2. kapitola

VLASTNOSTI MINIM A MAXIM

V první kapitole jsme se zmiňovali o tom, že neprázdná množina čísel nemusí mít ani minimum ani maximum. Vezměme např. tyto množiny: $\mathbf{M}_1 = \mathbf{R}$, $\mathbf{M}_2 = \{x \in \mathbf{R} | 0 < x < 1\}$, $\mathbf{M}_3 = \{x \in \mathbf{R} | x$ je přirozené$\}$, (tj. $\mathbf{M}_3$ je množina všech přirozených čísel), $\mathbf{M}_4 = \{x \in \mathbf{R} | -\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ a x je racionální$\}$, $\mathbf{M}_5 = \{x \in \mathbf{R} | 0 < x \leqq 1\}$. Snadno lze ověřit následující jednoduchá fakta:

a) množiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ a $\mathbf{M}_4$ nemají ani minimální ani maximální prvek

b) $\mathbf{M}_3$ má minimální, ale nemá maximální prvek

c) $\mathbf{M}_5$ má maximální, ale nemá minimální prvek

Jako příklad ověříme tvrzení c). Skutečně, číslo 1 je maximálním prvkem $\mathbf{M}_5$, protože $1 \in \mathbf{M}_5$ a pro všechna $x \in \mathbf{M}_5$ platí $x \leqq 1$. Na druhé straně připusťme, že $\mathbf{M}_5$ má minimální prvek x_0. Potom však musí platit $1 \geqq x_0 > 0$ (protože $x_0 \in \mathbf{M}_5$), a tedy rovněž platí $1 \geqq \frac{x_0}{2} > 0$, odkud přicházíme k závěru, že $\frac{x_0}{2}$ rovněž náleží množině $\mathbf{M}_5$. Z předpokladu $x_0 = \min \mathbf{M}_5$ však nyní vyplývá, že musí platit $x_0 \leqq x_0/2$, což odporuje $x_0 > 0$. Důkaz tvrzení c) je dokončen. Doporučujeme čtenáři aby samostatně dokázal tvrzení a) a b).

Existuje-li však minimum (resp. maximum) neprázdné množiny čísel, existuje právě jedno, jak vyplývá z další věty.

Věta 1: Neprázdná množina čísel má nejvýše jedno minimum a nejvýše jedno maximum.

Důkaz: Označíme uvažovanou množinu M a dokážeme pouze první část tvrzení, pojednávající o minimu, neboť druhá část se dokazuje zcela analogicky. Důkaz provedeme sporem: Připusťme, že M má dvě navzájem různá minima a_0 a b_0. Z toho, že a_0 je minimum M a b_0 prvkem M vyplývá $a_0 \leqq b_0$, a obráceně, z toho, že b_0 je minimum M a a_0 prvkem M vyplývá $b_0 \leqq a_0$. Dostáváme tedy nakonec $a_0 = b_0$, což dokazuje naše tvrzení.

Následující věta ukazuje jeden systém*) množin, majících vždycky minimum a maximum.

Věta 2: Nechť M je konečná neprázdná množina čísel. Potom existuje min M a max M.

Důkaz této věty budeme provádět metodou úplné (ve škole se říká též „matematické“) indukce. Nebude na škodu připomenout si ji. Nechť $V(n)$ označuje nějaké tvrzení o přirozeném čísle n a nechť n_0 je nějaké pevně zvolené přirozené číslo. Naším cílem je ověřit, zdali tvrzení $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla $n \geqq n_0$. Poslední tvrzení se často dokazuje podle tohoto schématu:

(i) nejprve se ověří platnost $V(n_0)$
(ii) dále se ověří, že pro libovolné $n \geqq n_0$ z platnosti $V(n)$ vyplývá platnost $V(n + 1)$

*) Místo „množina množin“ se často z jazykových důvodů používá hezčího slovního spojení „systém množin“.

Uvedené schéma důkazu se nazývá *úplnou* (nebo *matematickou*) *indukcí*.*) Krok (i) se přitom nazývá *bází indukce*, krok (ii) *indukčním krokem*, n se nazývá *parametrem indukce*.

Přistoupíme k důkazu věty.

Důkaz věty 2: Množinu $\mathbf{M}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou její prvky. Větu dokážeme úplnou indukcí vzhledem k n, jakožto parametru indukce, a pro $n_0 = 1$. Přitom se omezíme pouze na důkaz existence minima; důkaz existence maxima se provádí zcela analogicky a doporučujeme jej čtenáři jako lehké cvičení.

(i) V případě $n = 1$ máme jednoprvkovou množinu $\mathbf{M} = \{x_1\}$. Protože $x_1 \in \mathbf{M}$ a pro žádné $y \in \mathbf{M}$ neplatí $y < x_1$, je $x_1 = \min \mathbf{M}$, takže tvrzení je v tomto případě dokázáno.

(ii) Předpokládejme, že tvrzení je dokázáno pro přirozené číslo n a uvažujme libovolnou $(n + 1)$-prvkovou množinu

$$\mathbf{M} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$$

Množina $\mathbf{M}_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je n-prvková, a tedy podle indukčního předpokladu existuje $\min \mathbf{M}_0 = x_{i_0}$, kde $1 \leqq i_0 \leqq n$. Rozlišíme nyní dva případy:

$$(\alpha)\ x_{i_0} < x_{n+1} \qquad (\beta)\ x_{i_0} > x_{n+1}$$

(Případ $x_{i_0} = x_{n+1}$ nemůže nastat, neboť při zápisu množiny ve tvaru $\{\ldots\}$ zapisujeme pouze její navzájem různé prvky.)

---

*) Jde vlastně o jeden z axiómů Peanovy axiomatiky přirozených čísel.

V případě (α) dostáváme jednak $x_{i_0} \in \mathbf{M}_0$, a tedy $x_{i_0} \in \mathbf{M}$, jednak $x_{i_0} \leqq x$ pro všechna $x \in \mathbf{M}$. Odtud přicházíme k závěru, že $x_{i_0} = \min \mathbf{M}$.

V případě (β) dostáváme obdobně $x_{n+1} \in \mathbf{M}$ a $x_{n+1} \leqq \leqq x$ pro všechna $x \in \mathbf{M}$ a tedy $x_{n+1} = \min \mathbf{M}$.

V obou případech (α), (β) tedy existuje min $\mathbf{M}$, což dokončuje důkaz indukcí.

Poznámka: Vyloženého důkazu lze použít i jako metody pro skutečné nalezení minima konečné neprázdné množiny čísel.

Důležitým důkazovým nástrojem v naší knížce bude další věta, jejíž odvození provede čtenář lehce sám s použitím metody úplné indukce.

Věta 3: Nechť $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ jsou dané neprázdné množiny čísel a položme

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{M}_n$$

a) Jestliže existuje min $\mathbf{M}_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, potom existuje rovněž min $\mathbf{M}$ a platí

$$\min \mathbf{M} = \min \{\min \mathbf{M}_j | j = 1, 2, \ldots, n\}$$

b) Jestliže existuje max $\mathbf{M}_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, potom existuje rovněž max $\mathbf{M}$ a platí

$$\max \mathbf{M} = \max \{\max \mathbf{M}_j | j = 1, 2, \ldots, n\}$$

Problém nalezení minima množiny čísel lze převést na problém nalezení maxima, a obráceně. Platí totiž následující věta, jejíž snadný důkaz rovněž přenecháváme čtenáři.

Věta 4: Nechť $\mathbf{M}$ je neprázdná množina čísel. Položme

$$\mathbf{M}_1 = \{x \in \mathbf{R} | -x \in \mathbf{M}\}$$

a) Jestliže existuje $\min \mathbf{M}_1$, existuje rovněž $\max \mathbf{M}$ a platí $\max \mathbf{M} = -\min \mathbf{M}_1$.
b) Jestliže existuje $\max \mathbf{M}_1$, existuje rovněž $\min \mathbf{M}$ a platí $\min \mathbf{M} = -\max \mathbf{M}_1$.

Je-li například $\mathbf{M}$ konečná a neprázdná, můžeme psát $\mathbf{M} = \{m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(r)}\}$, kde $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(r)}$ jsou všechny prvky $\mathbf{M}$, a z věty 4 dostáváme

$$\max \{m^{(1)}, \ldots, m^{(r)}\} = -\min \{-m^{(1)}, \ldots, -m^{(r)}\}$$

a

$$\min \{m^{(1)}, \ldots, m^{(r)}\} = -\max \{-m^{(1)}, \ldots, -m^{(r)}\}$$

Věty 1—4 se týkaly minim a maxim množin čísel. Uvedeme nyní analogické věty pro extrémy funkcí.

Minimum (resp. maximum) funkce bylo definováno jako minimum (resp. maximum) jejího oboru hodnot. Odtud vyplývají bezprostředně následující tvrzení.

Věta 5: Každá funkce má nejvýše jedno minimum a nejvýše jedno maximum.

Věta 6: Nechť funkce f je definována na konečné neprázdné množině $\mathbf{A}$. Potom existuje $\min\limits_{x \in \mathbf{A}} f(x)$ a $\max\limits_{x \in \mathbf{A}} f(x)$.

Ukážeme nyní jeden postup, pomocí kterého lze skutečně nalézt extrémy funkce definované na konečné neprázdné množině. Místo slova „postup" budeme používat, jak je v současné matematice běžné, výrazu „algoritmus". Pod algoritmem rozumíme — názorně, ale dosti nepřesně řečeno — postup při konkrétním řešení nějakého problému, který je možno přesně popsat ukázáním pořadí jednotlivých kroků při řešení a který po konečně mnoha krocích končí. Na základě algoritmu může úlohu řešit výpočtář, kterému stačí se algoritmu „naučit", aniž by rozuměl hlubším matematickým důvodům, proč algoritmus úlohu řeší. (Algoritmus lze naprogramovat i na samočinný počítač.) Uvedeme několik příkladů algoritmů většinou dobře známých ze školy, i když se tam ne vždy tímto názvem označují.

1. Eukleidův algoritmus pro určení největšího společného dělitele dvou celých čísel.
2. Známé tradiční postupy pro provádění základních aritmetických operací nad čísly zapsanými v desítkové soustavě.
3. Eratosthenovo síto pro nalezení všech prvočísel nepřesahujících dané přirozené n.
4. Postup při konstrukci trojúhelníku ze tří stran.
5. Známý postup při zjišťování dělitelnosti třemi celého čísla zapsaného v desítkové soustavě.

Nyní popíšeme jednoduchý algoritmus pro nalezení minima a maxima funkce definované na konečné neprázdné množině. Přitom se opět omezíme pouze na hledání minima a analogickou otázku hledání maxima ponecháváme čtenáři. Nechť f je funkce definovaná na konečné neprázdné množině A. Prvky množiny A uspořádáme v nějakém pevně zvoleném pořadí a_1, a_2, $\ldots$, a_r, přičemž na volbě pořadí nezáleží, a pro zjednodušení zápisu položíme $f_j = f(a_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. (Písmenem r jsme označili počet prvků množiny A.) Nalezení minima funkce f na A je nyní totéž, jako nalezení $\min \{f_j | j = 1, \ldots, r\}$, protože $\min \{f(x) | x \in \mathsf{A}\} = \min \{f_j | j = 1, \ldots, r\}$. Zavedeme si dále toto označení: Minimem r-tice $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ budeme rozumět číslo $\min \{f_j | j = 1, \ldots, r\}$ a budeme je označovat $\min (f_1, f_2, \ldots, f_r)$. Všimněme si dobře rozdílu mezi označením právě definovaným a označením $\min \{f_1, \ldots, f_r\}$, které má smysl pouze v tom případě, že čísla f_1, f_2, $\ldots$, f_r jsou navzájem různá, a tvoří tedy jistou množinu čísel. Naproti tomu v označení min $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ nemusí být čísla $f_1, f_2, \ldots, f_r$ navzájem různá, neboť $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ neoznačuje množinu, ale uspořádanou r-tici čísel.

Algoritmus, který popíšeme, bude hledat $f^* = \min(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ a nejmenší hodnotu indexu j, pro kterou $f^* = f_j$. Algoritmus konstruuje rekurentně dvě r-tice $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ a $(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ podle těchto rekurentních pravidel:

(i) Položíme $b_1 = f_1$ a $j_1 = 1$.

(ii) Nechť je již určeno b_k a j_k, kde $1 \leqq k < r$. Položíme

$$b_{k+1} = \min(b_k, f_{k+1})$$

a

$$j_{k+1} = \begin{cases} j_k & \text{jestliže } b_{k+1} = b_k \\ k+1 & \text{jestliže } b_{k+1} < b_k \end{cases}$$

(iii) Určením dvojice čísel b_r a j_r je práce algoritmu skončena.

Nyní platí následující tvrzení, jehož snadný důkaz přenecháváme čtenáři.

Věta 7: O číslech b_r a j_r platí:

$b_r = \min(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ a j_r je nejmenší hodnota indexu j, pro který platí $f_j = \min(f_1, f_2, \ldots, f_r)$.

Použití vyloženého algoritmu budeme ilustrovat na následujícím příkladu.

Příklad 1: Chceme určit minimální číslo v 5-tici $(f_1, f_2, \ldots, f_5) = (1; 0{,}9; 3; 0{,}9; 1{,}2)$. Pomocí vyloženého algoritmu dostáváme postupně

$$\begin{array}{llll} b_1 = 1 & & & j_1 = 1 \\ b_2 = \min(b_1, f_2) = \min(1; 0{,}9) & = 0{,}9 & & j_2 = 2 \\ b_3 = \min(b_2, f_3) = \min(0{,}9; 3) & = 0{,}9 & & j_3 = 2 \end{array}$$

$$b_4 = \min(b_3, f_4) = \min(0,9;\ 0,9) = 0,9 \qquad j_4 = 2$$
$$b_5 = \min(b_4, f_5) = \min(0,9;\ 1,2) = 0,9 \qquad j_5 = 2$$

Docházíme k závěru, že minimální číslo v uvažované 5-tici je 0,9 a jeho první výskyt zleva v 5-tici je na druhém místě. Číslo 0,9 se však rovněž vyskytuje i na čtvrtém místě zleva.

Poznámka 1: Čtenáři by se uvedený algoritmus mohl zdát zbytečný, protože úlohu určení nejmenšího (největšího) z několika daných čísel řeší běžně bez přemýšlení, „jedním pohledem“. Je nutné si však uvědomit, že v případě „velkých“ souborů čísel nelze všechna „přehlédnout“ zrakem a naši inteligenčně-vizuální schopnost musíme nahradit systematickým algoritmickým postupem. Tato okolnost ještě více vynikne v případě použití samočinných počítačů, které se „neumějí dívat“.

Poznámka 2: Všimněme si dále, že popsaný algoritmus pro určení $\min(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ vyžaduje $r - 1$ operací srovnání čísel podle velikosti; jde o srovnání čísel b_k a f_{k+1} pro $k = 1, 2, \ldots, r - 1$.

Pokročíme dále ve zkoumání vlastností extrémů funkcí. Nechť je dána funkce f na množině $\mathbf{A}$ a nechť $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_s$ jsou neprázdné podmnožiny $\mathbf{A}$, pro něž

$$\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{A}_s = \mathbf{A}$$

Definujme funkci f_j na množině $\mathbf{A}_j$ pomocí funkce f takto: Položíme

$$f_j(x) = f(x) \quad \text{pro} \quad x \in \mathbf{A}_j{}^{*)}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, s)$$

---

*) Říkáme, že funkce f_j vznikla z funkce f parcializací (zúžením) na množinu $\mathbf{A}_j$.

Bezprostředním použitím věty 3 dostáváme nyní následující tvrzení, jehož podrobný důkaz přenecháváme rovněž čtenáři.

Věta 8: Nechť existuje $\min\limits_{x \in A_j} f_j(x)$ [resp. $\max\limits_{x \in A_j} f_j(x)$] pro $j = 1, 2, \ldots, s$. Potom existuje rovněž $\min\limits_{x \in A} f(x)$ [resp. $\max\limits_{x \in A} f(x)$] a platí

$$\min_{x \in A} f(x) = \min \left\{ \min_{x \in A_j} f_j(x) \,|\, j = 1, 2, \ldots, s \right\}$$

$$\text{(resp. } \max_{x \in A} f(x) = \max \left\{ \max_{x \in A_j} f_j(x) \,|\, j = 1, 2, \ldots, s \right\}$$

Pro ilustraci poslední věty uvedeme jednoduchý příklad.

Příklad 2: Chceme nalézt nejmenší číslo v tabulce 1.

5	4	—3	2	1
—1	3	0	—1	0
—4	5	10	—4	1

Tabulka 1

Tabulku lze přirozeným způsobem chápat jako funkci definovanou na množině všech jejích políček, tj. na množině všech uspořádaných dvojic (r, s), kde $r = 1, 2, 3$ (index řádku), a $s = 1, 2, \ldots, 5$ (index sloupce). Při řešení úlohy lze tabulku zkoumat „vcelku“, ale ve smyslu věty 8 lze též nalézt „částečná“ minima v jednotlivých řádcích (nebo sloupcích) a z těchto „částečných“ minim určit nejmenší číslo.

O extrémech funkcí platí dále tvrzení analogické větě 4, pomocí které je též lze snadno dokázat.

Věta 9: Nechť f je funkce definovaná na množině $\mathbf{A}$. Definujme funkci f_1 na $\mathbf{A}$ takto: $f_1(x) = -f(x)$ pro $x \in \mathbf{A}$.

a) Jestliže existuje $\min_{x \in \mathbf{A}} f_1(x)$, potom existuje $\max_{x \in \mathbf{A}} f(x)$ a platí $\max_{x \in \mathbf{A}} f(x) = -\min_{x \in \mathbf{A}} f_1(x)$.

b) Jestliže existuje $\max_{x \in \mathbf{A}} f_1(x)$, potom existuje $\min_{x \in \mathbf{A}} f(x)$ a platí $\min_{x \in \mathbf{A}} f(x) = -\max_{x \in \mathbf{A}} f_1(x)$.

Kapitolu ukončíme následující větou, jejíž snadný důkaz rovněž přenecháváme čtenáři.

Věta 10: Nechť f je funkce definovaná na neprázdné množině $\mathbf{A}$, a nechť c je dané číslo. Definujme funkci g na $\mathbf{A}$ takto:
Položíme $g(x) = f(x) + c$ pro všechna $x \in \mathbf{A}$.

a) Jestliže existuje $\min_{x \in \mathbf{A}} f(x)$, existuje též $\min_{x \in \mathbf{A}} g(x)$ a platí

$$\min_{x \in \mathbf{A}} g(x) = c + \min_{x \in \mathbf{A}} f(x) .$$

b) Jestliže existuje $\max_{x \in \mathbf{A}} f(x)$, existuje též $\max_{x \in \mathbf{A}} g(x)$ a platí

$$\max_{x \in \mathbf{A}} g(x) = c + \max_{x \in \mathbf{A}} f(x) .$$

Smysl věty ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 3: Položme ve větě 10 $\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x \leq 1\}$, $f(x) = x^2 (x \in \mathbf{A})$ a $c = \sqrt{2}$. V souhlasu s větou 10 platí

$$\min_{x \in A} (x^2 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} + \min_{x \in A} x^2 ;$$

$$\max_{x \in A} (x^2 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} + \max_{x \in A} x^2$$

O správnosti posledních dvou vztahů se lze přesvědčit bezprostředně.

Cvičení

Cvičení 1: Ukažte, že množiny $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$ a M_4 zavedené na začátku kapitoly nemají ani minimum ani maximum, a množina M_3 má minimum, ale nemá maximum.

Cvičení 2: Dokažte, že každá neprázdná množina čísel má nejvýše jedno maximum.

Cvičení 3: Dokažte věty 3—10.

Cvičení 4: Znázorněte si na číselné ose nějakou množinu čísel a ukažte geometrický význam věty 4.

Cvičení 5: V pravoúhlé soustavě souřadnic si nakreslete graf nějaké reálné funkce reálné proměnné a pokuste se ukázat názorný geometrický význam vět 9 a 10.

Cvičení 6: Popište a zdůvodněte algoritmus pro určování maxima funkce definované na konečné neprázdné množině čísel, analogický algoritmu pro určování minima.

Cvičení 7: Pro neprázdné množiny čísel vyslovte a dokažte větu analogickou větě 10.