Booleova algebra

8. kapitola. Elektrické obvody počítačů

In: Oldřich Odvárko (author): Booleova algebra. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1973. pp. 104–112.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403774

8. kapitola

ELEKTRICKÉ OBVODY POČÍTAČŮ

V této závěrečné kapitole se na několika jednoduchých příkladech seznámíme s principem navrhování elektrických obvodů počítačů (počítacích strojů). Počítače obvykle pracují ve dvojkové číselné soustavě. Je proto nezbytné, abychom o ní uvedli aspoň velmi stručné poučení.

V teorii čísel platí tato věta:

Nechť je n libovolné přirozené číslo, z libovolné přirozené číslo větší než 1. *Pak každé přirozené číslo b, pro něž platí* $z^n \leqq b < z^{n+1}$, *lze vyjádřit ve tvaru*

$$b = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z^1 + b_0 z^0 \; ; \qquad (38)$$

přitom je b_n jednoznačně určené přirozené číslo menší než z; b_{n-1}, b_{n-2}, …, b_1, b_0 jsou jednoznačně určená celá nezáporná čísla menší než z.

Zvolme pro ilustraci například číslo $b = 51$ (chápeme je zapsané v obvykle používané desítkové soustavě). Lze pak psát

pro $z = 10$ $\quad b = 5 . 10^1 + 1 . 10^0$
pro $z = 15$ $\quad b = 3 . 15^1 + 6 . 15^0$
pro $z = 8$ $\quad b = 6 . 8^1 + 3 . 8^0$
pro $z = 5$ $\quad b = 2 . 5^2 + 0 . 5^1 + 1 . 5^0$
pro $z = 3$ $\quad b = 1 . 3^3 + 2 . 3^2 + 2 . 3^1 + 0 . 3^0$
pro $z = 2$ $\quad b = 1 . 2^5 + 1 . 2^4 + 0 . 2^3 + 0 . 2^2 + 1 . 2^1 + 1 . 2^0$

Vyjádříme-li číslo b ve tvaru (38), říkáme, že jsme je určili *v soustavě o základu z*. Je-li $z = 10$, mluvíme o soustavě *desítkové* (dekadické), pro $z = 9$ o soustavě *devítkové*, pro $z = 2$ o soustavě *dvojkové* atd. Přirozené číslo $z > 1$ nazýváme *základ soustavy;* symboly, kterými se zapisují čísla $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0$, nazýváme *číslice* nebo *cifry* (dále namísto „číslice, kterou je zapsáno číslo b_i", pišme stručněji „číslice b_i"). O číslici b_i, u níž je z v i-té mocnině ($i = 0, 1, \ldots, n$), říkáme, že je *řádu i-tého.*

Skutečnost, že číslo b je určeno v soustavě o základu z, zapíšeme stručně

$$b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_z$$

V našem ilustračním příkladě lze tedy psát

$$b = (51)_{10} = (36)_{15} = (63)_8 = (201)_5 = (1220)_3 = \\ = (110011)_2$$

Zabývejme se nyní pouze dvojkovou soustavou, v níž pracujeme jenom s číslicemi 0 a 1. Smluvme se, že v této kapitole budeme namísto „$(b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_2$" psát stručněji jenom „$b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$".

Podívejme se na základní operace — sčítání a násobení — v této soustavě. Určeme nejprve všechny možné součty a součiny čísel o jedné číslici (tzv. základní spoje sčítání a násobení). Platí

$$\begin{array}{ll} 0+0 = 0 & 0.0 = 0 \\ 0+1 = 1 & 0.1 = 0 \\ 1+0 = 1 & 1.0 = 0 \\ 1+1 = 10 & 1.1 = 1 \end{array}$$

Uspořádejme tyto výsledky přehledně v tabulkách:

$a + b$:

$a \setminus b$	0	1
0	0	1
1	1	10

tab. 12

$a \,.\, b$:

$a \setminus b$	0	1
0	0	0
1	0	1

tab. 13

Vzpomeňme na dvouprvkovou Booleovu algebru (D, $+$, $.$, $'$), kterou jsme zavedli v 5. kapitole. Všimněme si, že tabulka 13 je formálně zcela shodná s definiční tabulkou operace násobení na D. Tabulka 12 se liší od tabulky definující operaci sčítání na D pouze v jednom „součtu“.

Obdobně jako v desítkové soustavě můžeme i v soustavě dvojkové sčítat a násobit víceciferná čísla. Prověřte, že dále uvedené výpočty jsou správné! (Využijte tabulek 12 a 13.)

$$\begin{array}{r} 110 \\ +111 \\ \hline 1101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11111 \\ +10010 \\ \hline 110001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110 \\ .111 \\ \hline 110 \\ 110 \\ 110 \\ \hline 101010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11111 \\ .10010 \\ \hline 111110 \\ 11111 \\ \hline 1000101110 \end{array}$$

Zaveďme ještě jednu úmluvu, jež bude v dalším užitečná. Jestliže před číslo b zapsané ve dvojkové soustavě připíšeme konečný počet nul, chápeme i tento nový zápis jako zápis čísla b. Například místo 11 můžeme psát 011, 00011 atd.

Příklad 40: Navrhněte elektrický obvod počítače, který „umí“ sčítat dvě libovolná jednociferná nezáporná čísla zapsaná ve dvojkové soustavě.
Řešení: Přepišme tabulku 12 takto:

a	b	s_1	s_0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

V tabulce jsou vždy v příslušném řádku v prvním a druhém sloupci jednotliví sčítanci; ve třetím sloupci je pak číslice prvního řádu součtu, ve čtvrtém sloupci číslice nultého řádu součtu.

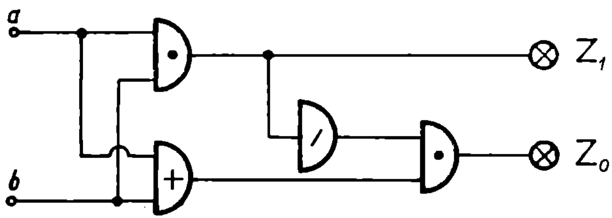
Dívejme se nyní na tuto tabulku formálně jako na tabulku, jíž jsou určeny funkce s_1, s_0 o dvou proměnných a, b z množiny D. Obě funkce lze určit rovnicí:

$$\begin{aligned} s_1 &: y = ab \\ s_0 &: y = ab' + a'b \end{aligned} \tag{39}$$

Funkci s_0 lze zapsat také takto:

$$s_0 : y = (ab)' . (a + b) \tag{40}$$

Schéma elektrického obvodu příslušného počítače je na obrázku 37; přitom jsme zvolili funkci s_0 ve tvaru (40). Žárovka Z_1 (Z_0) svítí, právě když je hodnota funkce s_1 (s_0) rovna 1.



Obr. 37

Sestrojte sami schéma obvodu, v němž je realizována funkce s_0 ve tvaru (39). Který z obou obvodů obsahuje méně elementárních částí?

Příklad 41: Navrhněte elektrický obvod počítače, který „umí“ násobit dvě libovolná celá nezáporná čísla nejvýše dvojciferná (rozumí se ve dvojkové soustavě).

Řešení: Sestavme obdobnou tabulku jako v příkladě 40 pro násobení dvou nezáporných nejvýše dvojciferných čísel a_1a_0, b_1b_0; součin může být zřejmě nejvýše čtyřciferné číslo (prověřte!).

a_1	a_0	b_1	b_0	n_3	n_2	n_1	n_0
1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Písmeny n_3, n_2, n_1, n_0 jsou označeny proměnné odpovídající číslicím třetího, druhého, prvního a nultého řádu součinu.

Prověřte všechny řádky tabulky, zda jsou součiny určeny správně!

Dívejme se na tuto tabulku formálně jako na tabulku, jíž jsou určeny funkce n_3, n_2, n_1, n_0

o čtyřech proměnných a_1, a_0, b_1, b_0 z množiny D. Určeme každou z těchto funkcí rovnicí:

$$n_3 : y = a_1a_0b_1b_0$$
$$n_2 : y = a_1a_0b_1b_0' + a_1a_0'b_1b_0 + a_1a_0'b_1b_0'$$

a po úpravách

$$n_2 : y = a_1b_1 . (a_0b_0)'$$

$$n_1 : y = a_1a_0b_1b_0' + a_1a_0b_1'b_0 + a_1a_0'b_1b_0 + a_1a_0'b_1'b_0 +$$
$$+ a_1'a_0b_1b_0 + a_1'a_0b_1b_0' ,$$

po úpravách

$$n_1 : y = a_1b_0 . (a_0b_1)' + a_0b_1 . (a_1b_0)'$$
$$n_0 : y = a_1a_0b_1b_0 + a_1a_0b_1'b_0 + a_1'a_0b_1b_0 + a_1'a_0b_1'b_0$$

a po úpravách pravé strany rovnice

$$n_0 : y = a_0b_0$$

Schéma příslušného elektrického obvodu sestrojte už samostatně!

Příklad 42: Navrhněte elektrický obvod, pomocí něhož bychom mohli srovnávat podle velikosti dvě celá nezáporná nejvýše dvojciferná čísla z dvojkové soustavy!
Řešení: Nechť jsou dána dvě čísla $A = a_1a_0$, $B = b_1b_0$ a máme rozhodnout, zda platí $A \leqq B$ nebo $A > B$. V následující tabulce jsou v prvních čtyřech sloupcích zapsány číslice jednotlivých čísel. V posledním sloupci píšeme 1, právě když je $A \leqq B$, a 0, právě když je $A > B$.

a_1	a_0	b_1	b_0	$f(a_1, a_0, b_1, b_0)$
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1

Na tuto tabulku se můžeme dívat jako na booleovskou funkci f o čtyřech proměnných a_1, a_0, b_1, b_0 z množiny D. Funkci f lze určit rovnicí například ve tvaru

$$f : y = a_1'b_1 + a_1'a_0' + a_0'b_1 + a_1'b_0 + b_1b_0$$

nebo ve tvaru $f : y = a_1'b_1 + (a_1' + b_1) . (a_0' + b_0)$

Nakreslete schéma příslušného obvodu!

Příklad 43: Určete rovnicemi funkce, pomocí nichž je možno realizovat elektrický obvod počítače na sčítání dvou nejvýše n-ciferných celých nezáporných čísel z dvojkové soustavy (n je přirozené číslo).

Řešení: Nechť jsou $A = a_{n-1} \dots a_1a_0$, $B = b_{n-1} \dots b_1b_0$ dvě libovolná nejvýše n-ciferná čísla. Jejich součet S je pak vždy číslo nejvýše $(n+1)$-ciferné, $S = s_n \dots s_1s_0$.

Označme písmenem c_i cifru, kterou „přenášíme" při sčítání čísel A, B z (i — 1)-ního sloupce do sloupce i-tého ($i = 1, 2, \ldots, n$). Zkoumejme všechny možnosti pro c_i, a_i, b_i (zřejmě je $a_n = b_n = 0$) a určeme odtud jednak c_{i+1}, jednak s_i. Prověřte detailně následující tabulku.

c_i	a_i	b_i	c_{i+1}	s_i
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Dívejme se nyní na c_{i+1} a s_i jako na funkce o třech proměnných c_i, a_i, b_i z množiny D. Odtud pak dospíváme k těmto závěrům:

$$c_{i+1} : y = a_i b_i + c_i . (a_i + b_i)$$
$$s_i : y = c_i . (a_i b_i + a_i' b_i') + c_i' . (a_i b_i' + a_i' b_i)$$

Uvědomme si ještě, že platí

$$c_1 : y = a_0 b_0$$
$$s_0 : y = a_0 b_0' + a_0' b_0$$

Na základě získaných „rekurentních vzorců" je už možno navrhnout obvod příslušného počítače. Pokuste se o to!

Poznámka: Podrobnou informaci o realizaci počítačů — „sčítaček" — najdete například v 3. publikaci seznamu literatury na str. 117. Tam se dočtete o tzv. paralelních sčítačkách (základ tvoří úvahy z příkladu 43) i o tzv. sčítačkách sériových (s „pamětovým" obvodem).

Cvičení

1. Navrhněte elektrický obvod pro počítač, který by „uměl" násobit dvě libovolná jednociferná nezáporná čísla z dvojkové soustavy.

2. Určete rovnicí funkci, pomocí níž je možno realizovat elektrický obvod pro porovnávání celých nezáporných nejvýše tříciferných čísel podle velikosti.