Malý výlet do moderní matematiky

1. kapitola. Seznamujeme se s množinami

In: Milan Koman (author); Jan Vyšín (author): Malý výlet do moderní matematiky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1972. pp. 7–47.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403756

1. kapitola

SEZNAMUJEME SE S MNOŽINAMI

1.1. Množiny a jejich prvky

Soudobá matematika se neobejde bez pojmů

MNOŽINA a PRVEK.

Jsou to základní a tedy v jistém smyslu nejjednodušší pojmy. Matematikům však trvalo dlouhá staletí, než se jim podařilo tyto velmi obecné a přitom reálnému světu blízké pojmy uspokojivě vymezit. Vybudování základů tzv. ***teorie množin***, vyhovující požadavkům moderní matematiky, patří totiž mezi nejobtížnější otázky.

Nám však úplně postačí, jestliže si představíme množinu jako skupinu, souhrn, soubor nejrůznějších věcí (předmětů, čísel, bodů ap.), které se nazývají prvky této množiny.

V matematice však nazýváme množinami jen takové soubory, pro něž platí:

a) *O každé věci lze jednoznačně rozhodnout, zda tomuto souboru patří či nepatří.* (Samozřejmě může nastat jen jedna z obou možností.)

b) *Všechny věci, které do souboru patří, jsou navzájem různé.* (Žádná věc se v takovém souboru neopakuje.)

Prvky označujeme libovolnými písmeny nebo jinými znaky (třeba číslicemi). Množiny označujeme v textu velkými polotučnými písmeny, například

$$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{Z} \,;$$

na obrázcích velkými psacími písmeny — viz str. 8. Chceme-li různé množiny označit týmž písmenem, můžeme je odlišit ***indexy***, např.

$$\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3 \,;$$

indexy jsou číslice 1, 2, 3 vpravo dole u písmene $\boldsymbol{M}$.

Množiny jsou buď ***konečné*** (např. množina všech obyvatel ČSSR, množina všech písmen latinské abecedy, množina vrcholů daného trojúhelníku ABC) nebo ***nekonečné*** (např. množina všech bodů na přímce, množina všech celých čísel ap.).*)

Konečné množiny udáváme zpravidla

a) ***výčtem prvků;***
b) ***tabulkou;***
c) ***Vennovým diagramem;***
d) ***charakteristickým znakem.***

Množinu udáme výčtem, jestliže vyjmenujeme všechny její prvky. Zapisujeme například

$$\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$$

a čteme: množina $\boldsymbol{M}$ se skládá z prvků (čísel) 2, 3, 5, 7.

Při zápisu množiny výčtem nezáleží na pořadí prvků. Například zápisy

$$\{2, 5, 3, 7\} \quad \text{nebo} \quad \{3, 2, 5, 7\}$$

*) Mluvíme-li zde o konečných a nekonečných množinách vycházíme opět z názorné představy. Ovšem přesná definice těchto pojmů je téměř stejně obtížná jako vymezení samotného pojmu množina.

značí stále touž množinu $\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$. Při zápisu množiny výčtem píšeme každý prvek jen jednou. Proto nepíšeme

$$\boldsymbol{M} = \{2, 3, 3, 5, 7\},$$

ale píšeme

$$\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Tabulky užíváme pro udání množiny nejčastěji v těch případech, kdy mluvíme o více množinách, jejichž prvky jsou vybrány z nějaké „větší" množiny $\boldsymbol{Z}$, tzv. ***základní množiny***. Například:

$\boldsymbol{Z}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{M}$	–	/	/	–	/	–	/	–
$\boldsymbol{A}$	/	/	/	–	–	–	–	–
$\boldsymbol{B}$	–	/	–	/	–	/	–	/

$$\boldsymbol{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$$
$$\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3\}$$
$$\boldsymbol{B} = \{2, 4, 6, 8\}$$

Všimněte si, že využíváme způsobu, kterým se v seznamu osob zaznamenávají přítomní a nepřítomní lidé.

Množiny můžeme udat tzv. Vennovým diagramem. Na obrázku 1 je znázorněna množina $\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$, jejíž prvky jsou vybrány ze základní množiny $\boldsymbol{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Z obrázku 1 (i z tabulky) je snadno patrné, že například číslo „2" JE prvkem a číslo „1" NENÍ prvkem množiny $\boldsymbol{M}$. Zápis:

$2 \in \boldsymbol{M}$ (čteme: číslo 2 je prvkem množiny $\boldsymbol{M}$);

$1 \notin \boldsymbol{M}$ (čteme: číslo 1 není prvkem množiny $\boldsymbol{M}$).

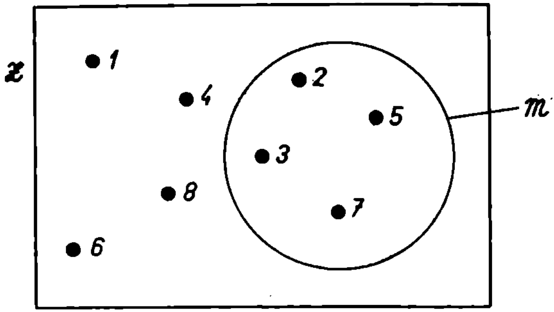
Množinu $\boldsymbol{M} = \{2, 3, 5, 7\}$ můžeme udat též charakteristickým znakem:

„$\boldsymbol{M}$ je množina všech prvočísel z množiny $\boldsymbol{Z}$".

Zapisujeme

$$\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je prvočíslo}\}$$

a čteme: ***M*** je množina všech čísel $x \in \boldsymbol{Z}$, která jsou prvočísly.



Obr. 1

PŘÍKLAD 1

Z je množina všech měst v ČSSR. ***P*** je množina všech měst v ČSSR, která mají více než milión obyvatel. Zápis:

$$\boldsymbol{P} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ má více než milión obyvatel}\};$$

výčtem

$$\boldsymbol{P} = \{\text{Praha}\}.$$

P je ***jednoprvková*** množina.

Množina ***R*** se skládá ze všech měst v ČSSR, která mají aspoň 2 milióny obyvatel. Zápis:

$$\boldsymbol{R} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ má aspoň 2 milióny obyvatel}\}.$$

V ČSSR není žádné dvoumiliónové město. Množina ***R*** nemá proto žádný prvek. Říkáme, že

R je ***prázdná*** množina,

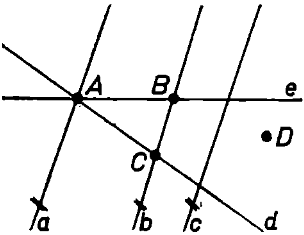
zápis

$$\boldsymbol{R} = \emptyset \text{ nebo } \boldsymbol{R} = \{\ \}.$$

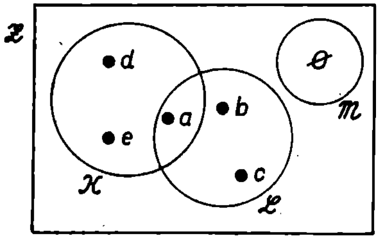
Znak $\emptyset$ není nula.

PŘÍKLAD 2.

Základní množina ***Z*** se skládá ze všech přímek znázorněných na obr. 2.



Obr. 2



Obr. 3

Množina ***K*** se skládá ze všech přímek z obrázku 2, které procházejí bodem A. Zápis:

$$\boldsymbol{K} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ prochází bodem } A\}.$$

Množina ***K***, která je dána svým charakteristickým znakem můžeme udat též výčtem všech jejích prvků; ***K*** je ***3-prvková*** množina.

$$\boldsymbol{K} = \{a, d, e\}.$$

Podobně pro množinu $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L} = \{y \in \boldsymbol{Z} \mid y \parallel a\} ;$$

$\boldsymbol{L}$ je množina všech přímek z obrázku 2, které jsou rovnoběžné s přímkou a, tzn. $\boldsymbol{L}$ je 3-prvková množina

$$\boldsymbol{L} = \{a, b, c\} .$$

Množina

$$\boldsymbol{M} = \{p \in \boldsymbol{Z} \mid p \text{ prochází bodem } D\}$$

je prázdná množina, $\boldsymbol{M} = \varnothing$.

Množiny $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ můžeme zadat též Vennovým diagramem (obr. 3). *Ve Vennově diagramu znázorňujeme všechny prvky základní množiny $\boldsymbol{Z}$ jako body*, i když jsou to ve skutečnosti třeba přímky, kružnice ap.

Množiny $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ udává též tabulka:

	a	b	c	d	e
$\boldsymbol{K}$	/	–	–	/	/
$\boldsymbol{L}$	/	/	/	–	–
$\boldsymbol{M}$	–	–	–	–	–

Množiny $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, které byly dány charakteristickým znakem, jsme zapsali výčtem všech jejich prvků. Můžeme však řešit i obrácenou úlohu.

Základní množina $\boldsymbol{Z}$ je opět množina všech přímek z obr. 2. Množinu

$$\boldsymbol{N} = \{a, b, c, d\} ,$$

která je dána výčtem prvků, můžeme udat též charakteristickým znakem. Je to množina všech různoběžek s přímkou e;

$$\boldsymbol{N} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je různoběžka s přímkou } e\}\,.$$

Snad jste si všimli, že základní množina $\boldsymbol{Z}$ se může případ od případu měnit.

Pamatujte si názvy:

Množina,	základní množina,
prvek,	prázdná množina.

Pamatujte si označení a zápisy:

$a \in \boldsymbol{M}$,	$\boldsymbol{M} = \{3, 5, 12, 15\}$,
$b \notin \boldsymbol{M}$,	$\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je sudé číslo}\}$,
	$\boldsymbol{M} = \emptyset$.

CVIČENÍ

1. Přečtěte zápis

$\boldsymbol{T}$ = {pondělí, úterý, středa, čtvrtek, pátek, sobota}.

Dovedete popsat tuto množinu charakteristickým znakem?

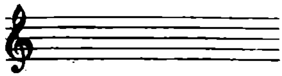
2. a) Přečtěte zápis

$\boldsymbol{P}$ = {Afrika, Amerika, Asie, Australie, Antarktida, Evropa}.

Dovedete popsat tuto množinu charakteristickým znakem?

b) Udejte výčtem a zapište množinu všech pevnin, které mají menší rozlohu než Australie.

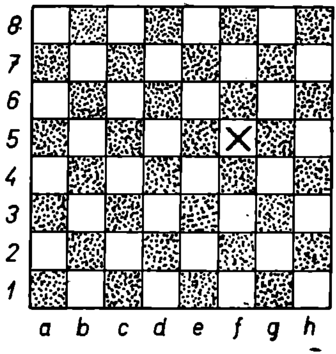
3. Udejte výčtem a zapište základní stupnici (škálu) C-dur; prvky jsou tóny, označené písmeny — jako např. C, F, A atd. Proveďte notový zápis této množiny.



4. a) Opravte zápis $M = \{1, 2, 4, 3, 2, 1\}$.
b) Je $\{0\} = 0$?
c) Je $\{a, c, b\} = \{b, a, c\}$?

5. Potřebujete šachovnici. Její pole budete zapisovat takto: $f5$ je pole ležící ve sloupci „f" a v řádku „5"; na obr. 4 je vyznačeno křížkem.

a) Vypište všecka bílá pole, v jejichž označení je číslo 3.
b) Vypište všecka černá pole, v jejichž označení jsou písmena c, f.
c) Vypište všecka rohová pole šachovnice.
d) Na pole $g1$ postavte figuru krále. Vypište všecka pole, na která se dostane tento král jedním tahem.
e) Na pole $f5$ postavte figuru koně. Vypište všecka pole, na která se dostane tento kůň jedním tahem.



Obr. 4

6. Potřebujete šachovnici a figuru koně, kterého umístíte na pole $c2$.

a) Kůň má přejít sedmi tahy na pole $g5$; vypište množinu všech polí, kterými projde.
b) Kůň má projít co nejmenším počtem tahů na pole $g5$; vypište množinu všech polí, kterými projde.
c) Kůň má přejít šesti tahy na pole $g5$; vypište množinu všech polí, kterými projde.

7. a) Vypište množinu Z všech násobků čísla 13, které jsou menší než 200.

b) Vyberte z množiny Z všecka čísla dělitelná třemi; vypište jejich množinu M_1.

c) Vyberte z množiny Z všechna trojciferná čísla; vypište jejich množinu M_2.

d) Vyberte z množiny Z všecka sudá trojciferná čísla; vypište jejich množinu M_3.

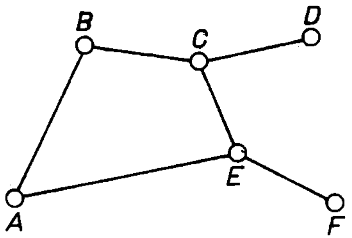
8. Přečtěte zápisy množin a pak je udejte výčtem prvků. Množina $Z = \{4, 5, 7, 9, 13, 16, 20, 24\}$.

a) $A = \{x \in Z \mid x \text{ je násobek čísla } 4\}$.

b) $B = \{x \in Z \mid 8 < x < 24\}$.

c) $C = \{x \in Z \mid x \text{ není násobek čísla } 3\}$.

Všechny množiny znázorněte též Vennovými diagramy.



Obr. 5

9. Na obrázku 5 je znázorněno schéma části uliční sítě města.

a) Rozmístěte na křižovatky A, B, C, D, E, F co nejmenší počet policistů, kteří by mohli zrakem kontrolovat všechny ulice. Najděte všechny možnosti.

Řešení modelujte šachovými figurkami a pak zaznamenejte do tabulky naznačeným způsobem:

A	B	C	D	E	F
/	—	/	—	—	/

b) Kolik policistů stojí na každých dvou sousedních křižovatkách?

10. a) Rozmístěte na křižovatky A, B, C, D, E, F uliční sítě (obr. 5) co nejmenší počet veřejných hodin tak, aby z každé křižovatky bylo vidět aspoň jedny hodiny. Řešte stejným způsobem jako předešlé cvičení.

b) Kolik hodin stojí na každých dvou sousedních křižovatkách?

11. Z je množina všech kladných celých čísel menších než 13. Udejte výčtem množiny:

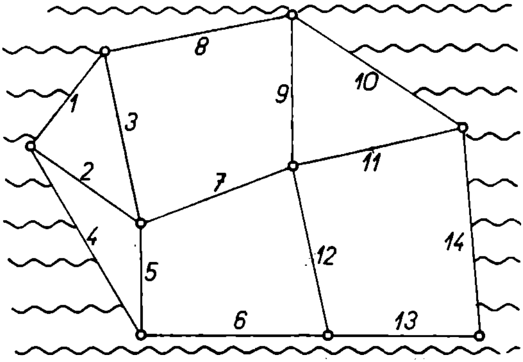
a) $A = \{x \in Z \mid x$ je násobek čísla $5\}$;

b) $B = \{x \in Z \mid x$ není násobek čísla $5\}$;

c) $C = \{x \in Z \mid \frac{3}{7} x$ je celé číslo$\}$;

d) $D = \{x \in Z \mid$ čísla x a x^2 mají stejné poslední číslice$\}$.

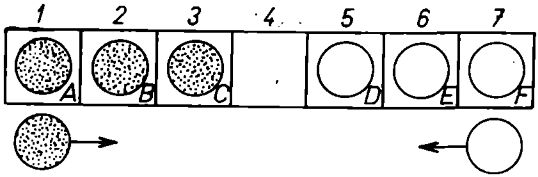
Množiny A, B a podobně množiny C, D znázorněte Vennovými diagramy.



Obr. 6

12. Představte si rýžová pole na ostrově, znázorněná na obrázku 6. Očíslované úsečky značí hráze. Kolem polí je jezero.

Všechna pole je třeba zavodnit tím, že se protrhnou některé hráze. Udejte několik možností. Pokuste se experimentálně zjistit kolik může mít množina protržených hrází nejméně prvků.



Obr. 7

13. Hra. Potřebujete pás se sedmi vyznačenými poli, tři bílé a tři černé kameny (obr. 7).

Cíl a pravidla hry:

1. Bílé kameny se mají přemístit na místa černých a naopak.

2. Každý černý kámen se smí pohybovat jen vpravo, bílý jen vlevo.

3. Každý kámen se smí buď posunout na vedlejší pole, je-li prázdné, nebo smí překročit jeden (kterýkoli) kámen, ale vždy jen na prázdné pole.

4. Začíná bílý.

a) Vypište všechny tahy; tah zaznamenejte například takto: C (3 — 4), tj. kámen C z pole 3 na pole 4.

b) Vypište všechny tahy, kdy jeden kámen přeskakuje jiný.

c) Vypište všechny tahy, kdy se hýbá bílým kamenem.

* * *

Nekonečné množiny udáváme obvykle **charakteristickým znakem.**

PŘÍKLAD 3.

Základní množina $\boldsymbol{Z}$ je rovina. Kruh $\boldsymbol{K}$ se středem S a poloměrem $r = 2{,}5$ cm je množina

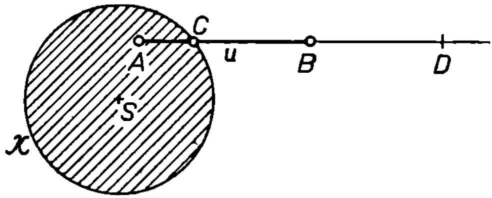
$$\boldsymbol{K} = \{X \in \boldsymbol{Z} \mid SX \leqq 2{,}5 \text{ cm}\},$$

tj. množina všech bodů X roviny, které mají od bodu S vzdálenost menší nebo rovnou 2,5 cm. (Obr. 8, kde je např. $A \in \boldsymbol{K}$, $C \in \boldsymbol{K}$, $S \in \boldsymbol{K}$, $B \notin \boldsymbol{K}$, $D \notin \boldsymbol{K}$.)

Podobně úsečka $u = AB$ je množina

$$u = \{X \in \boldsymbol{Z} \mid X \text{ leží mezi } A \text{ a } B \text{ nebo s některým z bodů } A, B \text{ splývá}\}.$$

(Na obr. 8 je $A \in u$, $B \in u$, $C \in u$, $D \notin u$, $S \notin u$.)



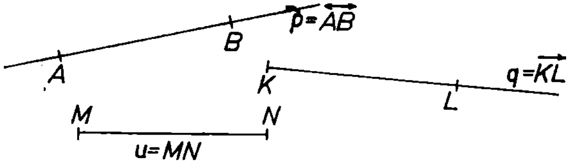
Obr. 8

V geometrii jsou přímky, úsečky, kružnice ap. množinami bodů, i když je označujeme někdy malými písmeny.

PŘÍKLAD 4.

Pro polopřímky a přímky (jsou to množiny bodů) užíváme zápisů:

$\overleftrightarrow{AB}$ ... přímka jdoucí body A, B ($A \in \overleftrightarrow{AB}$, $B \in \overleftrightarrow{AB}$);
$\overrightarrow{KL}$ ... polopřímka s počátkem K ($K \in \overrightarrow{KL}$, $L \in \overrightarrow{KL}$);
MN ... úsečka s krajními body M, N;
viz obrázek 9.



Obr. 9

PŘÍKLAD 5.

M je množina všech kladných násobků čísla tří. Za základní množinu ***Z*** můžeme považovat množinu skládající se ze všech kladných přirozených čísel. Tedy

$$\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je násobek čísla tři}\}\,.$$

Množiny ***Z*** a ***M*** nemůžeme udat výčtem. Přesto někdy zapisujeme množinu všech přirozených čísel takto:

$$\boldsymbol{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \qquad ;$$

a podobně množinu ***M***:

$$\boldsymbol{M} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}\,.$$

Tečky znamenají „a tak dále“. Musíme udat tolik prvků, aby byl „zřejmý“ charakteristický znak příslušné množiny.

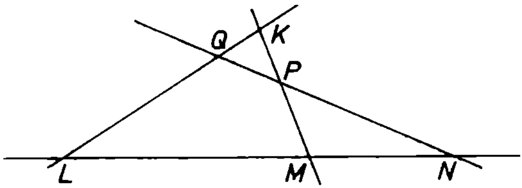
CVIČENÍ

14. Na obrázku 10 jsou zakresleny čtyři přímky a na nich je označeno šest bodů K, L, M, N, P, Q.

a) Pomocí označených bodů zapište všecky úsečky, které obsahují bod P; např. $P \in PN$.

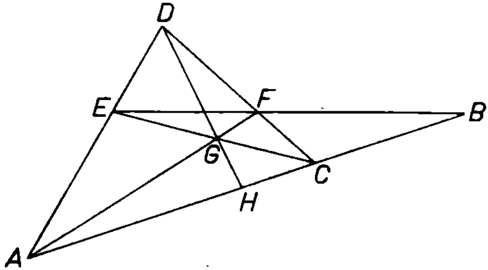
b) Pomocí označených bodů zapište všechny polopřímky, které obsahují bod Q: např. $Q \in \overrightarrow{LK}$.

c) Pomocí označených bodů zapište všecky polopřímky, které obsahují aspoň jeden z bodů K, M; např. $M \in \overrightarrow{NL}$.



Obr. 10

15. a) Narýsujte obrázek 11. Body vznikají v pořadí A, B, C, D, E, F, G, H. Nejdříve zvolíme body A, B, pak $C \in AB$. Pak zvolíme bod $D \notin \overleftrightarrow{AB}$, pak bod $E \in AD$. Body F, G, H už budete umět sestrojit.



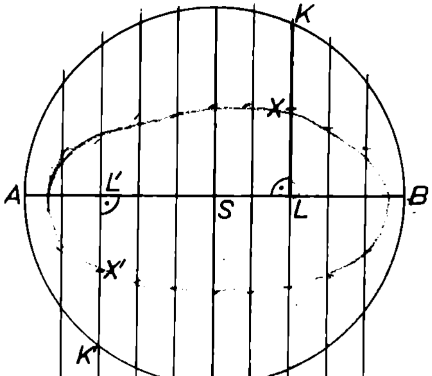
Obr. 11

b) Zvolte body D, E ještě jednou ($D \notin \overleftrightarrow{AB}$, $E \in AD$). Bod D zvolte „pod“ přímkou $\overleftrightarrow{AB}$. Kde vyšel druhý bod H?

16. Na přímé trati je pět závodníků, které označíme písmeny A, B, C, D, E. V určitém okamžiku mají závodníci tyto vzdálenosti $AB = 30$ m, $AD = 60$ m, $BC = 40$ m, $CE = 30$ m, $DE = 20$ m. Zakreslete (při vhodném zmenšení) závodníky jako body na přímce, zejména zakreslete polohu závodníka C. Vypočtěte vzdálenost závodníků A, C. Pozor, úloha má dvě řešení.

17. Za základní množinu $\mathbf{Z}$ zvolte rovinu papíru. Sestrojte kružnici $k = \{X \in \mathbf{Z} \mid SX = 5 \text{ cm}\}$ a její průměr AB (obr. 12; zmenšeno na polovinu). $\mathbf{M}$ je množina všech úseček KL kolmých k AB, kde $K \in k$, $L \in AB$. Množina $\mathbf{E}$ je tato:

$$\mathbf{E} = \{X \in \mathbf{Z} \mid X \text{ je střed úsečky } KL \in \mathbf{M}, \text{ nebo splyne s některým z bodů } A, B\}.$$

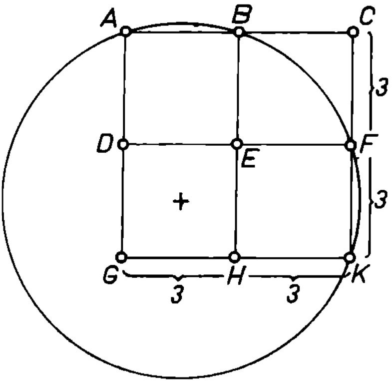


Obr. 12

Sestrojte na přímkách $a_1, a_2, \ldots, a_9$ (obr. 12) všechny body X množiny $\mathbf{E}$ a pak načrtněte přibližně průběh množiny $\mathbf{E}$. Vznikne křivka, tzv. ***elipsa***.

18. Na obrázku 13 je znázorněno 9 bodů $A, B, C, \ldots, K$.

Množina M se skládá ze všech kružnic k, které procházejí aspoň třemi z daných bodů. Množina S se skládá ze všech středů kružnic z množiny M. Znázorněte množinu S zjistěte počet jejích prvků a porovnejte jej s počtem prvků množiny M. (Jedna kružnice a její střed jsou na obr. 13 znázorněny.)



Obr. 13

1.2. Podmnožina

Množiny M, K jsou dány jednak Vennovým diagramem (obr. 14), jednak tabulkou 1.

Tabulka 1.

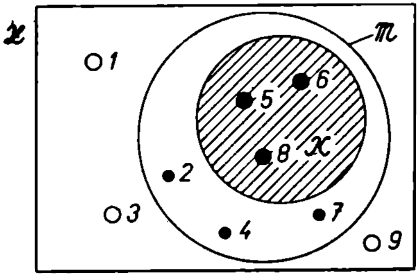
Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	—	/	—	/	/	/	/	/	—
K	—	—	—	—	/	/	—	/	—
	⇑		⇑		↑	↑		↑	⇑

Říkáme, že množina K je

PODMNOŽINOU nebo **ČÁSTÍ**

množiny M; zápis

$$K \subset M.$$



Obr. 14

Množina K *je podmnožinou* M, *je-li splněna aspoň jedna z vlastností:*

(1) *Každý prvek z* K *je prvkem z* M; (na obr. 14 viz prvky vyznačené velkými plnými kroužky, v tabulce 1 viz sloupce označené černými šipkami).

(2) *Každý prvek, který není z* M *není také prvkem z* K; (na obr. 14 viz prvky vyznačené bílými kroužky, v tabulce 1 viz sloupce označené bílými šipkami).

PŘÍKLAD 1.

Základní množina je $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$; je to množina všech přirozených čísel (bez nuly).

$A = \{x \in Z \mid 2 < x \leqq 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$;

$\boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \text{ je jednociferné číslo}\} =$
$= \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$;

$\boldsymbol{C} = \{2, 3, 4\}$.

Platí:

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{B},$$

$\boldsymbol{C} \not\subset \boldsymbol{A}$ (čteme: $\boldsymbol{C}$ není podmnožinou množiny $\boldsymbol{A}$), protože $2 \in \boldsymbol{C}$, $2 \notin \boldsymbol{A}$,

$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{A}$,

Pro každou množinu $\boldsymbol{A}$, jejíž všechny prvky jsou vybrány ze základní množiny $\boldsymbol{Z}$ platí:

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{Z},\ \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A},\ \emptyset \subset \boldsymbol{A}$$

(vždy je splněna aspoň jedna z vlastností (1) a (2) na str. 23; ověřte si to sami).

PŘÍKLAD 2.

Na obrázku 15 jsou znázorněny kruhy

$\boldsymbol{K} = \{X \mid SX \leqq 4 \text{ cm}\}$, $\boldsymbol{L} = \{Y \mid OY \leqq 1{,}5 \text{ cm}\}$*);

vzdálenost středů S, O je 2 cm.

Platí:

$$\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}.$$

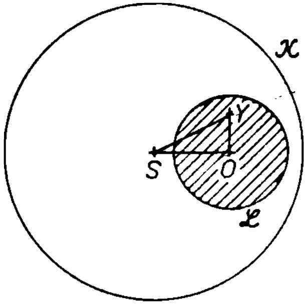
To můžeme ověřit též početně. Nechť

$$Y \in \boldsymbol{L}, \quad \text{tzn. } OY \leqq 1{,}5 \text{ cm}$$

*) Za základní množinu považujeme celou rovinu. Proto označení základní množiny v obdobných případech mnohdy nepíšeme.

Podle neostré **„*trojúhelníkové nerovnosti*“****) je

$$SY \leqq SO + OY = 2\text{ cm} + 1{,}5\text{ cm} = 3{,}5\text{ cm}\,.$$

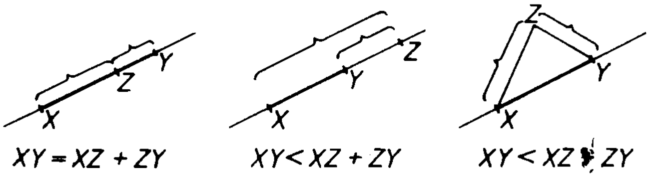


Obr. 15

Proto je

$$SY \leqq 3{,}5\text{ cm} < 4\text{ cm, tzn. bod } Y \in \boldsymbol{K}\,.$$

Tedy každý bod Y kruhu $\boldsymbol{L}$ patří též kruhu $\boldsymbol{K}$.



Obr. 16

**) Pro každé tři různé body X, Y, Z platí tzv. neostrá trojúhelníková nerovnost:

$$XY \leqq XZ + ZY\,.$$

Rovnost nastane pouze tehdy, když $Z \in XY$; viz obr. 16.

PŘÍKLAD 3.

Za základní množinu $\boldsymbol{Z}$ zvolme množinu všech prvočísel, tj.

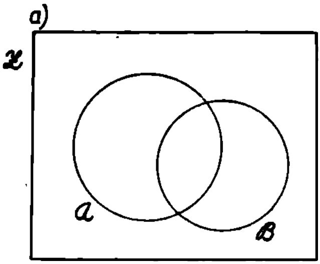
$$\boldsymbol{Z} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}^{*)}$$

Množiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou dány charakteristickými znaky:

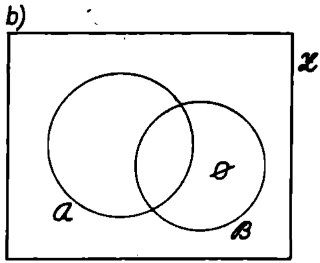
$$\boldsymbol{A} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid 100 < x < 115\},$$

$$\boldsymbol{B} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid 105 < x < 120\}.$$

Schematicky jsou tyto množiny vyznačeny na obrázku 17a.



Obr. 17a



Obr. 17b

V tomto případě můžeme rozhodnout o tom zda aspoň jedna z množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ je částí druhé teprve tehdy, když tyto množiny udáme výčtem.

---

*) Ačkoliv současná matematika nedovede rozhodnout o každém přirozeném čísle, zda je či není prvočíslo (např. o tzv. Fermatově čísle $2^a + 1$ pro $a = 2^{1971}$ — viz J. Sedláček: Co víme o přirozených číslech, Škola mladých matematiků, II. vydání, str. 25), tvoří tato čísla množinu. O každém přirozeném čísle lze rozhodnout, zda je prvočíslo bez ohledu, zda to my umíme nebo neumíme.

Zjistíme, že $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, neboť

$$\boldsymbol{A} = \{101, 103, 107, 109, 113\},$$

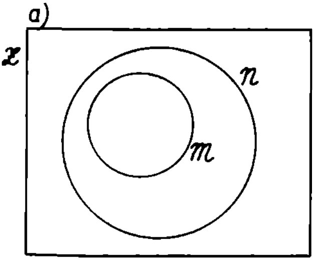
$$\boldsymbol{B} = \{107, 109, 113\};$$

viz např. Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro 7—9 roč. ZDŠ.

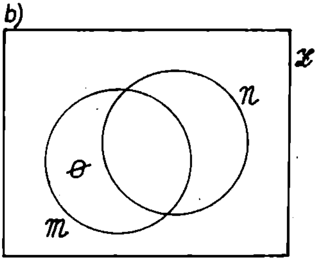
Skutečnost, že pro množiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ z Vennova diagramu na obr. 17a platí

$$\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$$

vyznačíme způsobem zřejmým z obr. 17b (aniž obrázek 17a překreslujeme, nebo vyznačujeme na něm prvky množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$).



Obr. 18a



Obr. 18b

Pamatujte si názvy:

podmnožina, část množiny.

Pamatujte si označení:

$$\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$$

(znázorněno Vennovými diagramy na obr. 18ab bez vyznačení prvků).

$$\boldsymbol{A} \not\subset \boldsymbol{B}.$$

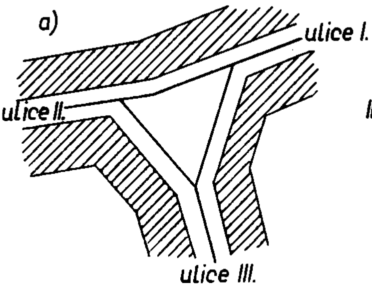
CVIČENÍ

1. a) Obrázek 19a znázorňuje křižovatku pouliční dráhy v městě. Přes křižovatku vede celkem 5 linek. Zjistěte, kolik linek projíždí každou z ulic I, II, III. Jedno řešení ukazuje obrázek 19b. Načrtněte všecka další řešení.

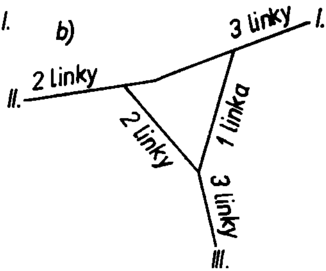
b) Označte:

M_1 množinu všech linek, které vedou ulicí I,
M_2 množinu všech linek, které vedou ulicí II,
M_3 množinu všech linek, které vedou ulicí III,
P_1 množinu všech linek, které vedou po spojce II—III,
P_2 množinu všech linek, které vedou po spojce III—I,
P_3 množinu všech linek, které vedou po spojce I—II.

Je $P_2 \subset M_1$? Je $P_3 \subset M_1$? Může být v některém řešení $M_2 \subset M_1$?
Nezapomeňte uvážit, že po spojce II—III nemusí vést žádná linka!



Obr. 19a



Obr. 19b

2. Do autobusu se samoobsluhou nastoupili ráno první dva cestující a každý z nich zaplatil 1 Kčs. Žádná z odevzdaných mincí nebyla koruna a zároveň nebyla menší než desetihaléř. Označte M_{10}, M_{25}, M_{50} množinu desetihaléřových, pětadvacetihaléřových a padesátihaléřových mincí, které byly po zaplacení v pokladně. Určete, kolik mají tyto množiny prvků. Je celkem patnáct možností. Zapisujte si je do takovéto tabulky:

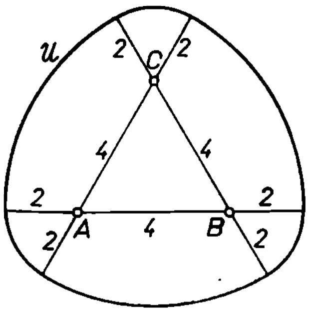
M_{10}	5				...
M_{20}	2				...
M_{50}	2				...

Vymyslete takový postup, abyste žádnou možnost nevynechali.

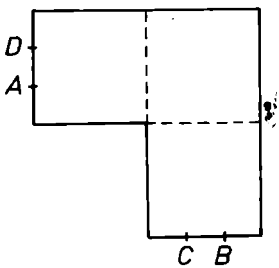
3. Udejte výčtem a zapište množinu všech čísel, která jsou větší než 10 000 a menší než 15 000 a která lze vyslovit takto: x tisíc, x set a x jednotek; např. 11 tisíc, 11 set a 11 jednotek, tj. 11 000 + 1 100 + 11 = 12 111.

4. Rýsujte podle obrázku 20. Obrazec U je omezen oblouky kružnic, které mají středy v bodech A, B, C.

a) Znázorněte nejdelší úsečku XY, pro kterou platí $XY \subset U$. Kolik má úloha řešení?



Obr. 20



Obr. 21

b) Lze sestrojit rovnostranný trojúhelník $\boldsymbol{T}$ o straně 8 cm (7,5 cm) tak, aby $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{U}$? Pokuste se aspoň jednu z vašich domněnek odůvodnit.*)

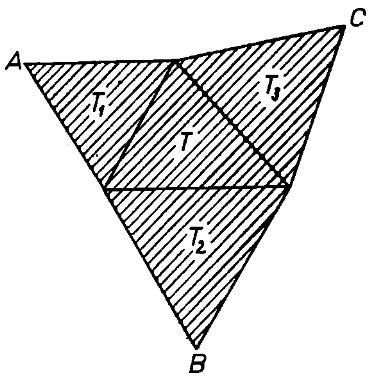
5. Na obrázku 21 je půdorys obrazárny $\boldsymbol{Z}$. V místech A, B, C, D jsou zavěšeny 4 obrazy. Znázorněte množiny:

$\boldsymbol{M} = \{X \in \boldsymbol{Z} \mid$ z místa X je vidět pouze jeden z obrazů $A, B\}$,
$\boldsymbol{N} = \{Y \in \boldsymbol{Z} \mid$ z místa Y je vidět jen jeden z obrazů $C, D\}$,
$\boldsymbol{L} = \{T \in \boldsymbol{Z} \mid$ z místa T je vidět jen jeden z obrazů $A, C\}$.

Zjistěte, které ze zápisů:

$$\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{K}, \quad \boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{K},$$
$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{N},$$

jsou pravdivé.



Obr. 22

*) Návod: Je-li trojúhelník $\boldsymbol{T}$ o straně 8 cm částí $\boldsymbol{U}$, pak musí některá strana procházet aspoň jedním z bodů A, B, C. Vyšetřete všechny polohy takových trojúhelníků $\boldsymbol{T}$, jejichž jedna strana prochází bodem C a její krajní body se pohybují po obvodu $\boldsymbol{U}$. Co vyplní třetí vrcholy těchto trojúhelníků? Pro trojúhelník $\boldsymbol{T}$ o str. 7,5 uvažujte taková umístění, kdy jedna jeho strana prochází dvěma z bodů A, B, C.

6. **a)** Rýsujte podle obrázku 22. $\boldsymbol{T}$ je libovolný trojúhelník, $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_3}$ jsou rovnostranné trojúhelníky. $\boldsymbol{U}$ je šrafovaný obrazec. Vyšetřete, zda může být v některém případě $\boldsymbol{U} \subset \triangle ABC$

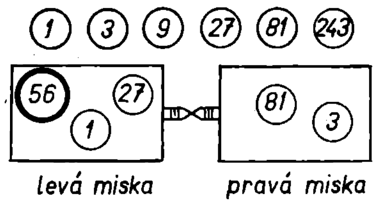
b) Úlohu řešte ještě jednou pro případ, že $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_3}$ jsou rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech A, B, C.

7. Přijímací zkouška na střední školu se skládá ze dvou částí: ústní zkoušky a písemné zkoušky. Na střední školu mohou být přijati jen ti uchazeči, kteří úspěšně složí obě zkoušky. Z nich se udělá pořadí a skutečně se přijmou pouze ti, jejichž pořadové číslo není větší než počet volných míst.

Uchazeči	$\boldsymbol{Z}$	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M
Prospěli: a) ústně	$\boldsymbol{A}$	–	/	/	–	/	/	/	/	–	–	/	/
b) písemně	$\boldsymbol{B}$	–	–	/	/	/	/	/	–	/	–	/	/
c) ústně i písemně	$\boldsymbol{C}$												
d) přijati	$\boldsymbol{D}$												

a) Zapište vztah mezi množinami $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$!

b) Uveďte všechny možnosti pro množinu $\boldsymbol{D}$ v případě, že jsou volná **4** místa (**6** míst, **8** míst).



Obr. 23

8. Pomocí šesti závaží o váze 1 g, 3 g, 9 g, 27 g, 81 g a 243 g můžeme (s přesností gramu) zvážit každý předmět do váhy 364 g. Udejte, jak navážíme 10 g, 80 g, 100 g, 300 g, 362 g.

Při vážení smíme klást závaží na obě misky. Použijte hracích kamenů s vepsanými čísly a klaďte je na obě „misky" vah. Např. 56 gramů navážíme podle obr. 23.

1.3. Nejvýše — aspoň — právě

V matematice často používáme slov:

NEJVÝŠE — ASPOŇ — PRÁVĚ.

Jejich význam si ujasníme příkladem.

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{M_1}$ je množina všech žáků vaší třídy, kteří mají nejvýše dva sourozence. Do $\boldsymbol{M_1}$ patří všichni žáci, kteří

a) nemají žádného sourozence,
b) mají jednoho sourozence,
c) mají dva sourozence.

Označíme-li množinu všech žáků vaší třídy $\boldsymbol{Z}$, pak platí

$$\boldsymbol{M_1} = \{X \in \boldsymbol{Z} \mid \text{počet sourozenců žáka } X \text{ je } x \leqq 2\}.$$

$\boldsymbol{M_2}$ je množina všech žáků vaší třídy, kteří mají aspoň dva sourozence. Do $\boldsymbol{M_2}$ patří všichni žáci, kteří

a) mají dva sourozence,
b) mají více sourozenců než dva.

To znamená

$$\boldsymbol{M_2} = \{Y \in \boldsymbol{Z} \mid \text{počet sourozenců žáka } Y \text{ je } y \geqq 2\}.$$

$\boldsymbol{M_3}$ je množina všech žáků vaší třídy, kteří mají právě dva sourozence. Do M_3 patří jen ti žáci, kteří mají dva sourozence. Tedy

$$M_3 = \{V \in Z \mid \text{počet sourozenců žáka } V \text{ je } v = 2\}.$$

Platí

$$M_3 \subset M_1, \quad M_3 \subset M_2,$$

ale nemusí platit

$$M_1 \subset M_3 \text{ ani } M_2 \subset M_3 .$$

Řekne-li někdo „žák má dva sourozence“, myslíme tím „žák má právě dva sourozence“.

Pamatujte:

Nejvýše 2 je 2 nebo méně než 2,
aspoň 2 je 2 nebo více než 2,
právě 2 je 2.

CVIČENÍ

1. a) Vypište množinu T_1 všech trojciferných čísel, z nichž každé obsahuje nejvýše 2 cifry a aspoň jednu jedničku.

b) Vypište množinu T_2 všech dvojciferných čísel, z nichž každá obsahuje nejvýše jednu jedničku. Je některá z množin T_1, T_2 podmnožinou druhé? Mají množiny T_1, T_2 společné prvky? Vypište množinu všech čísel společných množinám T_1, T_2.

2. Potřebujete mapu Evropy, na níž jsou vyznačena některá hlavní města; dále potřebujeme měřítko.

a) Vypište množinu M_1 všech vyznačených hlavních měst, která mají od Prahy vzdušnou vzdálenost aspoň 300 km.

b) Vypište množinu M_1 všech vyznačených hlavních měst, která mají od Prahy vzdušnou vzdálenost nejvýše 600 km

c) Vypište množinu P měst společných množinám M_1, M_2. Popište množinu P charakteristickým znakem.

3. Autobus má 32 míst k sezení a nejvýše 34 míst k stání. Na sportovní podnik má být dopraveno takovými autobusy 1000 osob. Aspoň polovina autobusů (jedoucích do vzdálenějších míst) má vézt jen sedící cestující. Aspoň kolik (kolik nejméně) autobusů potřebujeme pro tuto dopravu?

Vypočtené číslo zkontrolujte zkouškou.

4. Potřebujete šachovnici a figuru koně. Kůň má být přemístěn z pole *c*6 na pole *a*1 tak, že nesmí opustit sloupec *a*, *b*, *c* a každým polem smí projít nejvýše jednou.

a) Vypište všechny cesty, při nichž vykoná kůň nejvýše 4 tahy. (Např. takto *b*4 — *c*2).

b) Vypište všechny cesty, při nichž vykoná kůň aspoň 8 tahů.

5. Jirka provedl sérii deseti hodů mincí. Jenda si poznamenal prvních 6 výsledků:

Ⓛ Ⓡ Ⓡ Ⓛ Ⓛ Ⓛ . . . . .

(Ⓛ značí „líc“, Ⓡ značí „rub“). Konečný výsledek pokusu mohl Jenda odhadnout takto:

a) Rub padl aspoň .... — krát;
b) Líc padl aspoň .... — krát;
c) Rub padl nejvýše .... — krát;
d) Líc padl nejvýše .... — krát.

6. Která celá čísla můžete dosadit za x, y, z do tabulky 1, jestliže mají být pravdivé zároveň tyto výroky:

(1) Součet čísel v každém řádku je aspoň 4.
(2) Součet čísel v každém sloupci je nejvýše 8.

Tab. 1.

2	—1	x
y	5	3
2	z	0

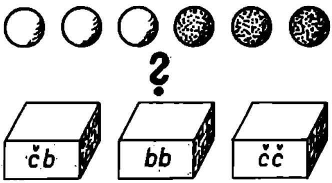
Dovedete určit, kolik má úloha různých řešení?

7. Doplňte chybějící údaje. Z jedenácti po sobě jdoucích přirozených čísel je

a) aspoň .... sudých,
b) nejvýše .... sudých,
c) aspoň................ násobkem čísla 3,
d) nejvýše .... násobkem čísla 3.

8. Na stole leží tři krabice a 3 černé a 3 bílé koule (obr. 24). Jenda vložil do každé krabice dvě koule, ale tak, že v žádné krabici nesouhlasil obsah s označením. Potom dal Jirkovi hádat, jaké koule jsou v jednotlivých krabicích. Jirka mu odpověděl: „Kdybych mohl vidět barvu aspoň jedné koule z krabice, kterou Ti ukáži, pak bych odpověděl přesně. Takhle však musím hádat".

Dovedete uvažovat stejně dobře jako Jirka? Rozmyslete si napřed, jak mohl Jenda koule rozmístit.



Obr. 24

9. Číslo 180 rozložte v součin dvou činitelů, jejichž součet je

a) nejvýše 40;
b) aspoň 70;
c) co nejmenší.

10. Házíme třemi hracími kostkami různých barev. Vypište všecky způsoby, kterými může padnout součet 16 ok. Dokažte, že aspoň na jedné kostce musí padnout 6 ok.

11. Kolik je nejvýše (nejméně) pátků v kalendářním roce, které připadnou na 13. den v měsíci?

1.4. Rozklad množiny

Někdy se zabýváme množinami, jejichž prvky jsou opět množiny.

PŘÍKLAD

Na jednom menším gymnasiu jsou pouze čtyři třídy: I., II., III., IV. Množina $\boldsymbol{Z}$ se skládá ze všech žáků gymnasia.

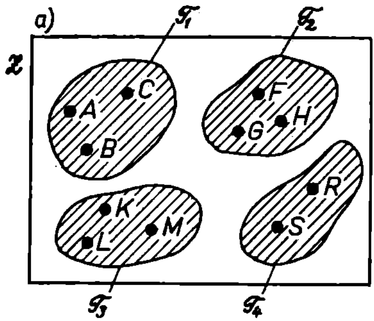
$\boldsymbol{T}_1$ je množina všech žáků I. třídy,

$\boldsymbol{T}_2$ je množina všech žáků II. třídy, atd.

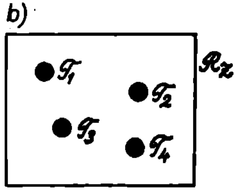
Množina $\boldsymbol{R}_Z$ je množina, jejíž prvky jsou všechny třídy, tzn.

$$\boldsymbol{R}_Z = \{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \boldsymbol{T}_4\}.$$

Viz obrázek 25a; v každé třídě jsou vyznačeni jen dva nebo tři žáci.



Obr. 25a



Obr. 25b

Důležitá poznámka. Zřejmě platí (obr. 25a):

$$A \in \boldsymbol{T}_1, \qquad \boldsymbol{T}_1 \in \boldsymbol{R}_Z,$$

kromě toho PLATÍ

$$A \notin \boldsymbol{R}_Z,$$

(tzn. NEPLATÍ: $A \in \boldsymbol{R}_Z$, neboť *prvky množiny* $\boldsymbol{R}_Z$ *jsou třídy a nikoliv žáci*).

V matematice užíváme názvy:

$\boldsymbol{R}_Z$ .... **ROZKLAD MNOŽINY**

$\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \boldsymbol{T}_4$ ..... **PRVKY** (nebo **TŘÍDY**) **ROZKLADU** $\boldsymbol{R}_Z$.

Přesný význam těchto názvů vymezíme takto:

Množina

$$\boldsymbol{R}_Z = \{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \ldots\}$$

je ROZKLAD MNOŽINY $\boldsymbol{Z}$, *jestliže PRVKY (TŘÍDY)* $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \ldots$ *množiny* $\boldsymbol{R}_Z$ *jsou takové neprázdné podmnožiny základní množiny* $\boldsymbol{Z}$ *pro něž platí*

(1) *Každý prvek* $x \in \boldsymbol{Z}$ *patří aspoň jedné z tříd* $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \ldots$;

(2) *Každý prvek* $x \in \boldsymbol{Z}$ *patří nejvýše jedné z tříd* $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \ldots$;

Víme, že vlastnosti (1) a (2) můžeme vyslovit současně.

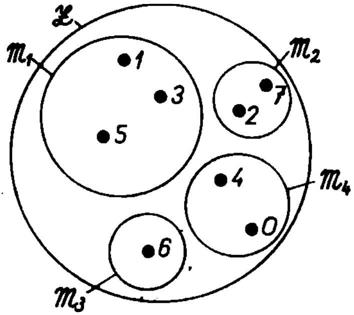
(3) *Každý prvek* $x \in \boldsymbol{Z}$ *patří právě jedné z tříd* $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \ldots$.

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\boldsymbol{M}_1 = \{1, 3, 5\}$, $\boldsymbol{M}_2 = \{2, 7\}$, $\boldsymbol{M}_3 = \{6\}$, $\boldsymbol{M}_4 = \{0, 4\}$.

$$\boldsymbol{R}_Z = \{\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3, \boldsymbol{M}_4\}$$

je rozklad množiny $\boldsymbol{Z}$ v třídy $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$, $\boldsymbol{M}_4$. Vennův diagram rozkladu je na obrázku 26.



Obr. 26

PŘÍKLAD

a) Označme $\boldsymbol{N}$ množinu všech přirozených čísel (včetně nuly), $\boldsymbol{S}$ množinu všech sudých přirozených čísel:

$$\boldsymbol{S} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\},$$

$\boldsymbol{L}$ množinu všech lichých přirozených čísel:

$$\boldsymbol{L} = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

Pak je $\boldsymbol{R}_N = \{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{L}\}$ rozklad množiny $\boldsymbol{N}$ na dvě třídy $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L}$.

b) Označme opět $\boldsymbol{N}$ množinu všech přirozených čísel (včetně nuly), $\boldsymbol{T}_0$ množinu všech násobků tří (tj. přirozených čísel, která při dělení třemi dávají zbytek 0); $\boldsymbol{T}_1$ množinu všech přirozených čísel, která při dělení třemi dávají zbytek 1; $\boldsymbol{T}_2$ množinu všech přirozených čísel, která při dělení třemi dávají zbytek 2.

Je tedy $\boldsymbol{T}_0 = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$,

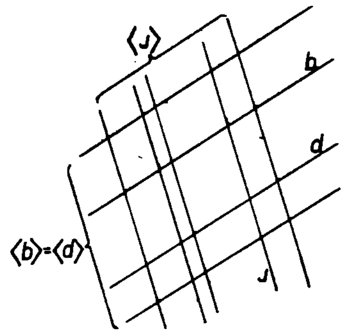
$\boldsymbol{T}_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$,

$\boldsymbol{T}_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$,

pak $\boldsymbol{R}_N = \{\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2\}$ je rozklad množiny $\boldsymbol{N}$ ve tři třídy $\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2$.

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{M}$ je množina všech přímek v rovině. Všechny přímky rovnoběžné s danou přímkou p tvoří množinu, kterou označíme $\langle p \rangle$. Z názoru víme: je-li $q \in \langle p \rangle$, je $\langle q \rangle = \langle p \rangle$ (obr. 27).



Obr. 27

Popsaným způsobem jsme provedli rozklad množiny $\boldsymbol{M}$ všech přímek v rovině v třídy $\langle p \rangle$, $\langle r \rangle$, ...

PŘÍKLAD

$\boldsymbol{M}$ je množina všech lidí, kteří na Zemi žili nebo žijí od počátku našeho letopočtu. Označme $\boldsymbol{S}_n$ množinu všech lidí, kteří žili (žijí) v n-tém století, $\boldsymbol{R}_n$ množinu všech lidí, kteří se narodili v n-tém století. Množiny

$$\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3, \ldots, \boldsymbol{S}_{20}$$

neurčují rozklad množiny $\boldsymbol{M}$, neboť např. Hus žil v 14. i 15. století, tzn. není splněna podmínka **(2)**.

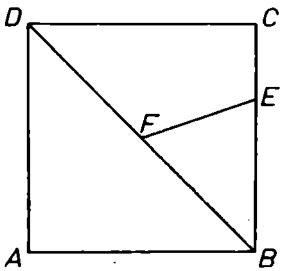
Také množiny

$$\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3, \ldots, \boldsymbol{R}_{20}$$

neurčují rozklad množiny $\boldsymbol{M}$. Není splněna podmínka **(1)**, neboť do $\boldsymbol{M}$ patří i někteří lidé, kteří se narodili před začátkem našeho letopočtu, ale žili v 1. století.

PŘÍKLAD

Na obrázku 28 je čtverec $ABCD$ rozdělen ve tři obrazce; trojúhelník ABD, trojúhelník BEF a čtyřúhel-



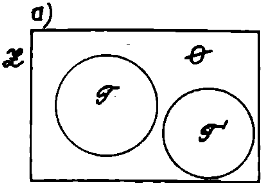
Obr. 28

ník $CDFE$. Jestliže ke každému obrazci počítáme — jak je obvyklé — i body jeho obvodu, není toto rozdělení čtverce $ABCD$ jeho rozkladem, neboť každé dva z obrazců ABD, BEF, $CDFE$ mají společné části obvodů, a proto není splněna podmínka **(2)**.

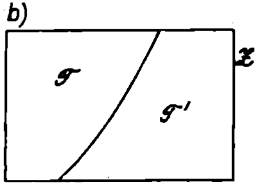
Jestliže rozklad $\boldsymbol{R}_{Z}$ množiny $\boldsymbol{Z}$ obsahuje ***JEN DVĚ TŘÍDY*** $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ (obr. 29a, b), říkáme, že množiny

$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}'$ jsou ***NAVZÁJEM DOPLŇKOVÉ MNOŽINY***

v množině $\boldsymbol{Z}$.



Obr. 29a



Obr. 29b

Platí pro ně

$$\boldsymbol{T} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \notin \boldsymbol{T}'\}, \quad \boldsymbol{T}' = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x \notin \boldsymbol{T}\}.$$

Za navzájem doplňkové množiny v základní množině $\boldsymbol{Z}$ počítáme i množiny: $\emptyset$, $\boldsymbol{Z}$.

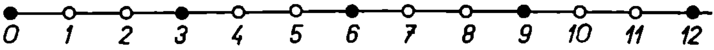
PŘÍKLAD

$\boldsymbol{Z}$ je množina všech přirozených čísel (včetně nuly), $\boldsymbol{M}$ je množina všech nezáporných násobků tří. $\boldsymbol{M}'$ je množina všech přirozených čísel, která nejsou násobky tří, neboli množina všech takových přirozených čísel, která při dělení třemi dávají zbytek 1 nebo 2.

M' se skládá ze všech přirozených čísel, která můžeme napsat ve tvaru

$$3n + 1 \quad \text{nebo} \quad 3n + 2\,,$$

kde n probíhá všechna přirozená čísla.



Obr. 30

Na obrázku 30 je číselná poloosa. Plné kroužky znázorňují prvky množiny *M*, prázdné kroužky prvky jejího doplňku *M'*. Tedy

$$\boldsymbol{M} = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x = 3n, \text{ kde } n \in \boldsymbol{Z}\},$$

$$\boldsymbol{M}' = \{x \in \boldsymbol{Z} \mid x = 3n + 1 \text{ nebo } x = 3n + 2, \text{ kde } n \in \boldsymbol{Z}\}.$$

Pamatujte si názvy (a jejich význam):

Rozklad množiny,
třídy rozkladu,
doplněk množiny,
navzájem doplňkové množiny.

CVIČENÍ

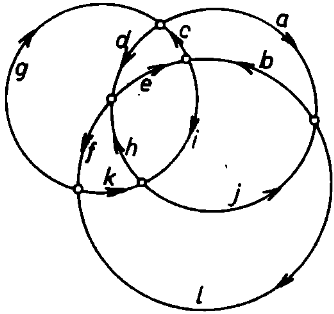
1. Je dána množina měst *M* = {Banská Bystrica, Bratislava, Brno, Košice, Olomouc, Ostrava, Plzeň, Praha, Prešov, Ústí nad Labem, Žilina}.

M_1 je množina všech měst z *M*, která mají od Brna vzdušnou vzdálenost menší než 200 km, M_2 množina všech měst z *M*, která mají od Brna vzdušnou vzdálenost 200 až 400 km,

M_3 je množina všech měst z M, která mají od Brna vzdušnou vzdálenost větší než 400 km.

a) Vypište (výčtem) množiny M_1, M_2, M_3.

b) Odůvodněte, že množiny M_1, M_2, M_3 tvoří rozklad množiny M.



Obr. 31

2. Na obrázku 31 jsou nakresleny tři kružnice, které se protínají celkem v 6 bodech; tím vznikne 12 oblouků a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, z nichž každý je opatřen šipkou.

a) Množinu $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ rozložte ve dvě podmnožiny M_1, M_2 tak, aby M_1 (M_2) obsahovala jen šipky ve smyslu pohybu hodinových ručiček (proti smyslu pohybu hodinových ručiček).

b) Množinu M rozložte ve dvě podmnožiny M_3, M_4 tak, aby při pohybu v naznačeném smyslu ležel vnitřek příslušné kružnice po pravé, resp. levé ruce.

c) Porovnejte oba rozklady.

3. N je množina všech přirozených čísel, A je množina všech sudých čísel, která nejsou dělitelná čtyřmi, B je množina všech násobků čtyř, C je množina skládající se ze všech přirozených čísel, která končí dvěma lichými ciframi, D je množina skládající se z čísel 1, 5, 9 a ze všech lichých čísel, která mají na místě desítek sudou cifru.

a) Vypište několik prvních prvků množin A, B, C, D.

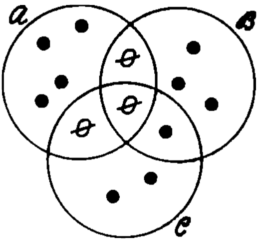
b) Zjistěte, zda $R_N = \{A, B, C, D\}$ je rozklad množiny N.

4. Rozhodněte, zda Vennovy diagramy na obrázku 32 znázorňují rozklad $M = \{A, B, C\}$.

5. M je množina všech trojciferných čísel, v jejichž zápise se vyskytují aspoň 2 stejné číslice. Z je množina všech trojciferných čísel.

a) Určete charakteristický znak doplňku M' množiny M, a počet prvků této množiny.

b) Zjistěte počet prvků množiny M. Využijte výsledku z cvičení 1a na str. 33.



Obr. 32

6. a) Na obrázku 33 je síť složená z devíti čtverců. Vypište množinu Z všech „cest" z A do B, které postupují po stranách čtverců a to vpravo a nahoru. Zápis provádějte takto: postup o jednu stranu čtverce vpravo zaznamenejte číslem 1, o jednu stranu nahoru číslem 0. Například tlustě vytažená cesta na obrázku 33 má zápis 110100.

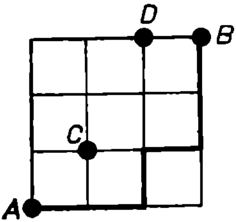
b) Určete (např. tabulkou) množiny

$K = \{x \in Z \mid \text{cesta } x \text{ prochází bodem } C \text{ i } D\}$,

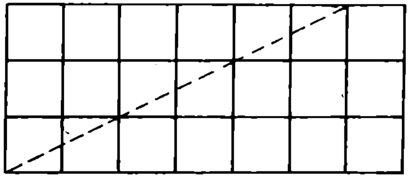
$L = \{y \in Z \mid \text{cesta } y \text{ neprochází žádným z bodů } C, D\}$

c) Vysvětlete, jsou — nejsou (nehodící se škrtněte) množiny K, L navzájem doplňkové v množině Z.

7. Lístek do kina stojí 1 Kčs. V pokladně nejsou žádné peníze, před pokladnou stojí 10 dětí. Sedm má pouze korunu, tři děti mají pouze tříkorunu.



Obr. 33



Obr. 34

a) Určete aspoň 10 různých pořadí dětí, při kterých nemusí žádné z dětí, které má tříkorunu čekat na vrácení. Použijte zápisu (1 značí dítě vlastnící korunu; 3 značí dítě vlastnící tříkorunu):

1 1 1 1 1 1 1 3 3 3
1 1 1 1 1 1 3 1 3 3
atd.

(Není možné pořadí: 1 1 3 1 3 1 1 3 1 1. Proč?)

b) Možná pořadí zakreslujte podobně jako ve cvičení 6 do sítě čtverců z obrázku 34. Pokuste se charakterizovat množinu ***M*** všech možných pořadí pomocí obrázku 34. (Všimněte si vzájemné polohy zakreslených lomených čar a čárkované „úhlopříčky“.)

c) Charakterizujte množinu ***M'*** všech nepřípustných pořadí.

d) Řešte úlohu pro případ, že před pokladnou je 11 dětí, z nichž 7 má tříkorunu a zbytek korunu.

8. Množina ***Z*** má $n = 15$ prvků. Prozradíme vám, že v množině můžeme najít celkem 5 005 různých 6 prvkových podmnožin. Dovedete určit počet všech 9 prvkových podmnožin? (Pokud si nevíte rady, řešte napřed úlohu pro $n = 5$ a tříprvkové podmnožiny.)

9. **a)** Množina ***Z*** má n prvků (např. $n = 6$). Zvolte číslo

$k < n$ (např. $k = 2 < 6$). Ukažte, že číslo, které udává počet k-prvkových podmnožin a $(n - k)$ - prvkových (např. $(n - k) = 4$) podmnožin v množině Z je vždy sudé.

b) Množina Z má $2n$ prvků. Ukažte, že číslo, které udává počet n-prvkových podmnožin množiny Z je vždy sudé.

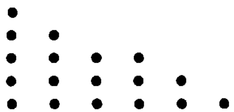
10. Otec zanechal svým třem synům dědictví pozůstávající z pěti domácích zvířat a dalších čtyř věcí, které byly takto oceněny:

koza K_1	420,—	televizor T	3 200,—
pes P	900,—	sud s vínem S	1 200,—
kočka K_2	250,—	jízdní kolo J	970,—
kuře K_3	20,—	obraz O	2 900,—
husa H	140,—		

Tři synové se mají rozdělit tak, aby všichni dostali stejný podíl z dědictví. Zjistěte jak se rozdělili. (Žádný předmět dědictví se nesmí dělit.)

11. Máte rozložit množinu M skládající se z 18 cvičenců na co největší počet tříd tak, aby každé dvě různé třídy měly také různý počet členů.

Návod: Můžeme utvořit například rozklad, jehož třídy mají tyto počty prvků: 1, 2, 4, 5, 6. Ten znázorníme tzv. ***bodovým diagramem:***



Obdobně můžeme znázornit i ostatní rozklady.

12. Tři kamarádi Jirka, Vlastík, Karel stříleli z malorážek do terče. Každý vystřelil šest ran. V terči byly zjištěny tyto zásahy:

bodové ohodnocení zásahu	1	2	3	5	10	20	25	50
počet zásahů	3	2	2	2	3	3	2	1

Každý dosáhl celkem 71 bodů. Máte zjistit, kdo měl nejlepší zásah, jestliže vám prozradíme, že Jirka získal prvními dvěma ranami 22 bodů a Vlastík dosáhl první ranou jen tři body.

Návod: Zjistěte, které zásahy měl ten, kdo zasáhl střed terče ohodnocený číslem 50.

13. Hrací kostky domina mají velikost dvou sousedních polí šachovnice. Dá se ukázat, že šachovnici o 64 polích lze pokrýt 32 kostkami z domina celkem $12\,988\,816 = 2^4 \cdot 901^2$ způsoby. Zjistěte, zda lze obdobným způsobem pokrýt zmenšenou šachovnici o 7×7 polích.

Návod: Zjistěte, kolik bílých a kolik černých polí má zmenšená šachovnice.