{j+1} \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\}\ (i = \\ = 1, \ldots, j+1) \\ a_1x_1 + \ldots + a_jx_j + \\ + a_{j+1}x_{j+1} = x \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ c_1x_1 + \ldots + c_jx_j + c_{j+1}\, 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\}\ (i = \\ = 1, \ldots, j) \\ a_1x_1 + \ldots + \\ + a_jx_j + a_{j+1}\, 0 = x \end{array} \right\} =$$

$= \boldsymbol{g}_j(x)$, což jsem měli ukázat.

3. $\boldsymbol{g}_j(x)$ nedef a $\bar{\boldsymbol{g}}_j(x)$ def, tj. $\boldsymbol{g}_j(x - a_{j+1})$ def. Zcela analogicky jako v případě 2. zde dostaneme, že $\boldsymbol{g}_{j+1}(x)$ def a $\boldsymbol{g}_{j+1}(x) =$

$$= \max \left\{ c_1x_1 + \ldots + c_jx_j + c_{j+1}x_{j+1} \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\}\ (i = \\ = 1, \ldots, j+1) \\ a_1x_1 + \ldots + \\ + a_jx_j + a_{j+1}x_{j+1} = x \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ c_1x_1 + \ldots + c_jx_j + c_{j+1}\, 1 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\}\ (i = \\ = 1, \ldots, j) \\ a_1x_1 + \ldots + \\ a_jx_j = x - a_{j+1} \end{array} \right\}$$

Odtud vyplývá na základě věty 10 z druhé kapitoly a definice hodnot $\bar{\boldsymbol{g}}_j(x)$: $\boldsymbol{g}_{j+1}(x) = c_{j+1} + \boldsymbol{g}_j(x - a_{j+1}) = \bar{\boldsymbol{g}}_j(x)$, což jsme měli ukázat.

4. $\boldsymbol{g}_j(x)$ def a $\bar{\boldsymbol{g}}_j(x)$ def, tj. $\boldsymbol{g}_j(x - a_{j+1})$ def. Potom platí

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i \in \{0, 1\}\ (i = 1, \ldots, j, j+1) \\ a_1x_1 + \ldots + a_jx_j + a_{j+1}x_{j+1} = x \end{array} \right\} \neq 0$$

odkud vyplývá $\boldsymbol{g}_{j+1}(x)$ def. Vyjádřeme dále poslední množinu ve tvaru sjednocení dvou množin

$$\left\{(x_1, \ldots, x_j, 0) \,\middle|\, \begin{matrix} x_i \in \{0, 1\} \; (i = 1, \ldots, j) \\ a_1x_1 + \ldots + a_jx_j = x \end{matrix}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x_1, \ldots, x_j, 1) \,\middle|\, \begin{matrix} x_i \in \{0, 1\} \; (i = 1, \ldots, j) \\ a_1x_1 + \ldots + a_jx_j = x - a_{j+1} \end{matrix}\right\}$$

a všimněme si, že obě dvě množiny jsou neprázdné. Odtud dostáváme na základě vět 8 a 10 (kapitola 2) a definice symbolu $\bar{g}_j(x)$:

$$g_{j+1}(x) =$$

$$= \max\left\{c_1x_1 + \ldots + c_jx_j + c_{j+1}x_{j+1} \,\middle|\, \begin{matrix} x_i \in \{0, 1\} \\ (i = 1, \ldots, j+1) \\ a_1x_1 + \ldots + \\ + a_{j+1}x_{j+1} = x \end{matrix}\right\} =$$

$$= \max\left(\max\left\{c_1x_1 + \ldots + c_jx_j \,\middle|\, \begin{matrix} x_i \in \{0, 1\} \; (i = 1, \ldots, j) \\ a_1x_1 + \ldots + a_jx_j = x \end{matrix}\right\}\right.$$

$$\left. c_{j+1} + \max\left\{c_1x_1 + \ldots + c_jx_j \,\middle|\, \begin{matrix} x_i \in \{0, 1\} \, (i = 1, \ldots, j) \\ a_1x_1 + \ldots + a_jx_j = \\ = x - a_{j+1} \end{matrix}\right\}\right) =$$

$$= \max\,(g_j(x), \bar{g}_j(x)).$$

c) Na základě věty 8 dostáváme $g^* =$

$$= \max\left\{c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \,\middle|\, \begin{matrix} x_i \in \{0, 1\} \, (i = 1, \ldots, n) \\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqq b \end{matrix}\right\} =$$

$$= \max\left\{\max\left\{\begin{matrix} c_1x_1 + \\ + \ldots + c_nx_n \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x_i \in \{0, 1\} \; (i = 1, \ldots, n) \\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = x \end{matrix}\right\} \,\middle|\, \begin{matrix} x = 0, \ldots, b; \\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = x \\ \text{má } \{0,\ 1\} \text{ — řešení} \end{matrix}\right\} =$$

$= \max \{g_n(x) | x = 0, 1, \ldots, b;\ g_n(x) \text{ def}\}$

Důkaz věty 16 je dokončen.

Obsah části b) věty 16 přehledně vyjádříme pomocí tabulky 5.

$g_j(x)$	$\bar{g}_j(x)$	$g_{j+1}(x)$
nedef	nedef	nedef
def	nedef	$g_j(x)$
nedef	def	$\bar{g}_j(x)$
def	def	$\max\,[g_j(x), \bar{g}_j(x)]$

Tabulka 5

K úplnému výkladu metody zbývá popsat způsob nalezení n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, která je řešením našeho extremálního problému. K dosažení tohoto cíle určujeme současně s rekurentním výpočtem hodnot $g_j(x)$ jisté hodnoty $Q_j(x)$ ($x \in \{0, \ldots, b\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$), zavedené následujícím způsobem:

(i) $Q_1(a_1) = 1$, $Q_1(0) = 0$ a $Q_1(x)$ nedef, jestliže $0 < x \neq a_1$.

(ii) Pro $j = 1, 2, \ldots, n - 1$ položíme

$$Q_{j+1}(x) \begin{cases} \text{nedef}, & \ldots \text{ jestliže } g_{j+1}(x) \text{ nedef} \\ = 0, & \ldots \text{ jestliže } g_j(x) \text{ def a } \bar{g}_j(x) \text{ nedef; nebo } \bar{g}_j(x) < g_j(x) \\ = 1, & \ldots \text{ jestliže } \bar{g}_j(x) \text{ def a } g_j(x) \text{ nedef; nebo } g_j(x) < \bar{g}_j(x) \\ = 0 \text{ nebo } 1 & \text{(libovolně) ve zbývajícím případě} \end{cases}$$

Poznámka: Nejednoznačnost při zavedení $Q_{j+1}(x)$

v posledním případě opět úzce souvisí s faktem, že náš extremální problém nemá v obecném případě jediné řešení.

Důkaz následujícího pomocného tvrzení přenecháváme čtenáři.

Lemma 2: a) Jestliže $g_1(x)$ def, potom $Q_1(x)$ def, $g_1(x) = c_1Q_1(x)$ a $x = a_1Q_1(x)$.
b) Jestliže $g_{j+1}(x)$ def, potom $Q_{j+1}(x)$ def a

$$g_{j+1}(x) = g_j[x - a_{j+1}Q_{j+1}(x)] + c_{j+1}Q_{j+1}(x)\,.$$

Nalezení n-tice, která je řešením maximalizačního problému (7), (8), se provádí pomocí následující věty.

Věta 17: a) Položme $x_j^{(0)} = Q_j(x)$, $x_{j-1}^{(0)} = Q_{j-1}(x - a_jx_j^{(0)})$, $x_{j-2}^{(0)} = Q_{j-2}(x - a_jx_j^{(0)} - a_{j-1}x_{j-1}^{(0)})$, ...

$$\ldots, x_1^{(0)} = Q_1(x - a_jx_j^{(0)} - a_{j-1}x_{j-1}^{(0)} - \ldots - a_2 . x_2^{(0)})$$

Potom platí:

1. $x_i^{(0)} \in \{0, 1\}$ $(i = 1, 2, \ldots, j)$
2. $a_1x_1^{(0)} + \ldots + a_jx_j^{(0)} = x$
3. $c_1x_1^{(0)} + \ldots + c_jx_j^{(0)} = g_j(x)$

b) Zvolme číslo $x^* \in \{0, 1, \ldots, b\}$ tak, aby platilo $g_n(x^*) = g^*$ a určeme n-tici $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ ve smyslu části a). Tato n-tice je řešením maximalizačního problému (7), (8).

Důkaz: Část 1. je zřejmá z definice $Q_j(x)$. Na základě lemmatu 2 platí $x - a_jx_j^{(0)} - \ldots - a_2x_2^{(0)} = a_1x_1^{(0)}$, odkud vyplývá platnost 2. Zbývá dokázat část 3. Na základě lemmatu 2 dostáváme řetězec vztahů

$$g_j(x) \qquad = g_{j-1}(x - a_jx_j^{(0)}) + c_jx_j^{(0)}$$

$$g_{j-1}(x - a_j x_j^{(o)}) = g_{j-2}(x - a_j x_j^{(o)} - a_{j-1} x_{j-1}^{(o)}) + c_{j-1} x_{j-1}^{(o)}$$

$$g_2(x - a_j x_j^{(o)} - \ldots - a_3 x_3^{(o)}) = g_1(x - a_j x_j^{(o)} - \ldots -$$
$$- a_2 x_2^{(o)}) + c_2 x_2^{(o)}$$
$$g_1(x - a_j x_j^{(o)} - \ldots - a_2 x_2^{(o)}) = c_1 x_1^{(o)}$$

odkud vyplývá postupným dosazováním

$$g_j(x) = c_1 x_1^{(o)} + c_2 x_2^{(o)} + \ldots + c_j x_j^{(o)}$$

b) Na základě tvrzení části a) je $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ $\{0, 1\}$ — řešení rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = x^*$, a tedy patří do množiny (8). Kromě toho platí na základě a) $c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots + c_nx_n^* = g^*$, takže $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ je řešením maximalizačního problému (7), (8). Důkaz věty 17 je dokončen.

Ukážeme použití vyloženého algoritmu na následujícím číselném příkladu.

Příklad 6: Řešme maximalizační problém (7), (8) pro $n = 7$, $b = 7$ a pro čísla a_j a c_j uvedená v horní části tabulky 6. Průběh výpočtu zapisujeme v dolní části této tabulky. V případě nedefinovaných hodnot ponecháváme příslušná pole tabulky prázdná. Hledaná maximální hodnota je $g_7(4) = 16$. Konstrukci příslušného řešení podle věty 17 lze provádět názorným způsobem s využitím tabulky (viz silná čára). Dostáváme řešení (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0). Všimněme si pro kontrolu správnosti výpočtu, že skutečně platí

$$8.1 - 7.0 + 5.0 + 6.0 + 8.1 - 5.0 - 7.0 = 16$$

a

$$3.1 + 1.0 + 4.0 + 4.0 + 1.1 + 2.0 + 2.0 = 4$$

j	1			2			3			4			5			6			7	
a_j	3			1			4			4			1			2			2	
c_j	8			−7			5			6			8			−5			−7	
x	g_1	Q_1	$\bar{g}_1$	g_2	Q_2	$\bar{g}_2$	g_3	Q_3	$\bar{g}_3$	g_4	Q_4	$\bar{g}_4$	g_5	Q_5	$\bar{g}_5$	g_6	Q_6	$\bar{g}_6$	g_7	Q_7
0	0	0		0	0		0	0		0	0		0	0		0	0		0	0
1			−7	−7	1		−7	0		−7	0	8	8	1		8	0		8	0
2												1	1	1	−5	1	0	−7	1	0
3	8	1		8	0		8	0		8	0		8	0	3	8	0	1	8	0
4			1	1	1	5	5	1	6	6	1	16	16	1	−4	16	0	−6	16	0
5						−2	−2	1	−1	−1	1	14	14	1	3	14	0	1	14	0
6												7	7	1	11	11	1	9	11	0
7						13	13	1	14	14	1		14	0	9	14	0	7	14	0

Tabulka 6

Na závěr kapitoly se zmíníme o efektivnosti popsaného algoritmu. Pro získání představy srovnejme jej s následujícím triviálním algoritmem: Postupně se uvažují všechny n-tice $(x_1, \ldots, x_n)$ z nul a jedniček a pro ty z nich, které splňují nerovnost $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqq b$ se určí hodnota $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$; ze získaných součtů $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ se nalezne největší. Je zřejmé, že tento algoritmus vyžaduje prozkoumat celkem 2^n n-tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, zatímco podstatná část algoritmu dynamického programování záleží v „zaplnění“ $n(b + 1)$ políček jisté obdélníkové tabulky pro $g_j(x)$. Efektivnost netriviálního algoritmu dynamického programování záleží tedy v našem případě na velikosti čísla b. Pokud bude b „podstatně menší“ než 2^n (např. „řádově srovnatelné“ s n), bude algoritmus dynamického programování jistě mnohem efektivnější než algoritmus triviální.

Cvičení

Cvičení 1: Dokažte lemma 2.

Cvičení 2: Nalezněte a odůvodněte metodu pro určení minima funkce (7) na množině (8), analogickou vyložené metodě pro maximalizační problém.

Cvičení 3: V podmínkách příkladu 6 řešte minimalizační problém.

Cvičení 4: Co lze říci o řešení extremálního problému (7), (8) za obecnějšího předpokladu, že a_j jsou celá nezáporná? (Co lze říci o x_j v řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za předpokladu $a_j = 0$?)

Cvičení 5: Všimněte si, že též tato konkrétní úloha vede na extremální problém (7), (8): Pašerák se vydává na cestu přes hranici a rozhoduje se, které z n věcí vzít s sebou do rance. Přitom je známo, že j-tá věc váží a_j kg, na druhé straně hranice za ni dostane zaplaceno c_j jednotek měny a na zádech unese nejvýše b kg. (Poznámka: Extremální problém (7), (8) se v literatuře nazývá též „úloha o ranci".)

Cvičení 6: Jak lze nalézt všechna řešení extremálního problému (7), (8)?

Cvičení 7: [Neúspěšný pokus o sestrojení jednoduššího algoritmu pro maximalizační problém (7), (8).] V podmínkách maximalizačního problému (7), (8) sestrojme n-tici $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ takto: Uspořádejme čísla $c_j a_j^{-1}$ $(j = 1, \ldots, n)$ podle velikosti

$$c_{i_1} a_{i_1}^{-1} \geqq c_{i_2} a_{i_2}^{-1} \geqq \ldots \geqq c_{i_n} a_{i_n}^{-1}$$

a určeme maximální k tak, aby platilo $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} \leqq b$. Nyní položme

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \\ 0, \text{ jestliže } i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \end{cases}$$

Ukažte pomocí vhodně zvoleného číselného příkladu, že $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$ není obecně řešením maximalizačního problému (7), (8).